6. De Cooman G., Kerre E.E. Ample fields (accepted for publication in Simon Stevin).
7. Dubois D., Prade H. Théorie des possibilités. — Masson, Paris, 1985.
8. Goguen J.A. L-fuzzy sets // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1967. — V. 18. — P. 145–174.
9. Jacobs K. Measure and Integral. — Academic Press, New York, 1978.
10. Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. — 1978. — V. 1. — P. 97–110.
11. Ralescu D. Toward a general theory of fuzzy variables // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1982. — V. 86. — P. 176–193.
12. Suárez García F., Gil Álvarez P. Two families of fuzzy integrals // Fuzzy Sets and Systems. — 1986. — V. 18. — P. 67–81.
13. Sugeno M. The theory of fuzzy integrals and its applications. — Doctoral dissertation, Tokyo Institute of Technology, 1974.
14. Taylor A.E. General theory of functions and integration. — Blaisdell, Waltham, Toronto and London, 1965.
15. Wang P.Z. Fuzzy contactability and fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. — 1982. — V. 8. — P. 81–92.
16. Zadeh L.A. Similarity relations and fuzzy orderings // Information Sci. — 1971. — V. 3. — P. 177–200.
17. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. — 1978. — V. 1. — P. 3–28.

Два подхода к оптимизации деревьев решений

М.Ю. Мошков

Рассматриваются деревья решений с проверками из бесконечного множества и меры сложности, характеризующие время работы деревьев решений. Исследуются условия разрешимости проблем минимизации сложности деревьев решений.

Введение

Деревья решений применяются при решении разнообразных задач контроля и диагностики неисправностей [1], дискретной оптимизации [2]. Кроме того, они могут служить моделями различных алгоритмов, представимых в виде конечных деревьев [3].

В работе рассматриваются деревья решений с проверками из бесконечного множества и меры сложности, характеризующие время работы деревьев решений. Исследуются соотношения двух алгоритмических проблем: проблемы совместности систем уравнений, составленных из проверок, и проблемы оптимизации деревьев решений — проблемы построения дерева решений, решающего задачу и имеющего минимальную сложность.

Сравниваются два подхода к изучению деревьев решений: локальный, при котором для построения деревьев решений используются только проверки, входящие в описание задачи, и глобальный, при котором допускается использование произвольных проверок из заданного множества.

1. Основные определения и обозначения

В этом разделе определяются понятия системы проверок, дерева решений, задачи и меры сложности.

1.1. Системы проверок. Обозначим

$$\omega = \mathrm{N} \cup \{0\}, \quad E_2 = \{0, 1\}, \quad F = \{f_i : i \in \omega\}.$$

Для произвольного непустого множества B обозначим B^* множество всевозможных конечных слов в алфавите B, содержащее пустое слово λ.

Упорядоченную пару $U = \langle A, \gamma \rangle$ будем называть *системой проверок*, если выполняются следующие условия:

а) A — непустое множество;

б) γ — отображение множества F во множество $(E_2)^A$.

Множество A и отображение γ, определяющие систему проверок U, будем обозначать A_U и γ_U. В дальнейшем вместо $\gamma_U(f_i)$ будем писать f_i^U.

Обозначим $\Omega = \{\langle f_i, \delta\rangle : f_i \in F, \delta \in E_2\}^*$.

Пусть U — система проверок. Каждому слову $\alpha \in \Omega$ сопоставим подмножество $A_U(\alpha)$ множества A_U. Если $\alpha = \lambda$, то $A_U(\alpha) = A_U$. Пусть $\alpha \neq \lambda$ и $\alpha = \langle f_{i(1)}, \delta_1\rangle \dots \langle f_{i(m)}, \delta_m\rangle$. Тогда $A_U(\alpha)$ — множество решений на A_U системы уравнений $\{f_{i(1)}^U(x) = \delta_1, \dots, f_{i(m)}^U(x) = \delta_m\}$.

1.2. Деревья решений. *Конечным ориентированным деревом с корнем* будем называть конечное ориентированное дерево, в котором ровно в одну вершину не входят дуги. Эту вершину будем называть *корнем* дерева. Вершины дерева, из которых не выходят дуги, будем называть *концевыми* вершинами. Вершины дерева, не являющиеся концевыми, будем называть *рабочими* вершинами. *Полным путем* конечного ориентированного дерева с корнем G будем называть последовательность $\xi = v_1, d_1, \dots, v_m, d_m, v_{m+1}$ вершин и дуг дерева G, в которой v_1 — корень дерева G, v_{m+1} — концевая вершина G и для $i = 1, \dots, m$ дуга d_i выходит из вершины v_i и входит в вершину v_{i+1}.

