Об условных тестах для диагностики неисправностей СФЭ

В.И. Шевченко

Исследуется математическая модель задачи диагностики неисправностей дискретных устройств, в которых выходные сигналы можно описать системой булевых уравнений. Получены оценки глубины условного теста для произвольных базисов булевых функций.

Введение

Задача диагностики неисправностей СФЭ (схем из функциональных элементов) представляет собой математическую модель задачи диагностики неисправностей дискретных устройств, в которых выходные сигналы можно описать системой булевых функций от входных сигналов. При этом для определения неисправности устройства можно только воздействовать (тестовыми наборами сигналов) на его входы и наблюдать за реакцией на его выходах на эти воздействия. Дискретные устройства такого типа широко используются в вычислительной технике.

1. Определения и обозначения

Понятие СФЭ считаем известным (см., например, [1]). Отметим, что рассматриваемые в работе СФЭ имеют хотя бы один вход и ровно один выход, при этом выходом может быть только выход функционального элемента.

Выходы функциональных элементов и входы СФЭ иногда будем называть вершинами [1].

Будем говорить, что некоторый элемент b_{s_0} СФЭ соединен с элементом $b_{s_{t+1}}$, если в СФЭ существует последовательность элементов $b_{s_0}, b_{s_1}, \ldots, b_{s_{t+1}}$ такая, что при $i = 1, \ldots, t+1$ некоторый вход элемента b_{s_i} соединен с выходом элемента $b_{s_{i-1}}$.

Пусть S — некоторая СФЭ. Если функции всех функциональных элементов схемы S принадлежат некоторому конечному множеству B, то S есть схема в базисе B [1].

Пусть $\psi(\tilde{x}_t)$ — некоторая булева функция, $\tilde{x}_t = (x_1, \ldots, x_t)$, и e — функциональный элемент, функцией которого является функция ψ. Определим операцию введения ψ — элемента в схему S:

1) Пусть $t > 0$. Возьмем в S произвольным образом последовательность вершин $\tilde{v} = v_1, \ldots, v_t$ и присоединим входы $1, \ldots, t$ элемента e к вершинам

$v_1, \ldots, v_t$ соответственно. Полученную СФЭ обозначим через U', при этом, если $\bar v$ содержит выход схемы S, то как выход U' пометим выход элемента e. Возьмем теперь в U' элемент b, отличный от элемента e и такой, что: а) хотя бы один вход b присоединен к вершине из $\bar v$; б) выход b не содержится в $\bar v$ и в) элемент b не соединен ни с одним функциональным элементом, выход которого содержится в $\bar v$. Отсоединим некоторый вход b от вершины из $\bar v$ и присоединим его к выходу e. Полученную схему обозначим через U''. О схемах U' и U'' будем говорить, что они получены из схемы S путем введения ψ-элемента.

2) Пусть $t = 0$. Заметим, что в этом случае ψ есть константа 0 или 1, а элемент e не имеет входов. Добавим к схеме S элемент e и выход e пометим как выход СФЭ. Полученную схему обозначим через Γ'. Далее, возьмем в S произвольным образом вершину v и элемент b, некоторый вход которого присоединен к вершине v. Отсоединим этот вход от вершины v и присоединим его к выходу элемента e. Полученную схему обозначим через Γ''. О схемах Γ' и Γ'' будем говорить, что они получены из схемы S путем введения ψ-элемента.

Пусть P — некоторое конечное множество булевых функций. Определим множество схем $H_P(S)$ следующим образом:

1) $S \in H_P(S)$;

2) Пусть $U \in H_P(S)$ и $\psi(\tilde x_t) \in P$. Тогда все СФЭ , которые могут быть получены из S путем введения ψ-элемента, также принадлежат $H_P(S)$. Никаких других схем $H_P(S)$ не содержит.

В дальнейшем множество P будем называть базисом источника неисправностей, который схему S "переводит" в одну из схем множества $H_P(S)$. Множество различных булевых функций, реализуемых схемами из $H_P(S)$, обозначим через $F_P(S)$.

