Список литературы

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.
2. Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Болотов А.А. Основы теории однородных структур. — М.: Наука, 1990.
3. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1965.
4. Думов А.С. О времени существования конфигураций в однородных структурах. — В печати.
5. Berger R. The undecidability of the domino problem // Memoirs of Amer. Math. Soc. — 1966. — V. 66.

Алгоритмы дополнения примитивных систем элементов свободных алгебр Ли до свободных порождающих множеств*

А.А. Золотых, А.А. Михалев

1. Введение

Система элементов свободной алгебры (свободной группы) называется примитивной, если ее можно дополнить до множества свободных образующих этой алгебры (группы). Многие алгоритмические проблемы теории ассоциативных алгебр и алгебр Ли являются алгоритмически неразрешимыми (см. [12], [15]). Например, У.У. Умирбаев в [8] доказал, что не существует алгоритма, распознающего, является ли конечное число элементов свободной ассоциативной алгебры свободным порождающим множеством подалгебры, которую они порождают. В то же время А.В. Ягжев показал в [10], что такой алгоритм существует при условии, что рассматриваемые элементы порождают всю свободную ассоциативную алгебру.

В данной работе построены алгоритмы определения примитивности системы элементов свободной алгебры Ли и дополнения примитивной системы элементов до свободного порождающего множества свободной алгебры Ли.

Г.П. Кукин в [3] получил следующий критерий того, что элемент свободной алгебры Ли $L(X)$ является примитивным: элемент a примитивен тогда и только тогда, когда фактор-алгебра $L(X)/\mathrm{id}(a)$ является свободной алгеброй Ли, где $\mathrm{id}(a)$ — идеал алгебры $L(X)$, порожденный элементом a. Он также показал, что существует алгоритм, сводящий проблему распознавания примитивности элемента a к проблеме распознавания совместности некоторой системы алгебраических уравнений. Для свободных алгебр Ли матричный критерий распознавания автоморфизмов среди эндоморфизмов (гипотеза о якобиане) был получен У.У. Умирбаевым в [5] (К. Ройтенауер в [20] и В. Шпильрайн в [22] также получили этот результат); для свободных супералгебр Ли это было доказано А.А. Михалевым в [4]. Для свободных ассоциативных алгебр при $n = 2$ см. статьи [14] У. Дикса и Ж. Левина, и при любом n — монографию [21] А. Шоффилда. В статьях [19] и [2] А.А. Золотых

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и INTAS.

и А.А. Михалев доказали эту теорему для свободных алгебр Ли и для свободных ассоциативных алгебр над произвольными ассоциативными коммутативными кольцами с единицей. Критерии этого типа восходят к работе [11] Дж. Бирман, где она получила матричный критерий для распознавания автоморфизмов свободной группы среди эндоморфизмов. Общий результат для примитивных элементов свободных групп был получен У.У. Умирбаевым в [8].

2. Свободные алгебры Ли

Пусть K — поле, $\operatorname{char} K \neq 2$. Алгебра Q над полем K называется *ассоциативной алгеброй*, если $x(yz) = (xy)z$ для всех $x, y, z \in Q$. Алгебра R над полем K называется *алгеброй Ли*, если

$$[x,y] = -[y,x],$$
$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$$

для всех элементов $x, y, z \in R$.

Для произвольной ассоциативной алгебры Q над полем K обозначим че рез $[Q]$ алгебру с новой операцией [,], где

$$[a,b] = ab - ba$$

для всех элементов $a, b \in Q$. Легко проверяется, что алгебра $[Q]$ являетс алгеброй Ли. Хорошо известно, что любая алгебра Ли может быть предста влена как подалгебра алгебры Ли $[Q]$ для некоторой ассоциативной алгебр Q.