Схемой дерева решений (*схемой*) будем называть помеченное конечное ориентированное дерево с корнем, в котором:

а) каждой рабочей вершине приписан элемент множества F;

б) из каждой рабочей вершины выходят ровно две дуги, одной из них приписано число 0, а другой — число 1;

в) каждой концевой вершине приписано число из множества ω.

Обозначим C множество всевозможных схем деревьев решений. Пусть $\Gamma \in C$. Обозначим $P(\Gamma)$ множество элементов из F, приписанных рабочим вершинам Γ, и $\Xi(\Gamma)$ — множество полных путей схемы Γ. Пусть $\xi \in \Xi(\Gamma)$. Сопоставим пути ξ слово $\pi(\xi)$ из Ω. Если в пути ξ нет ни одной рабочей вершины, то $\pi(\xi) = \lambda$. Пусть в пути ξ имеется $m > 0$ рабочих вершин, $\xi = v_1, d_1, \dots, v_m, d_m, v_{m+1}$ и для $j = 1, \dots, m$ вершине v_j приписан элемент $f_{i(j)}$, а дуге d_j приписано число δ_j. Тогда $\pi(\xi) = \langle f_{i(1)}, \delta_1\rangle \dots \langle f_{i(m)}, \delta_m\rangle$.

Пусть U — система проверок. *Деревом решений над* U будем называть упорядоченную пару $\langle \Gamma, U\rangle$, где $\Gamma \in C$. Сопоставим дереву решений $\langle \Gamma, U\rangle$ функцию $\Gamma_U : A_U \to \omega$. Пусть $a \in A_U$. Нетрудно заметить, что существует ровно один полный путь $\xi \in \Xi(\Gamma)$, для которого $a \in A_U(\pi(\xi))$. Пусть r — число, приписанное концевой вершине этого пути. Тогда $\Gamma_U(a) = r$. Будем говорить, что дерево решений $\langle \Gamma, U\rangle$ *реализует* функцию Γ_U.

1.3. Задачи. *Схемой задачи* назовем упорядоченный набор

$$\sigma = \langle \nu, f_{i(1)}, \dots, f_{i(n)}\rangle,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\nu : E_2^n \to \omega$ и $f_{i(1)}, \dots, f_{i(n)} \in F$. Обозначим $P(\sigma) = \{f_{i(1)}, \dots, f_{i(n)}\}$. Обозначим Σ множество всевозможных схем задач.

Пусть U — система проверок. *Задачей над* U будем называть упорядоченную пару $\langle \sigma, U\rangle$, где $\sigma \in \Sigma$. Сопоставим задаче $\langle \sigma, U\rangle$ функцию $\sigma_U : A_U \to \omega$.

Пусть $\sigma = \langle \nu, f_{i(1)}, \dots, f_{i(n)}\rangle$ и $a \in A_U$. Тогда $\sigma_U(a) = \nu(f_{i(1)}^U(a), \dots, f_{i(n)}^U(a))$. Задачу $\langle \sigma, U\rangle$ можно интерпретировать как задачу определения по произвольному $a \in A_U$ значения $\sigma_U(a)$. Пусть $\Gamma \in C$. Будем говорить, что дерево решений $\langle \Gamma, U\rangle$ *решает* задачу $\langle \sigma, U\rangle$, если дерево решений $\langle \Gamma, U\rangle$ реализует функцию σ_U, то есть, если $\Gamma_U = \sigma_U$.

1.4. Меры сложности. *Мерой сложности* будем называть произвольную вычислимую функцию $\psi : F^* \to \omega$, обладающую следующим свойством: для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F^*$, если $\alpha_2 \neq \lambda$, то $\psi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) > \psi(\alpha_1\alpha_3)$. Продолжим меру сложности ψ на множества Ω и C. Значения функции ψ на пустых словах из Ω и F^* совпадают. Пусть $\alpha \in \Omega, \alpha \neq \lambda$ и $\alpha = \langle f_{i(1)}, \delta_1\rangle \dots \langle f_{i(m)}, \delta_m\rangle$. Тогда $\psi(\alpha) = \psi(f_{i(1)} \cdots f_{i(m)})$. Пусть $\Gamma \in C$. Тогда $\psi(\Gamma) = \max\{\psi(\pi(\xi)) : \xi \in \Xi(\Gamma)\}$. Величину $\psi(\Gamma)$ будем называть сложностью схемы дерева решений Γ.

