Нечеткие интегралы, возможность и необходимость

Герт де Куман, Етьен Е. Керре

Вводятся полунормированные и полуконормированные нечеткие интегралы, связанные с уверенностными мерами. Установлены некоторые важные общие свойства этих интегралов. Также исследуется сочетание полунормированных нечетких интегралов и возможностных мер с одной стороны, и полуконормированных нечетких интегралов и необходимостных мер с другой стороны.

1. Введение

В своей докторской диссертации Сугено [13] ввел нечеткие меры и нечеткие интегралы, связанные с этими нечеткими мерами. Нечеткий интеграл Сугено был обобщен в работе [12] до полунормированного и полуконормированного нечетких интегралов.

В теории вышеупомянутых классов интегралов цепь $([0,1],\leq)$ играет важную роль области значений нечетких мер, с которыми эти интегралы связаны. В [3], мы ввели возможностные интегралы, связанные с $(L,\leq)$-возможностными мерами. В своей докторской диссертации [4] один из нас (де Куман) расширил эти понятия до полунормированных и полуконормированных $(L,\leq)$-нечетких интегралов, связанных с очень общим классом мер, а именно с $(L,\leq)$-уверенностными мерами, которые имеют полную решетку в качестве своей области значений и поле множеств в качестве своей области определения. Он также убедительно показал, что с одной стороны, полунормированные $(L,\leq)$-нечеткие интегралы и $(L,\leq)$-возможностные меры, и с другой стороны, полуконормированные $(L,\leq)$-нечеткие интегралы и $(L,\leq)$-необходимостные меры идеально подходят друг другу. Здесь мы сообщаем об этих результатах.

В разделе 2 мы вводим наши обобщенные полунормированные и полуконормированные нечеткие интегралы способом, который формально аналогичен способу, с помощью которого традиционно вводятся интегралы Лебега (см., например, [2, 9, 14]). Мы также выводим несколько важных формул, которые облегчают последующее использование этих интегралов. В разделе 3 доказываются некоторые общие свойства наших интегралов. В разделе 4 получаем некоторые интересные результаты и свойства для наших

Ключевые слова. Операторы; теория мер; треугольные (полу)нормы и (полу)конормы; полунормированный и полуконормированный нечеткие интегралы; теория возможности и необходимости.

обобщенных типов полунормированных и полуконормированных нечетких интегралов, в случае, когда они связаны с обобщенными возможностными, соответственно, необходимостными, мерами.

В заключение этой вводной части приведем несколько предварительных определений и условных обозначений. В настоящей статье мы всегда будем обозначать через X некоторый произвольный универсум, который содержит по крайней мере два различных элемента, так что определение нетривиального поля на X является возможным.

Под $(L,\leq)$ подразумеваем полную решетку, произвольную, но *фиксированную на протяжении целого текста*. Наименьший элемент решетки $(L,\leq)$ обозначим через ℓ, а наибольший — через u. Также предположим, что $\ell \neq u$. Операцию взятия наибольшей нижней грани в $(L,\leq)$ обозначим через $\frown$, операцию взятия наименьшей верхней грани в $(L,\leq)$ — через $\smile$.

Каждому подмножеству A универсума X, можем сопоставить его *характеристическое* $X - L$ *отображение* χ_A, такое, что

$$\chi_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u, & x \in A \\ \ell, & x \notin A, \end{cases}$$

для любого $x \in X$. Произвольное $X - L$ отображение назовем *$(L,\leq)$-нечетким множеством на* X [8]. Множество всех $(L,\leq)$-нечетких множеств на X обозначим через $\mathcal{F}_{(L,\leq)}(X)$. Нам также потребуется отношение частичного упорядочения $\sqsubseteq$ на $\mathcal{F}_{(L,\leq)}(X)$, которое определено следующим способом: для любых $h_1, h_2 \in \mathcal{F}_{(L,\leq)}(X)$

$$h_1 \sqsubseteq h_2 \Leftrightarrow (\forall x \in X)(h_1(x) \leq h_2(x)).$$

Очевидно, структура $(\mathcal{F}_{(L,\leq)}(X), \sqsubseteq)$ является полной решеткой. Полную решетку $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ можно вложить в эту полную решетку взаимно однозначным соответствием, отображающим любое подмножество множества X в его характеристическое $X - L$ отображение. Супремум в этой полной решетке является *поточечным* супремумом, а инфимум — *поточечным* инфимумом.

Для любого $\lambda \in L$, через $\underline{\lambda}$ обозначим константное $X - \{\lambda\}$ отображение. Кроме того, пусть h — некоторое произвольное $(L,\leq)$-нечеткое множество на универсуме X, и пусть λ — некоторый произвольный элемент из L. Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$S_\lambda^h \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1}([\lambda, u]) = \{x \mid x \in X \text{ и } h(x) \geq \lambda\},$$
$$D_\lambda^h \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1}([\ell, \lambda]) = \{x \mid x \in X \text{ и } h(x) \leq \lambda\},$$
$$N_\lambda^h \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1}(\{\lambda\}) = \{x \mid x \in X \text{ и } h(x) = \lambda\}.$$

Множество S_λ^h назовем *λ-разрезом* от h и оно является обобщением уровневых множеств в стандартной теории нечетких множеств. Множество D_λ^h назовем *двойственным λ-разрезом* от h и оно относится к строгим уровневым множествам стандартной теории нечетких множеств. Действительно, если

$(L,\leq) = ([0,1],\leq)$, то дополнение от D_λ^h является строгим уровневым множеством от h [16]. Множество N_λ^h назовем *λ-уровнем* от h.

