Список литературы

[1] Чегис И.А., Яблонский С.В. Логические способы контроля электрических схем. // Тр. МИАН СССР, 1958. — Т.51 —С. 270–360.

[2] Мошков М.Ю. Об условных текстах. // ДАН СССР, 1982. — Т. 265. — С. 550–552.

[3] Мошков М.Ю. О соотношении глубины детерминированных и недетерминированных бесконтурных программ в базисе $\{x + y, x - y, 1; sign x\}$.// Mathematical Problems in Computation Theory, Banach Center Publications, Warsaw, PWN, Polish Scientific Publishers. — 1988. — T.21. — S. 523–529.

[4] Mikhail Moshkov, Decision Trees Optimization Problems // Fundamenta Informaticae (в печати).

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Нижегородском государственном университете, 603005, Нижний Новгород, ул. Ульянова 10.

Оценка степени нечеткости и ее применение в системах искусственного интеллекта

А.П. Рыжов

Введение

Теория нечетких множеств (НМ) возникла как аппарат обработки специфического типа неопределенности — объектов с размытыми, плавными границами. Основное понятие теории НМ — функция принадлежности — отражает как раз эту плавность перехода от непринадлежности какого-либо объекта универсального множества соответствующему понятию к его полной принадлежности. Естественными являются вопросы: можно ли сравнить два множества по степени их "четкости" или "нечеткости"? Чем характеризуются множества, имеющие одинаковую степень нечеткости? Что происходит при применении различных теоретико-множественных операций со степенью нечеткости: когда она возрастает, когда убывает, когда остается неизменной? Ответы на эти вопросы позволяют лучше понять природу нечеткости; сформулировать нетривиальные, глубинные свойства этого феномена; выделить аспекты, по которым нечеткость отличается от похожих понятий (например, теории вероятностей). Однако, кроме очевидного теоретического интереса, результаты по измерению степени нечеткости имеют и обширные практические приложения, к которым можно отнести распознавание образов, принятие решений и т.п.

1. Степень нечеткости множества

Первые результаты по измерению степени нечеткости множества были представлены в работах [1, 2]. К настоящему времени существует обширная библиография по этому вопросу, в наиболее полном виде приведенная в монографии [3].

Можно выделить несколько аспектов, связанных со степенью нечеткости множества. Прежде всего это — интерпретация степени нечеткости как показателя внутренней неопределенности, противоречивости, обусловленных неполной, частичной принадлежностью объекта множеству. Второй аспект связан с интерпретацией степени нечеткости как меры отличия нечеткого множества от обычного множества. Эти аспекты, а также связь степени нечеткости множества со свойствами самой алгебры нечетких множеств подробно освещены в [3].

В первом случае вводится ряд аксиом, формализующих интуитивные представления о нечеткости. Используются примерно следующие рассуждения. Если некоторый объект $u \in U$ обладает свойством A, но лишь в частичной мере (т.е. $0 < \mu_A(u) < 1$), то внутренняя неопределенность, двусмысленность объекта у по отношению к свойству A проявляется в том, что он, хотя и в разной степени, принадлежит сразу двум противоположным классам "A" и "не A". Эта двусмысленность объекта у по отношению к свойству A максимальна, когда степени принадлежности объекта у к обоим классам "A" и "не A" равны, т.е. $\mu_A(u) = \mu_{\neg A}(u) = 0,5$. Анализируемая неопределенность минимальна, когда объект принадлежит только одному из этих классов, т.е. $\mu_A(u) = 1$, $\mu_{\neg A(u)} = 0$, либо $\mu_A(u) = 0$, $\mu_{\neg A}(u) = 1$. Таким образом, степень нечеткости множества A можно определить как функционал $\nu(A)$, определенный на множестве всех нечетких множеств $P(U)$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

P1. $\nu(A) = 0$ тогда и только тогда, когда A — обычное множество.

P2. $\nu(A)$ принимает максимальное значение тогда и только тогда, когда $\mu_A(u) = 0,5$ для любого $u \in U$.