Приведем примеры мер сложности. Пусть $g : \omega \to \omega \backslash \{0\}$ — общерекурсивная функция. Определим функцию $\psi^g : F^* \to \omega$. Пусть $\alpha \in F^*$. Если $\alpha = \lambda$, то $\psi^g(\alpha) = 0$. Пусть $\alpha \neq \lambda$ и $\alpha = f_{i(1)} \dots f_{i(m)}$. Тогда $\psi^g(\alpha) = \sum_{j=1}^m g(i(j))$. Функция ψ^g является мерой сложности и называется *взвешенной глубиной*. Если $g \equiv 1$, то функция ψ^g называется *глубиной* и обозначается h.

2. Глобальный подход к оптимизации

Пусть U — система проверок и ψ — мера сложности. Определим функцию $\psi_U : \Sigma \to \omega$. Пусть $\sigma \in \Sigma$. Тогда $\psi_U(\sigma) = \min\{\psi(\Gamma) : \Gamma \in C, \Gamma_U = \sigma_U\}$. Таким образом, $\psi_U(\sigma)$ — минимальная сложность схемы $\Gamma \in C$, для которой дерево решений $\langle \Gamma, U\rangle$ решает задачу $\langle \sigma, U\rangle$.

Определим две алгоритмические проблемы: проблему глобальной оптимизации деревьев решений $Des(U, \psi)$ и проблему совместности систем уравнений $Ex(U)$.

Проблема $Des(U, \psi)$: по схеме задачи $\sigma \in \Sigma$ найти схему дерева решений $\Gamma \in C$ такую, что $\psi(\Gamma) = \psi_U(\sigma)$ и дерево решений $\langle \Gamma, U\rangle$ решает задачу $\langle \sigma, U\rangle$.

Проблема $Ex(U)$: по слову $\alpha \in \Omega$ определить, является ли множество $A_U(\alpha)$ пустым множеством.

Теорема 1 [4]. *Пусть U — система проверок и ψ — мера сложности. Тогда, если проблема $Ex(U)$ неразрешима, то проблема $Des(U, \psi)$ неразрешима.*

Меру сложности ψ будем называть *допустимой*, если для любой системы проверок U такой, что проблема $Ex(U)$ разрешима, проблема $Des(U, \psi)$ разрешима.

Пусть ψ — мера сложности. Для $i \in \omega$ обозначим

$$\omega_\psi(i) = \{j : j \in \omega, \psi(f_j) = i\}.$$

Определим, возможно, частичную функцию $K_\psi : \omega \to \omega$. Пусть $i \in \omega$. Если $\omega_\psi(i)$ — конечное множество, то $K_\psi(i) = \mid \omega_\psi(i) \mid$. Если $\omega_\psi(i)$ — бесконечное множество, то значение $K_\psi(i)$ не определено.

Теорема 2 [4]. *Пусть ψ — мера сложности. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) K_ψ — *общерекурсивная функция;*

б) ψ — *допустимая мера сложности.*

Приведем примеры допустимых мер сложности. Пусть $g : \omega \to \omega\backslash\{0\}$ — общерекурсивная неубывающая неограниченная сверху функция. Тогда взвешенная глубина ψ^g является допустимой мерой сложности.

3. Локальный подход к оптимизации

Пусть U — система проверок и ψ — мера сложности. Определим функцию $\hat{\psi}_U : \Sigma \to \omega$. Пусть $\sigma \in \Sigma$. Тогда

$$\hat{\psi}_U(\sigma) = \min\{\psi(\Gamma) : \Gamma \in C, P(\Gamma) \subseteq P(\sigma), \Gamma_U = \sigma_U\}.$$

Таким образом, $\hat{\psi}_U(\sigma)$ — минимальная сложность схемы $\Gamma \in C$, для которой $P(\Gamma) \subseteq P(\sigma)$ и дерево решений $\langle \Gamma, U\rangle$ решает задачу $\langle \sigma, U\rangle$.

Определим проблему $\hat{D}es(U, \psi)$ локальной оптимизации деревьев решений.

Проблема $\hat{D}es(U,\psi)$: по схеме задачи $\sigma \in \Sigma$ найти схему дерева решений $\Gamma \in C$ такую, что $P(\Gamma) \subseteq P(\sigma), \psi(\Gamma) = \hat{\psi}_U(\sigma)$ и дерево решений $\langle \Gamma, U\rangle$ решает задачу $\langle \sigma, U\rangle$.

Теорема 3. *Пусть U — система проверок и ψ — мера сложности. Тогда проблема $\hat{D}es(U,\psi)$ разрешима в том и только в том случае, когда разрешима проблема $Ex(U)$.*

Пусть ψ — мера сложности. Продолжим ее на множество Σ. Пусть $\sigma \in \Sigma$ и $\sigma = \langle \nu, f_{i(1)}, \dots, f_{i(n)}\rangle$. Тогда $\psi(\sigma) = \psi(f_{i(1)} \cdots f_{i(n)})$.