Обозначим через $\mathcal{V}$ некоторое произвольное нетривиальное поле подмножеств универсума X. Скажем, что $A \subset X$ является *$\mathcal{V}$-измеримым* тогда и только тогда, если $A \in \mathcal{V}$. Кроме того, пусть h — некоторое произвольное $X - L$ отображение. h называется *$\mathcal{V}$-разрезно измеримым* тогда и только тогда, если $(\forall \lambda \in L)(S_\lambda^h \in \mathcal{V})$, *двойственно $\mathcal{V}$-разрезно измеримым* тогда и только тогда, если $(\forall \lambda \in L)(D_\lambda^h \in \mathcal{V})$ и *$\mathcal{V}$-уровнево измеримым* тогда и только тогда, если $(\forall \lambda \in L)(N_\lambda^h \in \mathcal{V})$.

Изотонное $(\mathcal{V},\subseteq) - (L,\leq)$ отображение v, т.е., такое, что

$$(\forall (A,B) \in \mathcal{V}^2)(A \subseteq B \Rightarrow v(A) \leq v(B)),$$

назовем *$(L,\leq)$-уверенностной мерой на* $(X,\mathcal{V})$. Структуру $(X,\mathcal{V},v)$ назовем *$(L,\leq)$-уверенностным пространством*. Если $v(\emptyset) = \ell$, тогда про меру v говорим, что она *нормализованная снизу*. Мера v является *нормализованной сверху*, если $v(X) = u$. Наконец, говорим, что мера v *нормализованная*, если она нормализованная и сверху и снизу. Всегда, когда мы не хотим специально оговаривать, о какой структуре $(L,\leq)$ идет речь, мы будем также в общем говорить о *уверенностных мерах* и *уверенностных пространствах*. Очевидно, уверенностные меры являются обобщением нечетких мер Сугено [13] и mesures de confiance Дюбуа и Прад [7]. Более подробное обсуждение уверенностных мер можно найти в [4].

Наконец, под P мы подразумеваем некоторую произвольную треугольную полунорму на $(L,\leq)$, под T — некоторую произвольную треугольную норму на $(L,\leq)$, под Q — некоторую произвольную треугольную полуконорму на $(L,\leq)$ и под S — некоторую произвольную треугольную конорму на $(L,\leq)$. Более подробное обсуждение этих бинарных операторов на L и их свойств можно найти в [3, 4, 5].

1. Полунормированные и полуконормированные нечеткие интегралы

Определение 1. Пусть X — некоторый произвольный универсум и $\mathcal{V}$ — некоторое произвольное поле над X. $X - L$ отображение s называется *$\mathcal{V}$-простым* тогда и только тогда, если область значений этого отображения $s(X) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ конечная и $(\forall k \in \{1,\ldots,n\})(D_k \stackrel{\text{def}}{=} s^{-1}(\{a_k\}) \in \mathcal{V})$.

Определение 2. Пусть $(X,\mathcal{V},v)$ — некоторое произвольное $(L,\leq)$-уверенностное пространство, s — некоторое $\mathcal{V}$-простое $X - L$ отображение и A — некоторый произвольный элемент от $\mathcal{V}$. Тогда следующие определения (с условными обозначениями определения 1) имеют смысл.

(1) $\alpha_{SP}^v(A;s) \stackrel{\text{def}}{=} S_{k=1}^n P(a_k, v(A \cap D_k))$.

(2) $\beta_{TQ}^v(A;s) \stackrel{\text{def}}{=} T_{k=1}^n Q(a_k, v(A \cap \mathrm{co}D_k))$.

С помощью функционалов $\alpha_{SP}^v(\cdot;\cdot)$ и $\beta_{TQ}^v(\cdot;\cdot)$ определим сейчас функционалы (интегралы) на множестве $\mathcal{F}_{(L,\leq)}(X)$ и не только на множестве $\mathcal{V}$-простых $X - L$ отображений.

Определение 3. Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство, h — некоторое произвольное $X - L$ отображение и A — некоторое произвольное $\mathcal{V}$-измеримое множество. Тогда,

(1) $(SP)\int_A h\mathrm{d}v \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\{\alpha^v_{SP}(A;s) \mid s \sqsubseteq h\}$ называется $(L, \leq)$-*нечетким* SP-*интегралом от* h *на* A *(связанным с* v*)*.

(2) $(TQ)\int_A h\mathrm{d}v \overset{\mathrm{def}}{=} \inf\{\beta^v_{TQ}(A;s) \mid h \sqsubseteq s\}$ называется $(L, \leq)$-*нечетким* TQ-*интегралом от* h *на* A *(связанным с* v*)*.

Теорема 1. *Справедливы следующие предложения:*

(1) *Чтобы для любого $(L, \leq)$-уверенностного пространства $(X, \mathcal{V}, v)$, где v нормализованное, для любой t-полунормы P на $(L, \leq)$ и для любого $\mu \in L$ имело место*

$$(SP)\int_X \underline{\mu}\mathrm{d}v = \mu, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, что $S = \smile$.