P3. $\nu(A) \le \nu(B)$, если A является заострением B, т.е. $\mu_A(u) \le \mu_B(u)$ при $\mu_B(u) < 0,5$; $\mu_A(u) \le \mu_B(u)$ при $\mu_B(u) > 0,5$ и $\mu_A(u)$ — любое при $\mu_B(u) = 0,5$.

P4. $\nu(A) = \nu(\neg A)$ (симметричность по отношению к $0,5$).

P5. $\nu(A \cup B) + \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B)$, т.е. $\nu(A)$ является оценкой на решетке $P(U)$.

Основная идея метрического подхода заключается в определении степени нечеткости НМ как меры отличия этого множества от ближайшего к нему обычного множества с помощью метрики, введенной в $P(U)$. Определяется также степень нечеткости как расстояние между НМ и максимально нечетким множеством $\mu_A(u) = 0,5$ для любого $u \in U$, расстояние между НМ и его дополнением. Оказывается, эти определения имеют много общего между собой, и определяемая с помощью метрики степень нечеткости удовлетворяет (при некоторых дополнительных условиях) сформулированным аксиомам. Примерами таких мер нечеткости могут служить функционалы:

— на основе расстояния Хемминга:

$$\nu(A) = \frac{1}{|U|} \int_U |\mu_A(u) - \mu_{\neg A}(u)| du$$

— на основе расстояния Евклида:

$$\nu(A) = \frac{1}{|U|} \left[\nu(A) = \frac{1}{|U|} \int_U (\mu_A(u) - \mu_{\neg A}(u))^2 du \right]^{1/2} .$$

2. Аксиоматическое определение степени нечеткости СНМ

Приведенные выше результаты касались проблем измерения степени нечеткости одного множества. Однако, для значительного класса практических задач желательно уметь измерять степень нечеткости не одного множества, а некоторой совокупности нечетких множеств (СНМ), заданных на одном универсуме. Такие структуры можно интерпретировать как множества шкальных значений нечетких лингвистических шкал, как множество альтернатив в задачах принятия решений, как описание классов в задачах нечеткой классификации и кластер-анализа и т.п. Поэтому естественно поставить задачу обобщения описанных выше результатов на случай нескольких множеств, заданных на одном универсуме.

Приведем определение меры неопределенности (степени нечеткости) не для всех СНМ, а для некоторого довольно широкого их класса, которые, как показано ниже, наиболее часто встречаются на практике.

Будем считать, что функции принадлежности СНМ определены на некотором отрезке $U \subset \mathbf{R}^1$ и являются:

1) нормальными, т.е.

$$\forall j (1 \le j \le t)\, \exists U_j^1 \ne \emptyset, \text{ где } U_j^1 = \{u \in U : \mu_j(u) = 1\},$$

U_j^1 является отрезком;

2) $\mu_j(u)$ возрастают слева и убывают справа от U_j^1 $(1 \le j \le t)$.

Эти требования являются довольно естественными для многих интерпретаций СНМ. Например, если интерпретировать СНМ как множество функций принадлежности понятий, входящих в множество шкальных значений некоторой нечеткой лингвистической шкалы (НЛШ), то первое означает, что для каждого шкального значения существует хотя бы один объект, являющийся типичным или эталонным для этого понятия; второе можно интерпретировать как требование плавности, постепенного изменения границ понятий.

Наряду с функциями принадлежностей мы будем рассматривать и характеристические функции, поэтому добавим к приведенным требованиям следующее:

3) функции имеют не более двух точек разрывов первого рода.

Обозначим множество функций на U, удовлетворяющих 1) — 3) через L. Данное множество является подмножеством множества интегрируемых на некотором измеримом множестве функций L_2, и, следовательно, в L можно ввести метрику, например,

$$d(f, g) = \int_U |f(u) - g(u)| du, \qquad f, g \in L.$$

Введем также некоторые ограничения на совокупности функций из L, образующих СНМ. А именно, будем считать, что множество из t таких функций обладает свойством ортогональности:

$$\sum_{j=1}^{t} \mu_j(u) \tag{1}$$

для любого $u \in U$.