Рассмотрим произвольный алфавит X. Множество всех линейных комби наций слов алфавита X над полем K образует ассоциативную алгебру. этой алгебре умножение задается приписыванием слов друг к другу; пусто слово играет роль единицы. Эта алгебра называется *свободной ассоциати ной алгеброй с множеством свободных образующих* X, и обозначается $A($ Любая ассоциативная алгебра может быть получена как фактор-алгебра св бодной ассоциативной алгебры.

Рассмотрим в алгебре Ли $[A(X)]$, полученной из свободной ассоциати ной алгебры введением новой операции, подалгебру $L(X)$, порожденну множеством X. Эта алгебра называется *свободной алгеброй Ли с мно ством свободных образующих* X. Любая алгебра Ли может быть получе как фактор-алгебра свободной алгебры Ли.

Для любого $u \in L(X)$ мы обозначим через $\ell(u)$ *длину* u, то есть наибо шую длину слова, входящего в запись элемента $u \in L(X) \subseteq A(X)$.

Везде далее мы будем предполагать, что алфавит $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ко чен, и что основное поле K имеет характеристику 0.

Мы будем также считать, что множество X вполне упорядочено. Расс трим следующий порядок на множестве $S(X)$ всех слов алфавита X: снача

по длине, а затем лексикографически. Для $a \in A(X)$ через a° мы обозначим старший терм a (то есть старшее слово с коэффициентом).

Пусть $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел. Мы будем говорить, что функция $\omega\colon S(X) \to \mathbf{Q}$ является *функционалом*, если $\omega(ab) = \omega(a) + \omega(b)$ для всех $a, b \in S(X)$, и $\omega(c) > 0$ для всех $c \in S(X)$, $c \neq 1$. Для $a \in A(X)$ через $\xi_\omega(a)$ мы обозначим *старшую ω-компоненту* a. Мы будем говорить, что $a \in A(X)$ является *ω-однородным элементом*, если $a = \xi_\omega(a)$; a является *ω-ограниченным элементом*, если $\omega(a_i) \leq 1$ для всех слов a_i. Через $\zeta_k^t(a)$ мы обозначим компоненту a степени t относительно x_k. Автоморфизм φ алгебры Ли $L(X)$ называется *ω-однородным*, если все элементы $\varphi(x_i)$ ω-однородны и $\omega(\varphi(x_i)) = \omega(x_i)$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Слово $u \in S(X)$, $u \neq 1$, называется *правильным*, если из $u = ab$, $a, b \in S(X)$, $a, b \neq 1$ следует, что $ab > ba$. Пусть $\Gamma(X)$ — множество всех неассоциативных слов алфавита X. Неассоциативное слово $w \in \Gamma(X)$ называется *правильным*, если $w \in X$ или $w = [w_1, w_2]$, где w_1, w_2 — правильные неассоциативные слова, и $\gamma(w_1) > \gamma(w_2)$; если $w_1 = [w_{11}, w_{12}]$, то $\gamma(w_{12}) \leq \gamma(w_2)$ (здесь $\gamma\colon \Gamma(X) - S(X)$ — это *гомоморфизм снятия скобок*). Если a — правильное слово, то существует единственная расстановка скобок $[a]$ на a, такая что $[a]$ является правильным неассоциативным словом. Такая расстановка скобок называется правильной. Заметим, что базисом свободной алгебры Ли является множество всех правильных неассоциативных слов (базис Ширшова, см. [9]). Для всякого элемента w этого базиса выполнено равенство $w^\circ = \gamma(w)$.

3. Примитивные элементы

Система элементов $\{h_1, \ldots, h_k\}$, $k \leq n$, алгебры Ли $L(X)$ называется *примитивной*, если существуют элементы $h_{k+1}, \ldots, h_n$ алгебры Ли $L(X)$ такие что $\{h_1, \ldots, h_n\}$ является множеством свободных образующих $L(X)$. В частности, элемент h является *примитивным*, если он является элементом некоторой системы свободных образующих.