Лемма 1. *Пусть ψ — мера сложности, U — система проверок и $\sigma \in \Sigma$. Тогда справедливо неравенство $\hat{\psi}_U(\sigma) \le \psi(\sigma)$.*

Доказательство. Пусть $\sigma = \langle \nu, f_{i(1)}, \dots, f_{i(n)}\rangle$. Рассмотрим схему Γ, в которой для каждого полного пути ξ выполняются следующие условия:

а) в пути ξ содержится ровно n рабочих вершин;

б) j-й вершине пути ξ приписан функциональный символ $f_{i(j)}$;

в) концевой вершине пути ξ приписано число $\nu(\delta_1, \dots, \delta_n)$, где δ_j — число, приписанное j-й дуге пути ξ.

Нетрудно показать, что дерево решений $\langle \Gamma, U\rangle$ решает задачу $\langle \sigma, U\rangle$, $P(\Gamma) \subseteq P(\sigma)$ и $\psi(\Gamma) = \psi(f_{i(1)} \cdots f_{i(n)})$. Поэтому справедливо неравенство $\hat{\psi}_U(\sigma) \le \psi(\sigma)$.

Лемма 2 [4]. *Пусть ψ — мера сложности и $\Gamma \in C$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

а) $\psi(\Gamma) \ge h(\Gamma)$;

б) $\psi(\Gamma) \ge \psi(\lambda)$;

в) $\psi(\Gamma) = \psi(\lambda)$ *тогда и только тогда, когда схема Γ состоит из одной вершины.*

Следствие 1. *Пусть ψ — мера сложности, U — система проверок и $\sigma \in \Sigma$. Тогда $\hat{\psi}_U(\sigma) = \psi(\lambda)$ в том и только в том случае, когда $\sigma_U \equiv const$.*

Пусть U — система проверок. Определим алгоритмическую проблему $R(U)$.

Проблема $R(U)$: по схеме задачи $\sigma \in \Sigma$ и схеме дерева решений $\Gamma \in C$ определить, решает ли дерево решений $\langle \Gamma, U\rangle$ задачу $\langle \sigma, U\rangle$.

Лемма 3 [4]. *Пусть U — система проверок. Проблема $R(U)$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима проблема $Ex(U)$.*

Доказательство теоремы 3. Пусть проблема $Ex(U)$ неразрешима. Покажем, что проблема $\hat{D}es(U,\psi)$ неразрешима. Предположим противное. Покажем, что в этом случае проблема $Ex(U)$ разрешима. Пусть $\alpha \in \Omega$. Если $\alpha = \lambda$, то $A_U(\alpha) \ne \emptyset$. Пусть $\alpha \ne \lambda$ и $\alpha = \langle f_{i(1)}, \delta_1\rangle \dots \langle f_{i(n)}, \delta_n\rangle$. Определим отображение $\nu : E_2^n \to E_2$. Пусть $\bar{\gamma} \in E_2^n$. Если $\bar{\gamma} = \langle \delta_1, \dots, \delta_n\rangle$, то $\nu(\bar{\gamma}) = 1$. Если $\bar{\gamma} \ne \langle \delta_1, \dots, \delta_n\rangle$, то $\nu(\bar{\gamma}) = 0$. Обозначим $\sigma = \langle \nu, f_{i(1)}, \dots, f_{i(n)}\rangle$. Очевидно, $\sigma \in \Sigma$. Пусть Γ — схема из множества C, являющаяся решением проблемы $\hat{D}es(U,\psi)$ для схемы задачи σ. Если $\psi(\Gamma) \ne \psi(\lambda)$, то $\hat{\psi}_U(\sigma) \ne \psi(\lambda)$. Используя следствие 1, получаем, что $A_U(\alpha) \ne \emptyset$. Пусть $\psi(\Gamma) = \psi(\lambda)$. Тогда в силу леммы 2 схема Γ состоит из одной вершины. Нетрудно заметить, что этой вершине приписано число 1 тогда и только тогда, когда $A_U(\alpha) \ne \emptyset$. Таким образом, проблема $Ex(U)$ разрешима, что не может быть. Следовательно, проблема $\hat{D}es(U,\psi)$ неразрешима.