Рассматриваемая в настоящей работе модель неисправностей СФЭ включает в себя такие хорошо известные типы неисправностей как константные, неисправности типа "отрицание", И- и ИЛИ-замыкания.

Пусть S — некоторая СФЭ, а P — базис источника неисправностей. Тогда задача диагностики схемы S относительно P, которую обозначим через $\langle S, P\rangle$, состоит в том, чтобы по любой схеме $U \in H_P(S)$ определить функцию, реализуемую схемой U. Для решения этой задачи используются условные тесты [2, 3, 7].

Пусть S — СФЭ, имеющая n входов. Условным тестом для $\langle S, P\rangle$ будем называть конечное ориентированное корневое дерево, в котором каждой вершине, не являющейся концевой, приписан двоичный набор из $\{0,1\}^n$, каждой концевой вершине — некоторая булева функция. Из каждой вершины, не являющейся концевой, исходят ровно две дуги, которым приписаны числа 0 и 1. Далее, для любой функции $g(\tilde x_n) \in F_P(S)$ найдется полный путь (от корня до концевой вершины) $\gamma = v_1, u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}$ такой, что вершине v_{r+1} приписана функция g и, если при $q = 1, \ldots, r$ вершине v_q приписан набор $\alpha_q \in \{0,1\}^n$, а дуге u_q — число $\delta_q \in \{0,1\}$, то функция g — единственная функция в $F_P(S)$, которая на наборах $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ принимает

значения $\delta_1, \ldots, \delta_r$ соответственно.

В качестве меры сложности условного теста берется его глубина, то есть максимальная длина пути от корня до концевой вершины условного теста. Глубину произвольного условного теста Y будем обозначать через $h(Y)$.

Минимальной глубиной условных тестов для $\langle S, P\rangle$ будем называть величину $h_P(S) = \min h(Y)$, где минимум берется по всем условным тестам для $\langle S, P\rangle$.

Для произвольной пары конечных множеств булевых функций B и P на множестве $\{2, 3, \ldots\}$ определим функцию $h_{B,P}(t) = \max h_P(S)$, где максимум берется по всем схемам в базисе B, число вершин в которых не превосходит t.

Отметим, что в статье в качестве базисов для СФЭ и источников неисправностей рассматриваются только такие конечные множества булевых функций, в которых все функции существенно зависят от всех своих переменных.

Путь F — некоторое множество булевых функций. Тогда через $[F]$ будем обозначать замыкание F относительно операции суперпозиции, а также введения и изъятия несущественных переменных [8]. Если $F = [F]$, то F называется замкнутым классом.

В работе для всевозможных пар базисов B и P исследовались верхние и нижние оценки для функции $h_{B,P}(t)$. При этом существенно использовалась структура замкнутых классов Поста [8].

2. Результаты

Теорема 1. *Пусть базисы B и P такие, что все функции из $B \cup P$ зависят не более, чем от одной переменной. Тогда при $t \geq 2$ справедливы неравенства $0 \leq h_{B,P}(t) \leq 2$.*

Доказательство. Произвольным образом возьмем схему S в базисе B. Пусть S имеет $n \geq 1$ входов и реализует булеву функцию $f(\tilde x_n)$. Так как $f(\tilde x_n)$ равна одной из функций множества $\{0, 1, x_i, \bar x_i\}$, где $1 \leq i \leq n$, а любая функция из $F_P(S)$ равна одной из функций множества $\{0, 1, f(\tilde x_n), \bar f(\tilde x_n)\}$, то очевидно, что $0 \leq h_P(S) \leq 2$. Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть базисы B и P такие, что множество $B \cup P$ содержит или только логические суммы и, возможно, константы, или только логические произведения и, возможно, константы, или только линейные функции. Тогда при $t \geq 2$ справедливы или неравенства $0 \leq h_{B,P}(t) \leq 2$, или неравенства*

$$t - \lceil (t-1)/2 \rceil \leq h_{B,P}(t) \leq t.$$

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 1, теоремы 3 [5] и теорем 2, 3, 7, 8 [6].