Каждый элемент $h \in L(X)$ может быть единственным образом представлен в виде

$$h = x_1 h_1 + \cdots + x_n h_n,$$

где $h_i \in A(X)$, $1 \leq i \leq n$. Элементы $h_1, \ldots, h_n$ называются *правыми частными производными Фокса элемента* h, $h_i = \dfrac{\partial h}{\partial x_i}$.

Для вычисления частных производных Фокса элемента $h \in L(X)$ мы пользуемся следующей формулой:

$$\frac{\partial [a,b]}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} b - \frac{\partial b}{\partial x} a.$$

Для любой системы $H = \{h_1, \ldots, h_k\} \subseteq L(X)$ мы обозначаем через $J_H = \left(\dfrac{\partial h_j}{\partial x_i}\right)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$, матрицу порядка $n \times k$.

Теорема 1 ([1], [16], [17]). *Пусть* $h \in L(X)$, $\operatorname{char} K = 0$. *Следующие условия эквивалентны:*

- *элемент* h *примитивен;*
- *существуют элементы* $a_1, \ldots, a_n \in A(X)$, *такие что*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial h}{\partial x_i} = 1.$$

Теорема 2 ([1], [16], [17]). *Пусть* $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ *— система элементов* $L(X)$, $\operatorname{char} K = 0$. *equivalent: Следующие условия эквивалентны:*

- *система* H *примитивна;*
- *существуют элементы* $a_{ij} \in A(X)$, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n$, *такие что для всех* $r, s = 1, \ldots, k$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ri} \frac{\partial h_s}{\partial x_i} = \delta_{rs},$$

где δ_{rs} *— символ Кронекера;*

- *матрица* J_H *обратима слева.*

4. АЛГОРИТМЫ

Мы начнем данный параграф с теоремы Кона о свободной ассоциативной алгебре (см. его книгу [13]).

Теорема 3. *Алгебра* $A(X)$ *является кольцом свободных идеалов, то есть все ее односторонние идеалы свободны как левые (соответственно, правые) модули единственного ранга.*

Корректность и окончание алгоритмов данного параграфа следует из теорем 1–3 (см. также доказательства теорем 1, 2 в [17], [18]).

Чтобы избежать ненужных громоздких обозначений и дополнительных определений, мы рассматриваем только случай свободной алгебры Ли над полем характеристики 0. Тем не менее, небольшая модификация этих алгоритмов позволяет применять их в случае супералгебр Ли и цветных супералгебр Ли над полем характеристики 0, а также в случае ограниченных супералгебр Ли и ограниченных цветных супералгебр Ли над полем характеристики $p > 2$.

4.1. *Распознавание примитивности*

Пусть $H = \{h_1, \ldots, h_r\} \subseteq L(X)$ — система элементов. В данном пункте описывается алгоритм, позволяющий решить, является ли система H примитивной, или нет. В случае $r = 1$ этот алгоритм определяет примитивность одного элемента.

Прежде всего вычисляются частные производные Фокса элементов $h_1, \ldots, h_r$. Затем рассматривается стандартный базис $e_1, \ldots, e_r$ свободного левого $A(X)$-модуля $A(X)^r$. Пусть M — левый $A(X)$-подмодуль левого $A(X)$-модуля

$$A(X)^r = A(X)e_1 \oplus \cdots \oplus A(X)e_r,$$

порожденный элементами $\frac{\partial h_1}{\partial x_j} e_1 + \cdots + \frac{\partial h_r}{\partial x_j} e_r$, $1 \le j \le n$. Пользуясь теоремой и стандартным алгоритмом построения канонических базисов свободных левых $A(X)$-модулей, мы находим канонический базис F модуля M. По теореме система элементов H примитивна тогда и только тогда, когда $F = \{e_1, \ldots, e_r\}$. В случае одного элемента h это означает, что канонический базис левого идеала $A(X)$, порожденного частными производными Фокса $\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n}$, в точности совпадает с $\{1\}$.