Пусть проблема $Ex(U)$ разрешима. Используя лемму 3, получаем, что проблема $R(U)$ разрешима. Пусть $\sigma \in \Sigma, \sigma = \langle \nu, f_{i(1)}, \dots, f_{i(n)}\rangle$ и $M(\sigma)$ — множество значений отображения ν. Нетрудно показать, что существует алгоритм, который по произвольной схеме задачи $\sigma \in \Sigma$ строит множество $C(\psi,\sigma)$ всевозможных схем $\Gamma \in C$, обладающих следующими свойствами: $h(\Gamma) \le \psi(\sigma)$, $P(\Gamma) \subseteq P(\sigma)$ и каждой концевой вершине схемы Γ приписано число из множества $M(\sigma)$.

Покажем, что во множестве $C(\psi,\sigma)$ содержится схема, являющаяся решением проблемы $\hat{D}es(U,\psi)$ для схемы задачи σ. Нетрудно заметить, что существует схема $\Gamma \in C$, которая является решением проблемы $\hat{D}es(U,\psi)$ для схемы задачи σ и у которой всем концевым вершинам приписаны числа из множества $M(\sigma)$. Из леммы 1 следует, что $\psi(\Gamma) \le \psi(\sigma)$. Используя это неравенство и лемму 2, получаем, что $h(\Gamma) \le \psi(\sigma)$. Поэтому $\Gamma \in C(\psi,\sigma)$.

Опишем алгоритм решения проблемы $\hat{D}es(U,\psi)$. Пусть $\sigma \in \Sigma$. Вычислим значение $\psi(\sigma)$ и определим множество $M(\sigma)$. Построим множество $C(\psi,\sigma)$. Используя алгоритм решения проблемы $R(U)$, найдем схему $\Gamma \in C(\psi,\sigma)$, для которой дерево решений $\langle \Gamma, U\rangle$ решает задачу $\langle \sigma, U\rangle$ и

$$\psi(\Gamma) = \min\{\psi(G) : G \in C(\psi,\sigma), G_U = \sigma_U\}.$$

Эта схема является решением проблемы $\hat{D}es(U,\psi)$ для схемы задачи σ. Таким образом, проблема $\hat{D}es(U,\psi)$ разрешима.

Список литературы

[1] Чегис И.А., Яблонский С.В. Логические способы контроля электрических схем. // Тр. МИАН СССР, 1958. — Т.51 —С. 270–360.

[2] Мошков М.Ю. Об условных текстах. // ДАН СССР, 1982. — Т. 265. — С. 550–552.

[3] Мошков М.Ю. О соотношении глубины детерминированных и недетерминированных бесконтурных программ в базисе $\{x+y, x-y, 1; sign x\}$.// Mathematical Problems in Computation Theory, Banach Center Publications, Warsaw, PWN, Polish Scientific Publishers. — 1988. — T.21. — S. 523–529.

[4] Mikhail Moshkov, Decision Trees Optimization Problems // Fundamenta Informaticae (в печати).

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Нижегородском государственном университете, 603005, Нижний Новгород, ул. Ульянова 10.

Оценка степени нечеткости и ее применение в системах искусственного интеллекта

А.П. Рыжов

Введение

Теория нечетких множеств (НМ) возникла как аппарат обработки специфического типа неопределенности — объектов с размытыми, плавными границами. Основное понятие теории НМ — функция принадлежности — отражает как раз эту плавность перехода от непринадлежности какого-либо объекта универсального множества соответствующему понятию к его полной принадлежности. Естественными являются вопросы: можно ли сравнить два множества по степени их "четкости" или "нечеткости"? Чем характеризуются множества, имеющие одинаковую степень нечеткости? Что происходит при применении различных теоретико-множественных операций со степенью нечеткости: когда она возрастает, когда убывает, когда остается неизменной? Ответы на эти вопросы позволяют лучше понять природу нечеткости; сформулировать нетривиальные, глубинные свойства этого феномена; выделить аспекты, по которым нечеткость отличается от похожих понятий (например, теории вероятностей). Однако, кроме очевидного теоретического интереса, результаты по измерению степени нечеткости имеют и обширные практические приложения, к которым можно отнести распознавание образов, принятие решений и т.п.

1. Степень нечеткости множества

Первые результаты по измерению степени нечеткости множества были представлены в работах [1, 2]. К настоящему времени существует обширная библиография по этому вопросу, в наиболее полном виде приведенная в монографии [3].

Можно выделить несколько аспектов, связанных со степенью нечеткости множества. Прежде всего это — интерпретация степени нечеткости как показателя внутренней неопределенности, противоречивости, обусловленных неполной, частичной принадлежностью объекта множеству. Второй аспект связан с интерпретацией степени нечеткости как меры отличия нечеткого множества от обычного множества. Эти аспекты, а также связь степени нечеткости множества со свойствами самой алгебры нечетких множеств подробно освещены в [3].