Здесь целесообразно сделать два замечания:

1) на самом деле описываемые ниже результаты справедливы и при более слабых ограничениях, чем ортогональность, однако, в целях более компактного изложения результатов. дальнейшие рассуждения проводятся для СНМ, удовлетворяющих (1) ;

2) анализируемые ниже СНМ можно определить как совокупность упорядоченных нечетких чисел, удовлетворяющих некоторым ограничениям.

Будем обозначать СНМ, функции принадлежности которых удовлетворяют (1), через $G(L)$.

В множестве $G(L)$ также можно ввести метрику.

Лемма 1. *Пусть $s_t \in G(L)$, $s'_t \in G(L)$, $\{\mu_1(u), \dots, \mu_t(u)\}$ — множество функций, образующих s_t; $\{\mu'_1(u), \dots, \mu'_t(u)\}$ — множество функций, образующих s'_t; $d(f,g)$ — метрика в L. Тогда*

$$\rho(s_t, s'_t) = \sum_{j=1}^{t} d(\mu_j, \mu'_j)$$

есть метрика в $G(L)$.

Для формулировки аксиом степени нечеткости СНМ нам понадобится определить систему характеристических функций, получаемую из данной СНМ.

Итак, пусть имеется некоторая СНМ $s_t \in G(L)$, определенная на $U \subset \mathbf{R}^1$ и содержащая функции принадлежности $\mu_1(u), \dots, \mu_t(u)$. Построим совокупность характеристических функций $\overline{s}_t = \{h_1(u), \dots, h_t(u)\}$, где

$$h_j(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } \max\limits_{1 \le i \le t} \mu_i(u) = \mu_j(u) \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Будем называть $\overline{s}_t$ ближайшей совокупностью характеристических функций, получаемой из данной СНМ s_t.

Под степенью нечеткости СНМ $s_t \in G(L)$ будем понимать значение функционала $\xi(s_t)$, определенного на множестве функций принадлежности шкальных значений s_t и удовлетворяющего следующим требованиям (аксиомам):

A1. $0 \le \xi(s_t) \le 1 \; \forall s_t \in G(L)$.

A2. $\xi(s_t) = 0 \iff \forall u \in U \; \exists i (1 \le i \le t) : \mu_i(u) = 1, \mu_j(u) = 0 \forall j \ne i$.

A3. $\xi(s_t) = 1 \iff \forall u \in U \; \exists i_1, i_2 (1 \le i_1, i_2 \le t) : \mu_{i_1}(u) = \mu_{i_2}(u) = \max\limits_{1 \le j \le t} \mu_j(u)$.

A4. Пусть СНМ s_t и $s'_{t'}$ определены на универсумах U и U' соответственно; t и t' могут быть равны или не равны друг другу. Тогда

$$\xi(s_t) \le \xi(s'_{t'}), \text{ если } \rho(s_t, \overline{s}_t) \le \rho(s'_{t'}, \overline{s}'_{t'}),$$

где $\rho(\cdot,\cdot)$ — некоторая метрика в $G(L)$.

Аксиома A1 определяет область значений функционала $\xi(s_t)$, т.е. границы измерения нечеткости.

Аксиомы A2 и A3 описывают СНМ, на которых $\xi(s_t)$ принимает наименьшее и наибольшее значения, т.е. максимально "четкие" и максимально "нечеткие" СНМ соответственно.

Аксиома A4 определяет для любой пары СНМ правило сравнения их степени нечеткости. Ее можно интерпретировать следующим образом: чем ближе данная СНМ к своей ближайшей совокупности характеристических функций, тем меньше степень ее нечеткости.

Естественно возникает вопрос о существовании функционалов, удовлетворяющих данным аксиомам. Ниже строится несколько таких функционалов.

Теорема 1. *Пусть $s \in G(L)$. Тогда функционал*

$$\xi(s_t) = \frac{1}{|U|} \int_U f(\mu_{i_1^*}(u) - \mu_{i_2^*}(u))du,$$

где

$$\mu_{i_1^*}(u) = \max_{1 \le j \le t} \mu_j(u), \quad \mu_{i_2^*}(u) = \max_{\substack{1 \le j \le t \\ j \ne i_1^*}} \mu_j(u)$$

и функция f удовлетворяет следующим требованиям:

Ф1: $f(0) = 1$, $f(1) = 0$,

Ф2: f убывает; является степенью нечеткости s, т.е. удовлетворяет A1–A4.