Ниже приведено точное описание этого алгоритма.

Алгоритм 1

```
Вход:    Множество свободных образующих $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и система $H = \{h_1, \ldots, h_r\}$ элементов $L(X)$.
Выход:   "Да", если система $H$ примитивна. "Нет" иначе.
Шаг 1:   Вычислить частные производные Фокса $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}$.
Шаг 2:   Найти канонический базис $F$ левого $A(X)$-подмодуля
             $A(X)e_1 \oplus \cdots \oplus A(X)e_r$,
         порожденного элементами $f_j = \frac{\partial h_1}{\partial x_j} e_1 + \cdots + \frac{\partial h_r}{\partial x_j} e_r$, $1 \le j \le n$:
    Шаг 2.1:  Положить $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$.
    Шаг 2.2:  Если $F$ содержит нулевой элемент, то удалить этот элемент из $F$.
    Шаг 2.3:  Если $F$ содержит элемент $f = a_k e_k + \cdots + a_n e_n$, $k \ge 1$, такой что коэффициент $\alpha \in K$ при старшем слове $a_k$ отличен от единицы, то заменить элемент $f$ в системе $F$ элементом $f/\alpha$, и перейти к шагу 2.2.
    Шаг 2.4:  Если $F$ содержит элементы
                  $f = a_k e_k + \cdots + a_n e_n$  и  $g = b_l e_l + \cdots + b_n e_n$,
              $k \ge l \ge 1$, такие что $b_k^\circ = \alpha c a_k^\circ$ для некоторого (может быть, пустого) слова $c$ и некоторого $\alpha \in K$, то заменить элемент $g$ в системе $F$ элементом $g - \alpha c f$, и перейти к шагу 2.2.
    Шаг 2.5:  Система $F$ является каноническим базисом выбранного левого $A(X)$-модуля.
Шаг 3:   Если $F = \{e_1, \ldots, e_r\}$, то $H$ является примитивной системой. Иначе $H$ не примитивна.
```

4.2. *Вспомогательный алгоритм*

Если h — ω-однородный элемент $L(X)$, и имеется нетривиальная левая зависимость между частными производными h, то существует ω-однородный автоморфизм φ алгебры Ли $L(X)$, такой что элемент $\varphi(h)$ зависит от меньшего числа переменных, чем h. В этом пункте мы приводим алгоритм для нахождения такого автоморфизма φ как композиции элементарных автоморфизмов.