(2) *Чтобы для любого $(L, \leq)$-уверенностного пространства $(X, \mathcal{V}, v)$, где v нормализованное, для любой t-полуконормы Q на $(L, \leq)$ и для любого $\mu \in L$ имело место*

$$(TQ)\int_X \underline{\mu}\mathrm{d}v = \mu, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, что $T = \frown$.

Определение 4. Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство, h — некоторое $X - L$ отображение и A — некоторое $\mathcal{V}$-измеримое множество.

(1) $(P)\int_A h\mathrm{d}v \overset{\mathrm{def}}{=} (\smile P)\int_A h\mathrm{d}v$ называется $(L, \leq)$-*нечетким* P-*интегралом от* h *на* A *(связанным с* v*)*.

(2) $(Q)\int_A h\mathrm{d}v \overset{\mathrm{def}}{=} (\frown Q)\int_A h\mathrm{d}v$ называется $(L, \leq)$-*нечетким* Q-*интегралом от* h *на* A *(связанным с* v*)*.

В общем, мы также назовем эти интегралы *полунормированными*, соответственно, *полуконормированными*, $(L, \leq)$-*нечеткими интегралами*. Обоим видам интегралов дается коллективное имя — "$(L, \leq)$-*нечеткие интегралы*". Всегда, когда не хотим специально оговаривать, о какой полной решетке $(L, \leq)$ идет речь, будем просто говорить о *полунормированных нечетких интегралах*, *полуконормированных нечетких интегралах* и *нечетких интегралах*.

Завершая этот раздел, выводим несколько формул, которые облегчают вычисление и последующую обработку нечетких интегралов. Прежде всего, хотим подчеркнуть, что $(L, \leq)$-нечеткие P- и Q-интегралы от некоторого произвольного $X - L$ отображения на произвольном $\mathcal{V}$-измеримом подмножестве множества X всегда существуют, поскольку мы с самого начала предполагаем, что $(L, \leq)$ является полной решеткой.

Теорема 2. *Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство, h — некоторое $X - L$ отображение и A — некоторое $\mathcal{V}$-измеримое множество. Тогда*

(1) $(P)\int_A h\mathrm{d}v = \sup\limits_{B \in \mathcal{V}} P(\inf\limits_{x \in B} h(x), v(A \cap B))$;

(2) $(Q)\int_A h\mathrm{d}v = \inf\limits_{B \in \mathcal{V}} Q(\sup\limits_{x \in B} h(x), v(A \cap \mathrm{co}B))$.

Теорема 3. *Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство, h — некоторое $X - L$ отображение и A — некоторое $\mathcal{V}$-измеримое множество.*

(1) *Если h $\mathcal{V}$-разрезно измеримо, тогда*

$$(P)\int_A h\mathrm{d}v = \sup_{\lambda \in L} P(\lambda, v(A \cap S^h_\lambda)).$$

(2) *Если h двойственно $\mathcal{V}$-разрезно измеримо, тогда*

$$(Q)\int_A h\mathrm{d}v = \inf_{\lambda \in L} Q(\lambda, v(A \cap \mathrm{co}D^h_\lambda)).$$

3. Общие свойства

Свойство 1. *Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство. Пусть μ — некоторый элемент L и A — некоторое $\mathcal{V}$-измеримое множество. Тогда*

(1) $(P)\int_A \underline{\mu}\mathrm{d}v = P(\mu, v(A)) \smile v(\emptyset)$;

(2) $(Q)\int_A \underline{\mu}\mathrm{d}v = Q(\mu, v(\emptyset)) \frown v(A)$.

Следствие 1. *Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство. Для произвольного μ из L, если v нормализованное, то*

(1) $(P)\int_X \underline{\mu}\mathrm{d}v = \mu$;

(2) $(Q)\int_X \underline{\mu}\mathrm{d}v = \mu$.

Следствие 2. *Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство. Для произвольного $A \in \mathcal{V}$ имеет место*

(1) $(P)\int_A \mathrm{d}v \overset{\mathrm{def}}{=} (P)\int_A \underline{u}\mathrm{d}v = v(A)$;

(2) $(Q)\int_A \mathrm{d}v \overset{\mathrm{def}}{=} (Q)\int_A \underline{u}\mathrm{d}v = v(A)$.

Свойство 2. *Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство, h — некоторое $X - L$ отображение и A — некоторое $\mathcal{V}$-измеримое множество. Тогда*

(1) $v(A) = \ell \Rightarrow (P)\int_A h\mathrm{d}v = \ell$;

(2) $v(A) = \ell \Rightarrow (Q)\int_A h\mathrm{d}v = \ell$.