Рассмотрим некоторые конкретные функции, удовлетворяющие условиям Ф1, Ф2, и, тем самым, функционалы, удовлетворяющие аксиомам A1–A4.

Не трудно показать справедливость следующих утверждений.

Утверждение 1. *Единственной линейной функцией, удовлетворяющей условию Ф1, Ф2 является функция $f(x) = 1 - x$.*

Утверждение 2. *Единственным семейством полиномов второй степени, удовлетворяющих Ф1, Ф2 является $f(x) = ax^2 - (1+a)x + 1$.*

Аналогичным образом можно выделять подмножества других классов функций (логарифмических, тригонометрических и т.д.), которые будут удовлетворять Ф1, Ф2. Подставляя полученные функции в формулу для $\xi(s_t)$, получим конкретные функционалы, удовлетворяющие A1–A4, т.е. выражения для степени нечеткости СНМ.

Итак, существует бесконечное множество конкретных функционалов, удовлетворяющих аксиомам A1–A4. Значение каждого из них на конкретной СНМ $s_t \in G(L)$ является степенью нечеткости s_t.

4. Свойства степени нечеткости СНМ

Так как степень нечеткости СНМ является новым понятием в теории нечетких множеств, то необходимо исследовать основные свойства степени нечеткости. Целями такого исследования является доказательство того, что степень нечеткости СНМ не противоречит интуитивным представлениям о нечеткости, а также установление связи с известными в рамках теории нечетких множеств результатами.

Сформулируем свойства степени нечеткости СНМ для простейшего случая — когда f является линейной функцией (утверждение 1). Ниже показано, что этот функционал имеет естественную интерпретацию; обладает рядом свойств, совпадающих с интуитивными представлениями о нечеткости; для простейших СНМ он дает результаты, не противоречащие известным в рамках теории нечетких множеств.

Обозначим этот функционал через $\nu(s_t)$:

$$\nu(s_t) = \frac{1}{|U|}\int_U \eta(s_t, u)du, \qquad (2)$$

где

$$\eta(s_t, u) = 1 - (\mu_{i_1^*}(u) - \mu_{i_2^*}(u)), \qquad (3)$$

$$\mu_{i_1^*}(u) = \max_{1\leq j\leq t} \mu_j(u), \qquad \mu_{i_2^*}(u) = \max_{\substack{1\leq j\leq t\\ j\neq i_1^*}} \mu_j(u) \qquad (4)$$

Вернемся к интерпретации СНМ как множества шкальных значений НЛШ.

Рассмотрим некоторую СНМ $s_t \in G(L)$ и точку $u \in U$.

Подинтегральная функция (3) имеет значение, которое можно изобразить графически в виде, представленном на рис. 1.

$\eta(s_t, u)$ можно интерпретировать как степень сомнений, колебаний человека в выборе того или иного лингвистического значения из заданного множества значений НЛШ при описании реального объекта, имеющего значение оцениваемого параметра (признака), равное u.

Действительно, рассмотрим множество шкальных значений НЛШ "Рост" (рис. 1).

Описывая в данных терминах (низкий, средний, высокий) человека роста u_1 (155 см.) или u_5 (230 см.) мы без колебаний выбираем один из терминов ("низкий" и "высокий" соответственно). Не трудно видеть, что в этих точках

$$\eta(s_t, u_1) = \eta(s_t, u_5) = 0.$$

При описании человека роста u_2 см. мы начинаем колебаться в выборе между терминами "низкий" и "средний", причем эти колебания возрастают с возрастанием u и становятся максимальными в точке u_4 — для людей

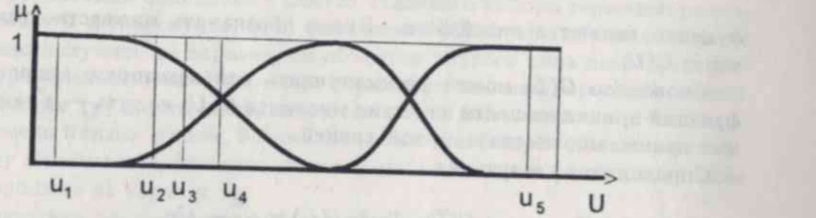

Рис. 1:

роста u_4 см. термины "низкий" и "средний" одинаково подходят. Исходя из этих рассуждений, можем написать:

$$0 = \eta(s_t, u_1) < \eta(s_t, u_2) < \eta(s_t, u_3) < \eta(s_t, u_4) = 1.$$

Таким образом, $\eta(s_t, u)$ действительно отражает степень сомнений, колебаний человека при описании объектов, имеющих значение оцениваемого признака, равное u.

$\nu(s_t)$ можно интерпретировать как усредненную степень таких колебаний при описании всех возможных реальных объектов.

Отметим, что такое определение степени нечеткости лингвистической шкалы (формулы (2)–(4)), вообще говоря, не учитывают влияния оставшихся $(t-2)$ шкальных значений в данной точке, и наиболее адекватно отражают случай пересечения функций принадлежностей двух из них. В случае пересечения большего числа функций принадлежности желательно учитывать влияние третьего шкального значения (т.к. значения двух нижних функций принадлежности могут лежать довольно близко в точке u, т.е. в этой точке человек фактически выбирает одно из трех шкальных значений; его колебания, естественно, сильнее, чем в первом случае, но это не находит отражения при подсчете степени нечеткости по формулам (2)–(4)).

Напомним, что мы рассматриваем не все СНМ, а только СНМ из $G(L)$. Условие (1) и требование нормальности для функций принадлежности гарантирует, что для рассматриваемых СНМ либо не существует трех функций принадлежности, имеющих не нулевое значение в точке u, либо влиянием третьего (и остальных) терминов можно пренебречь. Таким образом, данная интерпретация является естественной для всех СНМ $s_t \in G(L)$.

Рассмотрим подмножество $G(L)$, а именно СНМ, у которых функции принадлежности являются кусочно-линейными функциями, причем на множестве

$$\tilde{U} = \{u \in U : \forall j\,(1 \leq j \leq t)\; 0 < \mu_j(u) < 1\};$$

функции являются линейными. Будем обозначать множество таких СНМ через $G(\tilde{L})$.

Множество $G(\tilde{L})$ можно рассматривать как некоторую аппроксимацию функций принадлежности нечетких множеств $G(L)$; ее суть — в замене плавных границ множества ломаной линией.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $s_t \in G(\overline{L})$. Тогда $\nu(s_t) = \dfrac{d}{2|U|}$, где*

$$d = |U^*| = |\{u \in U : \forall j\,(1 \leq j \leq t)\; \mu_j(u) \neq 1\}|.$$

Таким образом, для данного класса СНМ $G(\overline{L})$ степень нечеткости пропорциональна отношению мощности части универсума, на которой возникает неопределенность выбора того или иного шкального значения, к мощности всего универсума.

Аналогичный результат справедлив и для более широкого, чем $G(\overline{L})$ подмножества $G(L)$, а именно, для случая, когда функции принадлежностей являются кусочно-линейными и на множестве $\tilde{U}$. Будем называть множество таких СНМ $G(\hat{L})$.

Теорема 3. *Пусть $s_t \in G(\hat{L})$. Тогда $\nu(s_t) = C\dfrac{d}{|U|}$, где $C < 1$, $C = \mathrm{Const}$.*

Рассмотрим произвольную СНМ $s_t \in G(L)$. Очевидно, ее можно со сколь угодно большой точностью аппроксимировать СНМ $\hat{s} \in G(\hat{L})$ (выбирая достаточно большое число точек разбиения).

$\nu(\hat{s}_t) = C\dfrac{d}{|U|}$, и, значит, $\nu(s_t) = C\dfrac{d}{|U|}$.

Рассмотрим некоторую взаимно-однозначную функцию g, заданную на U и определим индуцированное этой функцией преобразование некоторой СНМ $s_t \in G(L)$, для которой U является универсумом, в СНМ $g(s_t)$.