Алгоритм 2

```
Вход:   Множество свободных образующих $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\omega$-однородный
        элемент $h \in L(X)$ и $\omega$-однородные элементы
            $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n \in A(X)$,
        удовлетворяющие $\omega$-однородному соотношению
            $$\frac{\partial h}{\partial x_k} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_i \frac{\partial h}{\partial x_i}.$$
Выход:  $\omega$-однородный автоморфизм $\varphi$ алгебры Ли $L(X)$, такой что $\varphi(h)$ не
        зависит от $x_k$, и обратный к нему автоморфизм $\varphi^{-1}$.
Шаг 1:  Положить автоморфизмы $\varphi, \psi$ равными тождественному автоморфизму $L(X)$.
Шаг 2:  Если $h$ не зависит от $x_k$, то искомые автоморфизмы $\varphi$ и $\varphi^{-1} = \psi$
        найдены.
Шаг 3:  Вычислить элемент $h_0 = \zeta_k^0(h)$, то есть компоненту $h$ степени 0 относительно переменной $x_k$.
Шаг 4:  Задать $X_0 = \{y_1, \ldots, y_t\} \subseteq X$, подмножество всех переменных, от
        которых зависит $h_0$.
Шаг 5:  Положить $l = 1$.
Шаг 6:  Если $l > t$, то перейти к шагу 12.
Шаг 7:  Найти $\omega$-однородные элементы $d_i \in A(X)$, $i \neq l$, $1 \leq i \leq t$, такие что
            $$\frac{\partial h_0}{\partial y_l} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{t} d_j \frac{\partial h_0}{\partial y_j}$$
        (см. шаг 10 алгоритма 3).
Шаг 8:  Если $d_j$ не существуют, то увеличить $l$ на 1 и перейти к шагу 6.
Шаг 9:  Используя алгоритм 2, найти $\omega$-однородный автоморфизм $\theta$, такой
        что $\theta(h_0)$ не зависит от $y_l$, и найти обратный к нему автоморфизм $\theta^{-1}$
        (элемент $h_0$ зависит от меньшего числа образующих из $X$, чем эл
        мент $h$, поэтому рекурсивное использование этого алгоритма
        приводит к зацикливанию).
```

```
Шаг 10: Найти $\omega$-однородные элементы $a_i \in A(X)$, $i \neq k$, $1 \leq i \leq n$, такие что
            $$\frac{\partial \theta(h)}{\partial x_k} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_i \frac{\partial \theta(h)}{\partial x_i}$$
        (см. шаг 10 алгоритма 3).
Шаг 11: Заменить автоморфизм $\varphi$ на $\theta \cdot \varphi$, заменить автоморфизм $\psi$ на $\psi \cdot \theta^{-1}$,
        заменить $h$ на $\theta(h)$, и перейти к шагу 3.
Шаг 12: Положить $l = 0$.
Шаг 13: Для минимального $i$, такого что $x_i \in X_0$, $\zeta_k^l(a_i) \neq 0$, вычислить элемент
        $b_i = \zeta_k^l(a_i) \in A(X)$ (напомним, что через $\zeta_k^l(a)$ мы обозначили
        компоненту $a$ степени $l$ относительно $x_k$).
Шаг 14: Найти элемент $g_i \in L(X)$, такой что $\frac{\partial g_i}{\partial x_k} = b_i$ и все лиевские мономы
        в $g_i$ зависят от $x_k$:
    Шаг 14.1: Положить $g_i = 0$.
    Шаг 14.2: Если $b_i = 0$, то элемент $g_i$ найден.
    Шаг 14.3: Если $x_k b_i^\circ = \alpha c$ для некоторого $\alpha \in K$ и правильного слова $c$, то
              найти правильную расстановку скобок $[c]$ на $c$:
        Шаг 14.3.1: Если $c = x_k$, то $[c] = x_k$.
        Шаг 14.3.2: Положить $c_0 = x_k$, $c_1 = b_i^\circ / \alpha$.
        Шаг 14.3.3: Если $c_1$ — правильное слово, то при помощи шага 14.6 найти правильные
                    расстановки скобок $[c_0]$, $[c_1]$ на правильных словах $c_0, c_1$;
                    правильная расстановка скобок на $c$ равна $[[c_0], [c_1]]$.
        Шаг 14.3.4: Иначе, если $c_1 = x_j c_2$, то заменить $c_0$ на $c_0 x_j$, заменить $c_1$
                    на $c_2$, и перейти к шагу 14.3.3.
    Шаг 14.4: Заменить $g_i$ на $g_i + \alpha[c]$, заменить $b_i$ на $b_i - \alpha \frac{\partial [c]}{\partial x_k}$, и перейти к
              шагу 14.2.
Шаг 15: Задать автоморфизм $\theta_1, \theta_2$ алгебры Ли $L(X)$, такой что $\theta_1(x_j) =$
        $\theta_2(x_j) = x_j$ для всех $x_j \neq x_i$, и $\theta_1(x_i) = x_i + g_i$, $\theta_2(x_i) = x_i - g_i$.
Шаг 16: Найти $\omega$-однородные элементы $a_i \in A(X)$, $i \neq k$, $1 \leq i \leq n$, такие что
            $$\frac{\partial \theta_2(h)}{\partial x_k} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_i \frac{\partial \theta_2(h)}{\partial x_i}$$
        (см. шаг 10 алгоритма 3).
Шаг 17: Заменить автоморфизм $\varphi$ на $\theta_2 \cdot \varphi$, заменить автоморфизм $\psi$ на $\psi \cdot \theta_1$,
        заменить $h$ на $\theta_2(h)$, и перейти к шагу 3.
```