Свойство 3. *Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство, и h_1, h_2 — некоторые $X - L$ отображения, где $h_1 \sqsubseteq h_2$. Тогда для любого A в $\mathcal{V}$*

(1) $(P)\int_A h_1 dv \leq (P)\int_A h_2 dv;$

(2) $(Q)\int_A h_1 dv \leq (Q)\int_A h_2 dv.$

Свойство 4. *Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство, h_1, h_2 — некоторые $X - L$ отображения, A — некоторый элемент из $\mathcal{V}$, и предположим, что $(\forall x \in A)(h_1(x) \leq h_2(x))$. Тогда следующее утверждение имеет место.*

(1) *Если h_1 и h_2 являются $\mathcal{V}$-разрезно измеримыми, тогда*

$$(P)\int_A h_1 dv \leq (P)\int_A h_2 dv.$$

(2) *Если h_1 и h_2 являются двойственно $\mathcal{V}$-разрезно измеримыми, тогда*

$$(Q)\int_A h_1 dv \leq (Q)\int_A h_2 dv.$$

Следствие 3. *Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство. Пусть $(h_j \mid j \in J)$ — некоторое произвольное семейство $X - L$ отображений. Тогда для любого A из $\mathcal{V}$*

(1) $(P)\int_A \sup_{j\in J} h_j dv \geq \sup_{j\in J}(P)\int_A h_j dv;$

(2) $(P)\int_A \inf_{j\in J} h_j dv \leq \inf_{j\in J}(P)\int_A h_j dv;$

(3) $(Q)\int_A \sup_{j\in J} h_j dv \geq \sup_{j\in J}(Q)\int_A h_j dv;$

(4) $(Q)\int_A \inf_{j\in J} h_j dv \leq \inf_{j\in J}(Q)\int_A h_j dv.$

Свойство 5. *Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство и A, B — некоторые $\mathcal{V}$-измеримые множества, где $A \subseteq B$. Тогда для любого $X - L$ отображения h*

(1) $(P)\int_A h dv \leq (P)\int_B h dv;$

(2) $(Q)\int_A h dv \leq (Q)\int_B h dv.$

Следствие 4. *Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство. Пусть $(A_j \mid j \in J)$ — некоторое произвольное семейство $\mathcal{V}$-измеримых множеств. Тогда для любого $X - L$ отображения h*

(1) $(P)\int_{\bigcup_{j\in J} A_j} h dv \geq \sup_{j\in J}(P)\int_{A_j} h dv;$

(2) $(P)\int_{\bigcap_{j\in J} A_j} h dv \leq \inf_{j\in J}(P)\int_{A_j} h dv;$

(3) $(Q)\int_{\bigcup_{j\in J} A_j} h dv \geq \sup_{j\in J}(Q)\int_{A_j} h dv;$

(4) $(Q)\int_{\bigcap_{j\in J} A_j} h dv \leq \inf_{j\in J}(Q)\int_{A_j} h dv.$

Свойство 6. *Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство и A — некоторый элемент из $\mathcal{V}$ с характеристическим $X - L$ отображением χ_A. Тогда*

(1) $v(A) = (P)\int_X \chi_A dv;$

(2) $v(A) = (Q)\int_X \chi_A dv.$

Свойство 7. *Пусть $(X, \mathcal{V}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство, A — некоторый элемент из $\mathcal{V}$ с характеристическим $X - L$ отображением χ_A, и h — некоторое $X - L$ отображение.*

(1) *Если h $\mathcal{V}$-разрезно измеримо, тогда*

$$(P)\int_A h dv = (P)\int_X (\chi_A \frown h) dv.$$

(2) *Если h двойственно $\mathcal{V}$-разрезно измеримо, тогда*

$$(Q)\int_A h dv = (Q)\int_X (\chi_A \frown h) dv.$$

Здесь, $\chi_A \frown h$ является $X - L$ отображением, определенное следующим способом

$$(\forall x \in X)((\chi_A \frown h)(x) \overset{\text{def}}{=} \chi_A(x) \frown h(x)).$$

В следующей теореме, мы явным образом покажем, что два вида нечетких интегралов, которые мы ввели, в каком-то смысле двойственны. Чтобы сформулировать эту теорему, дадим несколько предварительных понятий. Пусть n — некоторый двойственный автоморфизм, сохраняющий порядок, на $(L, \leq)$, т.е., некоторый изоморфизм, сохраняющий порядок, между структурами $(L, \leq)$ и $(L, \geq)$ (см., например, [1]). Чтобы такой двойственный изоморфизм существовал, $(L, \leq)$ должна, конечно, быть самодвойственной. В оставшейся части этого раздела мы предположим, что это имеет место. Рассмотрим произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство $(X, \mathcal{V}, v)$. Тогда $\mathcal{V} - L$ отображение v_n, определенное формулой

$$(\forall A \in \mathcal{V})(v_n(A) \overset{\text{def}}{=} n^{-1}(v(\text{co}A))),$$

является $(L, \leq)$-уверенностной мерой на $(X, \mathcal{V})$, и называется *двойственной $(L, \leq)$-уверенностной мерой на v по отношению к n* [4, 5]. Также рассмотрим некоторую произвольную т-полунорму P на $(L, \leq)$. $L^2 - L$ отображение P_n, такое, что

$$(\forall(\lambda, \mu) \in L^2)(P_n(\lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} n^{-1}(P(n(\lambda), n(\mu)))),$$

является т-полуконормой на $(L, \leq)$. и называется *двойственной т-полуко-нормой от P по отношению к n.* Двойственно, рассмотрим некоторую про-извольную т-полуконорму Q на $(L, \leq)$. Тогда $L^2 - L$ отображение Q_n, такое, что

$$(\forall(\lambda, \mu) \in L^2)(Q_n(\lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} n^{-1}(Q(n(\lambda), n(\mu)))),$$

является т-полунормой на $(L, \leq)$, и называется *двойственной т-полунормой от Q по отношению к n* [3, 4, 5].