Для каждой функции принадлежности $\mu_j(u)$ $(1 \leq j \leq t)$, определенную на U и входящую в СНМ s_t, определим функцию $\mu'_j(u')$ на U' следующим образом

$$\mu'_j(u') = \mu'_j(g(u)) = \mu_j(g^{-1}(u')) = \mu_j(u).$$

Совокупность функций принадлежности $\mu'_j(u')$ образует СНМ $g(s_t)$.

Проиллюстрируем данное определение на следующем примере. Пусть g — растяжение (сжатие) опорного пространства U. Тогда $g(s)$ определяет на $g(U)$ множество функций принадлежности, полученное из исходного таким же растяжением (сжатием).

Теорема 4. *Пусть $s_t \in G(L)$, для которой U является универсумом, g — некоторая дифференцируемая взаимно-однозначная функция, заданная на U и $\nu(s_t) \neq 0$. Тогда если g — линейная функция, то $\nu(s_t) = \nu(g(s_t))$.*

На содержательном уровне это свойство означает, что человек с одинаковыми трудностями описывает в рамках заданного набора терминов разнотипные объекты в том случае, если физические параметры объектов одного типа можно получить из параметров объектов другого типа некоторым линейным преобразованием. Например, терминами высокий, средний, низкий с одинаковыми трудностями описываются люди, дома, деревья и т.п.; терминами очень близко, рядом, близко, недалеко и неблизко, далеко расстояние между молекулами, расстояние между площадями в городе, расстояние между городами на карте и т.п.

В заключение рассмотрим свойства степени нечеткости множества, индуцированной $\nu(s_t)$.

Итак, рассмотрим с при $t = 1$. В этом случае у нас имеется единственное множество $\mu(u)$, которое не будет, вообще говоря, образовывать СНМ: может существовать ряд точек $u \in U$: $\mu(u) = 0$. Поэтому в таком вырожденном случае под СНМ естественно понимать совокупность двух множеств $\mu(u)$ и $\neg\mu(u)$ (это соответствует простейшей лингвистической шкале с множеством значений {"высокий", "невысокий"}, {"актуальный", "неактуальный"} и т.п.).

Тогда, используя формулы (2)–(4), получим:

$$\nu(\mu) = \frac{1}{|U|}(1 - |2\mu(u) - 1|)du \tag{5}$$

Нетрудно показать, что данная мера нечеткости множества удовлетворяет сформулированным выше аксиомам для степени нечеткости множества. Это позволяет надеяться на корректность введенного более общего понятия.

5. Использование степени нечеткости СНМ в системах ИИ

Для иллюстрации практического использования описанных результатов в задачах проектирования систем искусственного интеллекта рассмотрим следующую ситуацию.

Для большого класса человеко-машинных систем (и, в частности, систем ИИ) источником информации является человек (это может быть эксперт для экспертных систем, пользователь для автоматизированных систем управления и т.п.). Описывая объекты предметной облаети системы, человек-эксперт, как правило, не может пользоваться измерительными приборами и описывает эти объекты в виде набора лингвистических значений определенных характеристик. На основании совокупности полученных описаний объектов формируется база данных автоматизированной системы (база знаний экспертной системы). В свою очередь пользователями системы также является некоторое множество людей. Решая свои задачи, пользователь использует базу данных как информационную модель предметной области.

Качество решения этих задач, характеризуемое такими показателями, как потери информации и информационные шумы, во многом зависит от степени адекватности содержащихся в базе данных сведений реальным объектам предметной области.

В данной ситуации актуальной является постановка следующей задачи: можно ли, учитывая некоторые особенности восприятия человеком объектов реального мира, сформулировать такое правило выбора множества значений характеристик описания этих объектов, в рамках которого человек будет испытывать минимально возможные трудности при их описании. Иными словами, неопределенность выбора того или иного значения из заданного множества значений — лингвистическая неопределенность — при применении данного правила будет минимальна. Если это возможно, то какой выигрыш получат пользователи АИС, в базах данных которых хранятся такие описания, в плане сокращения потерь информации и информационных шумов при работе с системой.