Лемма 1. *Пусть B — некоторый базис для СФЭ, а P_1 и P_2 — базисы для источников неисправностей такие, что $[P_1] \subseteq [P_2]$. Тогда $h_{B,P_1}(t) \leq h_{B,P_2}(t)$ при $t \geq 2$.*

Доказательство. Пусть S — схема в базисе B. Нетрудно убедиться в том, что по любой схеме $U \in H_{P_1}(S)$ можно определить схему $\Gamma \in H_{P_2}(S)$, реализующую ту же функцию, что и схема U. Таким образом $F_{P_1}(S) \subseteq F_{P_2}(S)$ и. следовательно, $h_{P_1}(S) \leq h_{P_2}(S)$. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\alpha(\tilde{x}_k)$ и $\beta(\tilde{x}_m)$ — булевы функции такие, что $\beta(\tilde{x}_m)$ может быть получена из $\alpha(\tilde{x}_k)$ путем подстановки переменных $x_1, \ldots, x_m$. Пусть $B_1 = \{\alpha(\tilde{x}_k)\}$ и $B_2 = \{\beta(\tilde{x}_m)\}$ — базисы для СФЭ, а P — произвольный базис для источника неисправностей. Тогда $h_{B_1,P}(t) \geq h_{B_2,P}(t)$ при любом $t \geq 2$.*

Доказательство. Пусть b — функциональный элемент, реализующий функцию $\beta(\tilde{x}_m)$, и пусть функцию $\beta(\tilde{x}_m)$ можно получить из функции $\alpha(\tilde{x}_k)$, если при $i = 1, \ldots, m$ вместо переменных $x_{r_0+\ldots+r_{i-1}+1}, \ldots, x_{r_0+\ldots+r_{i-1}+r_i}$ $(r_0 = 0)$ подставить переменную x_i. Тогда склеим (отождествим) в элементе b входы $r_0 + \ldots + r_{i-1} + 1, \ldots, r_0 + \ldots + r_{i-1} + r_i$ при $i = 1, \ldots, m$. В результате получим элемент, реализующий функцию $\beta(\tilde{x}_m)$. С помощью этого элемента по произвольной схеме S в базисе B_2 легко построить схему U в базисе B_1 такую, что: 1) число вершин в U равно числу вершин в S, 2) U реализует ту же функцию, что и S, 3) $F_P(S) \subseteq F_P(U)$ и, следовательно, $h_P(S) \leq h_P(U)$. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть базисы B и P такие, что $B \cup P$ содержит:*

а) нелинейную функцию;

б) функцию, не являющуюся ни логической суммой, ни константой;

в) функцию, не являющуюся ни логическим произведением, ни константой.

Тогда при $t \geq 2$ справедливы неравенства $2^{\lfloor (t+3)/7 \rfloor} \leq h_{B,P}(t) \leq 2^{t-1}$.

Доказательство этой теоремы можно провести с помощью лемм 1, 2, теорем 3–6 [4], теорем 4, 5 [5] и теорем 4–6, 7, 8 [6].

Отметим, что любая пара базисов для СФЭ и источника неисправностей удовлетворяет одному из свойств, указанных в теоремах 1–3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
2. Мошков М.Ю. Условные тесты // Проблемы кибернетики — М.: Наука, 1983. — Т. 40. — С. 131–170.
3. Чегис И.А., Яблонский С.В. Логические способы контроля электрических схем // Тр. МИ АН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.
4. Шевченко В.И. О сложности диагностики одного типа неисправностей схем из функциональных элементов с помощью условных тестов / Комбинаторно-алгебраические и вероятностные методы в прикладной математике. — Горький: Изд-во ГГУ, 1988. — С. 86–97.
5. Шевченко В.И. О сложности диагностики неисправностей типа "⊕" схем из функциональных элементов / Комбинаторно-алгебраические и вероятностные методы дискретного анализа. — Горький: Изд-во ГГУ, 1989. — С. 129–140.

6. Шевченко В.И. О сложности диагностики неисправностей типов "0", "1", "∧" и "∨" схем из функциональных элементов / Комбинаторно-алгебраические и вероятностные методы и их применение. — Горький: Изд-во ГГУ, 1990. — С. 125–150.
7. Яблонский С.В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1988. — Т. 1. — С. 5–25.
8. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.