Теорема 4. *Пусть $(X, \mathcal{Y}, v)$ — некоторое произвольное $(L, \leq)$-уверенностное пространство. Также, пусть n — двойственный автоморфизм, сохраняющий порядок, от $(L, \leq)$ и h — $X - L$ отображение. Тогда*

(1) $(P) \int_X h \mathrm{d}v = n((P_n) \int_X (n^{-1} \circ h) \mathrm{d}v_n)$, или, что эквивалентно этому,

$$(P_n) \int_X h \mathrm{d}v_n = n^{-1}((P) \int_X (n \circ h) \mathrm{d}v);$$

(2) $(Q) \int_X h \mathrm{d}v = n((Q_n) \int_X (n^{-1} \circ h) \mathrm{d}v_n)$, или, что эквивалентно этому,

$$(Q_n) \int_X h \mathrm{d}v_n = n^{-1}((Q) \int_X (n \circ h) \mathrm{d}v).$$

4. Возможностные и необходимостные интегралы

В этом разделе мы хотим соединить полунормированные нечеткие интегралы и возможностные меры, с одной стороны, и полуконормированные нечеткие интегралы и необходимостные меры, с другой стороны. Покажем, что эти сочетания действительно очень плодотворные. Начнем с того, что введем несколько предварительных понятий и обсудим предположения, сделанные в этом разделе. В дальнейшем, всегда, когда мы говорим о треугольной полунорме P на $(L, \leq)$, мы будем предполагать, что P является *полностью дистрибутивной* по отношению к супремуму, т.е., для любого λ из L и любого семейства $(\mu_j \mid j \in J)$ элементов из L имеет место:

$$\begin{cases} P(\lambda, \sup_{j \in J} \mu_j) = \sup_{j \in J} P(\lambda, \mu_j) \\ P(\sup_{j \in J} \mu_j, \lambda) = \sup_{j \in J} P(\mu_j, \lambda). \end{cases}$$

Аналогично, всегда, когда мы говорим о некоторой треугольной полуконорме Q на $(L, \leq)$, мы предполагаем, что Q — *полностью дистрибутивная* по отношению к инфимуму. Одним словом, мы предполагаем, что структура $(L, \leq, P)$ есть полная решетка с т-полунормой и что структура $(L, \geq, Q)$ — полная решетка с т-полуконормой [4, 5].

Под $\mathcal{R}$ мы подразумеваем некоторое произвольное *обильное поле* на универсуме X, т.е., на множестве подмножеств от X, которое замкнуто относительно произвольного объединения и пересечения и относительно операции взятия дополнения. Мы будем в дальнейшем предполагать, что $\mathcal{R}$ является *нетривиальным* обильным полем, т.е., $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{R}$. Атом от $\mathcal{R}$, содержащий элемент $x \in X$, обозначим через $[x]_{\mathcal{R}}$:

$$[x]_{\mathcal{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{ A \mid x \in A \text{ и } A \in \mathcal{R} \}.$$

Более подробное обсуждение обильных полей можно найти в [4, 6, 15].

Под Π мы подразумеваем некоторую произвольную $(L, \leq)$-*возможностную меру* на $(X, \mathcal{R})$, т.е., полный $\smile$-морфизм между полными решетками $(\mathcal{R}, \subseteq)$ и $(L, \leq)$. Согласно определению это значит, что Π удовлетворяет следующему требованию: для любого семейства $(A_j \mid j \in J)$ элементов из $\mathcal{R}$

$$\Pi(\bigcup_{j \in J} A_j) = \sup_{j \in J} \Pi(A_j).$$

Из этого определения непосредственно следует, что $\Pi(\emptyset) = \ell$. Структура $(X, \mathcal{R}, \Pi)$ также является особенным видом $(L, \leq)$-уверенностного пространства, которое в последующем будем называть $(L, \leq)$-*возможностным пространством.* В силу очевидных причин, Π будет называться нормализованным тогда и только тогда, если $\Pi(X) = u$. $X - L$ отображение π, определенное формулой

$$(\forall x \in X)(\pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi([x]_{\mathcal{R}})),$$

назовем *распределением* от Π. Заметим, что оно полностью определяет Π, поскольку для любого A из $\mathcal{R}$

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x). \tag{3}$$

Под N мы подразумеваем некоторую произвольную $(L, \leq)$-*необходимостную меру* на $(X, \mathcal{R})$, т.е., некоторый полный $\frown$-морфизм между полными решетками $(\mathcal{R}, \subseteq)$ и $(L, \leq)$. Это значит, что по определению N удовлетворяет следующим требованиям: для любого семейства $(A_j \mid j \in J)$ элементов из $\mathcal{R}$

$$\mathrm{N}(\bigcap_{j \in J} A_j) = \inf_{j \in J} \mathrm{N}(A_j).$$

Из этого определения непосредственно следует, что $\mathrm{N}(X) = u$. Также, $(X, \mathcal{R}, \mathrm{N})$ является особенным видом $(L, \leq)$-уверенностного пространства, которое в последующем будем называть $(L, \leq)$-*необходимостным пространством.* В силу очевидных причин, N будет называться нормализованным тогда и только тогда, если $\mathrm{N}(\emptyset) = \ell$. $X - L$ отображение ν, определенное формулой

$$(\forall x \in X)(\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{N}(\mathrm{co}[x]_{\mathcal{R}})),$$

назовем *распределением* от N. Заметим, что это отображение полностью определяет N, поскольку для любого A из $\mathcal{R}$

$$\mathrm{N}(A) = \inf_{x \in coA} \nu(x). \tag{4}$$

У $(L, \leq)$-возможностных и $(L, \leq)$-необходимостных мер более общие области определения и значений и они, таким образом, являются обобщениями возможностных мер Заде [17], необходимостных мер Дюбуа и Прад [7], контактабильностей Уанга [15] и возможностных и необходимостных мер, которые мы ввели в [3]. Более детальное обсуждение этих обобщений можно найти в [3, 4, 6].