4.3. *Дополнение примитивной системы*

Для примитивной системы элементов $\{h_1, \ldots, h_r\}$ алгебры Ли $L(X)$ мы приводим алгоритм поиска элементов $h_{r+1}, \ldots, h_n$, таких что $\{h_1, \ldots, h_n\}$ является множеством свободных образующих $L(X)$.

Мы рассматриваем функционал ω, такой что элемент h_1 является ω-ограниченным. Одна из частных производных Фокса ω-старшей компоненты элемента h_1 принадлежит левому модулю, порожденному остальными производными. С помощью алгоритма 2 мы строим ω-однородный автоморфизм φ алгебры Ли $L(X)$, такой что ω-старшая компонента $\varphi(h_1)$ не зависит от какой-либо переменной x_i. Далее заменяем h_1 на $\varphi(h_1)$ и меняем функционал ω, увеличивая значение $\omega(x_i)$. Повторяя этот процесс, мы находим автоморфизм, который переводит элемент h_1 в x_1.

Проводя аналогичные действия с элементами $h_2, \ldots, h_r$, мы строим автоморфизм ψ алгебры Ли $L(X)$, такой что $\psi(h_1) = x_1, \ldots, \psi(h_r) = x_r$. Множество $\{\psi^{-1}(h_{r+1}), \ldots, \psi^{-1}(h_n)\}$ является искомой системой.

Ниже приведено точное описание этого алгоритма.

Алгоритм 3

Вход: Множество свободных образующих $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и примитивная система $\{h_1, \ldots, h_r\}$ элементов $L(X)$.

Выход: Множество $\{h_{r+1}, \ldots, h_n\} \subseteq L(X)$ элементов, таких что система $\{h_1, \ldots, h_n\}$ является множеством свободных образующих $L(X)$.

Шаг 1: Положить $f_1 = h_1, \ldots, f_r = h_r$.

Шаг 2: Задать ψ равным тождественному автоморфизму $L(X)$.

Шаг 3: Положить $k = 1$.

Шаг 4: Если $k > r$, то перейти к шагу 14.

Шаг 5: Положить $\omega(x_i) = 1/\ell(f_k)$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Шаг 6: Если $f_k = x_k$, то увеличить k на 1 и перейти к шагу 4.

Шаг 7: Если $f_k = x_l$ при $l > k$, то рассмотреть автоморфизм φ алгебры Ли $L(X)$, такой что $\varphi(x_k) = x_l$, $\varphi(x_l) = x_k$, и $\varphi(x_i) = x_i$ при $i \neq k, l$, заменить элементы f_j на элементы $\varphi(f_j)$, $j = k, \ldots, r$, заменить автоморфизм ψ на автоморфизм $\psi \cdot \varphi$, увеличить k на 1, и перейти к шагу 4 (заметим, что $\varphi(f_j) = \varphi(x_j) = x_j$ для всех $j = 1, \ldots, k-1$).

Шаг 8: Если $\xi_\omega(f_k)$ не зависит от некоторой переменной x_j, а f_k зависит от этой переменной, то увеличить значение $\omega(x_j)$ так, чтобы f_k стало ω-ограниченным, и $\xi_\omega(f_k)$ зависимо от x_j, и выполнить этот шаг опять.

Шаг 9: Положить $l = 1$.