Как уже упоминалось выше, СНМ можно интерпретировать как множество шкальных значений НЛШ. Ограничения на классы рассматриваемых СНМ, которые использовались при доказательстве приведенных выше теорем (и только для которых, вообще говоря, эти теоремы справедливы), имеют естественную интерпретацию в случае НЛШ.

При поиске информации в системе, содержащей нечеткие (лингвистические) описания объектов, возникают специфические потери информации и информационные шумы, которые являются показателями качества поиска информации. Смысл этих понятий следующий.

При общении с АИС пользователь формулирует запрос (например, "Выдать описания всех объектов, имеющих значение данной характеристики X, равное a") и получает в ответ из базы данных этой системы некоторое количество описаний объектов, удовлетворяющих поисковому предписанию. При этом, если бы пользователь знал реальные (т.е. "физические", а не лингвистические) значения характеристик выданных на запрос объектов и объектов, описания которых хранятся в базе данных, он бы, возможно, часть выданных объектов забраковал (информационный шум), а часть объектов, описания которых хранятся в базе данных и которые не были выданы на запрос, наоборот бы принял (потери информации). Механизм возникновения таких потерь и шумов связан с размытостью элементов шкалы.

Можно строго показать, что эти величины выражаются следующими формулами:

$$\Pi_X(U) = \mathrm{H}_X(U) = \frac{1}{|U|}\sum_{i=1}(p_j + p_{j+1})\int_U \mu_{a_j}(u)\mu_{a_{j+1}}(u)N(u)du,$$

где $\Pi_X(U)$, $\mathrm{X}_X(U)$ — потери информации и информационные шумы соответственно, возникающие при поиске информации по признаку с множеством значений X, совпадающим с множеством имен шкальных значений НЛШ s_t; p_j — вероятность запроса по j-му значению признака; $N(u)$ — число

объектов, описания которых хранятся в базе данных системы, имеющих фактическое значение характеристики, равное u.

Существует связь между объемом потерь информации и информационных шумов, возникающих при поиске информации в базе данных по признаку, с множеством значений X, совпадающим с множеством имен шкальных значений НЛШ, с одной стороны, и степенью нечеткости — с другой. Эту связь устанавливают следующие теоремы.

Теорема 5. *Пусть $s_t \in G(\overline{L})$, $N(u) = N$ есть константа и для пользователя значения признака представляют одинаковый интерес, т.е. вероятности запросов по каждому значению признака равны. Тогда*

$$\Pi_X(U) = \mathrm{H}_X(U) = \frac{2N}{3t}\nu(l_t).$$

Теорема 6. *Пусть $s_t \in G(L)$ и выполняются условия теоремы 5. Тогда*

$$\Pi_X(U) = \mathrm{H}_X(U) = \frac{c}{t}\nu(\mu),$$

где c — некоторая константа, зависящая только от N.

На основе полученных результатов можно сформулировать следующую методику выбора такого множества значений качественного признака, в рамках которого человек описывает объекты с наименьшими трудностями.

1. Формируются все возможные множества значений признака.
2. Каждое множество значений представляется в виде множества шкальных значений НЛШ.
3. Для каждого множества значений вычисляется степень нечеткости.
4. В качестве оптимального множества значений, минимизирующего неопределенность при описании объектов и повышающего качество поиска информации, выбирается то множество, для которого отношение степени нечеткости к числу терминов минимально. Если множество таких лингвистических описаний образует базу данных некоторой системы, то методика позволяет также выбирать описания объектов, минимизирующие потери информации и информационные шумы.

На основании теоремы 3 мы можем также утверждать, что, при определенных условиях, выбирать оптимальное множество значений признака по предложенной методике можно в наиболее простых, ясных для эксперта ситуациях, а использовать полученное множество значений во всех ситуациях, получающихся из данной линейным преобразованием параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Luca A., Termini S. A definition of a non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory // Information and Control. — 1972. — V. 20. — P. 301–312.
2. Kaufmann A. Introduction to the the theory of fuzzy sub set, v. 1. — N.Y.: Academic Press, 1975. — 643 p.
3. Нечеткие множества в задачах управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова — М.: Наука, 1986. — 312 с.