$X - L$ отображение h назовем *$(L, \leq)$-нечеткой переменной* в $(X, \mathcal{R})$ тогда и только тогда, если это отображение *$\mathcal{R}$-измеримо*, т.е., постоянно на атомах от $\mathcal{R}$. Можно доказать, что понятия $\mathcal{R}$-измеримости, $\mathcal{R}$-разрезной измеримости, двойственной $\mathcal{R}$-разрезной измеримости и $\mathcal{R}$-уровневой измеримости являются, по существу, эквивалентными для $(L, \leq)$-нечетких переменных [4, 6].

Определение 5. $X - L$ отображение h называется *$(L, \leq)$-нечеткой переменной* в $(X, \mathcal{R})$ тогда и только тогда, если h $\mathcal{R}$-измеримо. Множество $(L, \leq)$-нечетких переменных в $(X, \mathcal{R})$ обозначается через $\mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X)$. Всегда, когда мы хотим опустить ссылку на структуры $(L, \leq)$ и $(X, \mathcal{R})$, мы просто говорим о *нечетких переменных*.

Наши нечеткие переменные имеют более общие области значений и условия измеримости, чем нечеткие переменные, введенные в [10] и потом уточненные в [15], и, таким образом, являются их обобщениями. Они также в определенной мере, по своим основным свойствам, относятся к нечетким переменным, введенным в [11]. Их предназначение состоит, главным образом, в том, чтобы служить возможным эквивалентом действительных стохастических переменных в теории вероятностей. С другой стороны, $(L, \leq)$-нечеткие переменные в $(X, \mathcal{R})$ могут также быть рассмотрены как очевидные расширения — или, в самом деле, "*размывания*" — $\mathcal{R}$-измеримых множеств: характеристическое $X - L$ отображение χ_A подмножества $A \subset X$ есть $(L, \leq)$-нечеткая переменная в $(X, \mathcal{R})$ тогда и только тогда, если A является $\mathcal{R}$-измеримым. Более того, размывание $(\mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X), \sqsubseteq)$ от $(\mathcal{R}, \subseteq)$ является *полной подрешеткой* размывания $(\mathcal{F}_{(L,\leq)}(X), \sqsubseteq)$ от $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, подобно тому, как $(\mathcal{R}, \subseteq)$ является полной подрешеткой от $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ (см., например, [4]).

Определение 6. Пусть h — некоторое $X - L$ отображение и A — некоторое $\mathcal{R}$-измеримое множество.

(1) $(P)\fint_A h\mathrm{d}\Pi$ называется *$(L, \leq, P)$-возможностным интегралом от h на A (связанным с Π)*.

(2) $(Q)\fint_A h\mathrm{dN}$ называется *$(L, \geq, Q)$-необходимостным интегралом от h на A (связанным с N)*.

Всегда, когда хотим опустить ссылку на полную решетку $(L, \leq)$, т-полунорму P и/или т-полуконорму Q, мы просто будем говорить о *возможностных и необходимостных интегралах*.

Теорема 5. *Пусть A — некоторое $\mathcal{R}$-измеримое множество и h — некоторое $X - L$ отображение. Тогда*

(1) $(P)\fint_A h\mathrm{d}\Pi = \sup\limits_{x \in A} P(\inf\limits_{y \in [x]_{\mathcal{R}}} h(y), \pi(x))$;

(2) $(Q)\fint_A h\mathrm{dN} = \mathrm{N}(A) \frown \inf\limits_{x \in X} Q(\sup\limits_{y \in [x]_{\mathcal{R}}} h(y), \nu(x))$.

Следствие 5. *Пусть A — некоторое $\mathcal{R}$-измеримое множество и h — некоторое $X - L$ отображение. Тогда*

(1) $(Q)\fint_X h\mathrm{dN} = \inf\limits_{x \in X} Q(\sup\limits_{y \in [x]_{\mathcal{R}}} h(y), \nu(x))$;

(2) $(Q)\fint_A h\mathrm{dN} = \mathrm{N}(A) \frown (Q)\fint_X h\mathrm{dN}$.

Следствие 6. *Пусть A — некоторый элемент из $\mathcal{R}$ и h — некоторое $\mathcal{R}$-измеримое $X - L$ отображение. Тогда*

(1) $(P)\fint_A h\mathrm{d}\Pi = \sup\limits_{x \in A} P(h(x), \pi(x))$;

(2) $(Q)\fint_A h\mathrm{dN} = \mathrm{N}(A) \frown \inf\limits_{x \in X} Q(h(x), \nu(x))$.

Теорема 6. *Пусть $(h_j \mid j \in J)$ — некоторое произвольное семейство $(L, \leq)$-нечетких переменных в $(X, \mathcal{R})$, и пусть A — некоторое произвольное $\mathcal{R}$-измеримое множество.*

(1) $(P)\fint_A \sup\limits_{j \in J} h_j \mathrm{d}\Pi = \sup\limits_{j \in J} (P)\fint_A h_j \mathrm{d}\Pi$.

(2) $(Q)\fint_A \inf\limits_{j \in J} h_j \mathrm{dN} = \inf\limits_{j \in J} (Q)\fint_A h_j \mathrm{dN}$.

Теорема 7. *Пусть $(A_j \mid j \in J)$ — некоторое произвольное семейство элементов из $\mathcal{R}$, и пусть h — некоторая произвольная $(L, \leq)$-нечеткая переменная в $(X, \mathcal{R})$.*

(1) $(P)\fint_{\bigcup_{j \in J} A_j} h\mathrm{d}\Pi = \sup\limits_{j \in J} (P)\fint_{A_j} h\mathrm{d}\Pi$.

(2) $(Q)\fint_{\bigcap_{j \in J} A_j} h\mathrm{dN} = \inf\limits_{j \in J} (Q)\fint_{A_j} h\mathrm{dN}$.

Теорема 8. *Пусть A — некоторый произвольный элемент из $\mathcal{R}$ и s — некоторое произвольное $\mathcal{R}$-простое $X - L$ отображение. Тогда*

(1) $(P)\fint_A s\mathrm{d}\Pi = \alpha^{\Pi}_{\smile P}(A; s)$.

(2) $(Q)\fint_A s\mathrm{dN} = \mathrm{N}(A) \frown \beta^{\mathrm{N}}_{\frown Q}(X; s)$.

Обладая сейчас достаточным знанием о сочетаниях нечетких переменных и возможностных и необходимостных интегралов, сделаем следующий шаг в нашем исследовании аналогий между $(\mathcal{R}, \subseteq)$ и $(\mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X), \sqsubseteq)$: расширим понятия 'возможностной меры' и 'необходимостной меры'.

Определение 7. $(L,\leq)$-возможностная мера Π' на структуре $(X, \mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X))$ является $\mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X) - L$ отображением, удовлетворяющим следующему требованию: для любого семейства $(h_j \mid j \in J)$ $(L,\leq)$-нечетких переменных в $(X, \mathcal{R})$ имеет место

$$\Pi'(\sup_{j\in J} h_j) = \sup_{j\in J} \Pi'(h_j).$$

С другой стороны, $(L,\leq)$-необходимостная мера N' на $(X, \mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X))$ является $\mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X) - L$ отображением, удовлетворяющим следующему требованию: для любого семейства $(h_j \mid j \in J)$ $(L,\leq)$-нечетких переменных в $(X, \mathcal{R})$ имеет место

$$N'(\inf_{j\in J} h_j) = \inf_{j\in J} N'(h_j).$$

Это значит, что отображение Π', соответственно N', является полным $\smile$-морфизмом, соответственно полным $\frown$-морфизмом, между полными решетками $(\mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X), \sqsubseteq)$ и $(L,\leq)$. Назовем меру Π' *нормализованной* тогда и только тогда, если $\Pi'(\chi_X) = u$, и назовем меру N' *нормализованной* тогда и только тогда, если $N'(\chi_\emptyset) = \ell$. Всегда, когда мы не хотим уточнять области определения и значения этих морфизмов, мы просто будем говорить о *расширенных возможностных* и *необходимостных мерах*.

Следствие 7. $\Pi'(\chi_\emptyset) = \ell$ *и* $N'(\chi_X) = u$.

Утверждение 1. *Пусть Π' — некоторая произвольная $(L,\leq)$-возможностная мера на структуре $(X, \mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X))$. Рассмотрим $\mathcal{R} - L$ отображение Π'', определенное формулой*

$$(\forall A \in \mathcal{R})(\Pi''(A) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi'(\chi_A)),$$

где χ_A — характеристическое $X - L$ отображение множества A. Тогда Π'' является $(L,\leq)$-возможностной мерой на $(X, \mathcal{R})$. Также, пусть N' — некоторая $(L,\leq)$-необходимостная мера на $(X, \mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X))$. Рассмотрим $\mathcal{R} - L$ отображение N'', определенное формулой

$$(\forall A \in \mathcal{R})(N''(A) \stackrel{\text{def}}{=} N'(\chi_A)).$$

Тогда N'' является $(L,\leq)$-необходимостной мерой на $(X, \mathcal{R})$.

Утверждение 2. *Рассмотрим $\mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X) - L$ отображение Π_P, такое, что*

$$(\forall h \in \mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X))(\Pi_P(h) \stackrel{\text{def}}{=} (P)\int_X h d\Pi).$$

Тогда Π_P является $(L,\leq)$-возможностной мерой на $(X, \mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X))$, удовлетворяющей условию $\Pi_P(\chi_A) = \Pi(A)$ для любого A из $\mathcal{R}$. Также, рассмотрим $\mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X) - L$ отображение N_Q, такое, что

$$(\forall h \in \mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X))(N_Q(h) \stackrel{\text{def}}{=} (Q)\int_X h dN).$$

Тогда N_P является $(L,\leq)$-необходимостной мерой на $(X, \mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X))$, такой, что $N_Q(\chi_A) = N(A)$, для любого A из $\mathcal{R}$.

Таким образом, на основе полученных результатов, можно предложить следующие обобщения понятий "возможность" [17] и "необходимость" [17] в рамках теории нечетких множеств.

Определение 8. $(L,\leq)$-возможностную меру Π_P на структуре $(X, \mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X))$ назовем *P-расширением $(L,\leq)$-возможностной меры Π на $(X, \mathcal{R})$*. $(L,\leq)$-необходимостную меру N_Q на структуре $(X, \mathcal{G}^{\mathcal{R}}_{(L,\leq)}(X))$ назовем *Q-расширением $(L,\leq)$-необходимостной меры N на $(X, \mathcal{R})$*. Также, для любой $(L,\leq)$-нечеткой переменной h в $(X, \mathcal{R})$, $\Pi_P(h)$ назовем *$(L,\leq,P)$-возможностью от h*, и $N_Q(h)$ *$(L,\geq,Q)$-необходимостью от h*.

Заключение

В статье мы показали, что полунормированнные и полуконормированные нечеткие интегралы могут сочетаться очень естественным способом с возможностными и необходимостными мерами соответственно. Это привело к введению и изучению возможностных и необходимостных интегралов, которые, среди прочего, могуть быть использованы для того, чтобы определить возможность и необходимость (измеримых) нечетких множеств.

Таким образом, результаты представленые здесь, дают основу для обработки лингвистической неопределенности в плане измеримости и интеграбельности, как это подробно показано в докторской диссертации [4], и будут освещаться в других работах. Возможные и очень полезние приложения этой теории включают представление и обработку неясной и неопределенной информации в базах данных и экспертных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Birkhoff G. Lattice theory / A.M.S. Colloquium Publications, Volume XXV. — Providence, Rhode Island, 1967.
2. Burrill C.W. Measure, Integration and Probability. — McGraw-Hill, New York, 1972.
3. De Cooman G., Kerre E.E., Vanmassenhove F. Possibility theory: An integral theoretic approach // Fuzzy Sets and Systems. — 1992. — V. 46. — P. 287–300.
4. De Cooman G., Evaluatieverzamelingen en -afbeeldingen – Een ordetheorische benadering van vaagheid en onzekerheid [Evaluation sets and mappings—an order-theoretic approach to vagueness and uncertainty]. — Doctoral dissertation, Universiteit Gent, 1993.
5. De Cooman G., Kerre E.E. Order norms on bounded partially ordered sets (accepted for publication in The Journal of Fuzzy Mathematics).

6. De Cooman G., Kerre E.E. Ample fields (accepted for publication in Simon Stevin).
7. Dubois D., Prade H. Théorie des possibilités. — Masson, Paris, 1985.
8. Goguen J.A. L-fuzzy sets // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1967. — V. 18. — P. 145–174.
9. Jacobs K. Measure and Integral. — Academic Press, New York, 1978.
10. Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. — 1978. — V. 1. — P. 97–110.
11. Ralescu D. Toward a general theory of fuzzy variables // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1982. — V. 86. — P. 176–193.
12. Suárez García F., Gil Álvarez P. Two families of fuzzy integrals // Fuzzy Sets and Systems. — 1986. — V. 18. — P. 67–81.
13. Sugeno M. The theory of fuzzy integrals and its applications. — Doctoral dissertation, Tokyo Institute of Technology, 1974.
14. Taylor A.E. General theory of functions and integration. — Blaisdell, Waltham, Toronto and London, 1965.
15. Wang P.Z. Fuzzy contactability and fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. — 1982. — V. 8. — P. 81–92.
16. Zadeh L.A. Similarity relations and fuzzy orderings // Information Sci. — 1971. — V. 3. — P. 177–200.
17. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. — 1978. — V. 1. — P. 3–28.

Два подхода к оптимизации деревьев решений

М.Ю. Мошков

Рассматриваются деревья решений с проверками из бесконечного множества и меры сложности, характеризующие время работы деревьев решений. Исследуются условия разрешимости проблем минимизации сложности деревьев решений.

Введение

Деревья решений применяются при решении разнообразных задач контроля и диагностики неисправностей [1], дискретной оптимизации [2]. Кроме того, они могут служить моделями различных алгоритмов, представимых в виде конечных деревьев [3].

В работе рассматриваются деревья решений с проверками из бесконечного множества и меры сложности, характеризующие время работы деревьев решений. Исследуются соотношения двух алгоритмических проблем: проблемы совместности систем уравнений, составленных из проверок, и проблемы оптимизации деревьев решений — проблемы построения дерева решений, решающего задачу и имеющего минимальную сложность.

Сравниваются два подхода к изучению деревьев решений: локальный, при котором для построения деревьев решений используются только проверки, входящие в описание задачи, и глобальный, при котором допускается использование произвольных проверок из заданного множества.

1. Основные определения и обозначения

В этом разделе определяются понятия системы проверок, дерева решений, задачи и меры сложности.

1.1. Системы проверок. Обозначим

$$\omega = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad E_2 = \{0,1\}, \quad F = \{f_i : i \in \omega\}.$$

Для произвольного непустого множества B обозначим B^* множество всевозможных конечных слов в алфавите B, содержащее пустое слово λ.

Упорядоченную пару $U = \langle A, \gamma \rangle$ будем называть *системой проверок*, если выполняются следующие условия:

а) A — непустое множество;

б) γ — отображение множества F во множество $(E_2)^A$.