Шаг 10: Попытаться найти ω-однородные элементы a_i алгебры $A(X)$, $i \neq l$, $k \leq i \leq n$, такие что

$$v = \sum_{\substack{i=k \\ i \neq l}}^{n} a_i u_i$$

для $v = \dfrac{\partial \xi_\omega(f_k)}{\partial x_l}$, $u_i = \dfrac{\partial \xi_\omega(f_k)}{\partial x_i}$ при $i \neq l$:

Шаг 10.1: Если $u_j = 0$ для некоторого $j \neq l$, $k \leq j \leq n$, то при помощи шага 10 попытаться найти ω-однородные элементы $b_i \in A(X)$, $i \neq j, l$, $k \leq i \leq n$, такие что

$$v = \sum_{\substack{i=k \\ i \neq j,l}}^{n} b_i u_i.$$

Если b_i найдены, то положить $a_i = b_i$ при $i \neq j, l$, и $a_j = 0$. Иначе a_i не существуют.

Шаг 10.2: Если $u_j^\circ = \alpha c$ для некоторого $j = k, \ldots, n$, некоторого слова c, и некоторого $\alpha \in K$, $\alpha \neq 1$, то при помощи шага 10 попытаться найти ω-однородные элементы $b_i \in A(X)$, $i \neq l$, $k \leq i \leq n$, такие что

$$v = b_j(u_j/\alpha) + \sum_{\substack{i=k \\ i \neq j,l}}^{n} b_i u_i.$$

Если b_i найдены, то положить $a_i = b_i$ при $i \neq j$, и $a_j = b_j/\alpha$. Иначе a_i не существуют.

Шаг 10.3: Если $u_j^\circ = c u_m^\circ$ для некоторых $j \neq m$, $j \neq l$, $m \neq l$, $k \leq j, m \leq n$, и для некоторого (может быть, пустого) слова c, то при помощи шага 10 попытаться найти ω-однородные элементы $b_i \in A(X)$, $i \neq l$, $k \leq i \leq n$, такие что

$$v = b_j(u_j - c u_m) + \sum_{\substack{i=k \\ i \neq j,l}}^{n} b_i u_i.$$

Если b_i найдены, то положить $a_i = b_i$ при $i \neq m, l$, и $a_m = b_m - b_j c$. Иначе a_i не существуют.

Шаг 10.4: Если $v = 0$, то положить $a_i = 0$, $i \neq l$, $k \leq i \leq n$.

Шаг 10.5: Если $v^\circ = \alpha c u_j^\circ$ некоторых $j \neq l$, $k \leq j \leq n$, некоторого $\alpha \in K$, и некоторого (может быть, пустого) слова c, то при помощи шага 10 попытаться найти ω-однородные элементы $b_i \in A(X)$, $i \neq j, l$, $k \leq i \leq n$, такие что

$$v - \alpha c u_j = \sum_{\substack{i=k \\ i \neq j,l}}^{n} b_i u_i.$$

Если b_i найдены, то положить $a_i = b_i$ при $i \neq j, l$, и $a_j = b_j + \alpha c$. Иначе a_i не существуют.

Шаг 10.6: Если $v^\circ \neq \alpha c u_j^\circ$ для любого слова c, для любого $\alpha \in K$ и любых $j \neq l$, $k \leq j \leq n$, то a_i не существуют.

Шаг 11: Если a_i не существуют, то увеличить l на 1, и перейти к шагу 10.

Шаг 12: Так как для $h_0 = \xi_\omega(f_k)$ имеет место равенство

$$\frac{\partial h_0}{\partial x_l} = \sum_{\substack{i=k\\ i\neq l}}^{n} a_i \frac{\partial h_0}{\partial x_i},$$

использовать алгоритм 2 для нахождения ω-однородного автоморфизма φ алгебры Ли $L(X)$, такого что элемент $\varphi(h_0) = \xi_\omega(\varphi(f_k))$ не зависит от x_l, и вычислить обратный автоморфизм φ^{-1}.

Шаг 13: Заменить элементы f_i на элементы $\varphi(f_i)$, $i = k, \ldots, r$, заменить автоморфизм ψ на автоморфизм $\psi \cdot \varphi^{-1}$, и перейти к шагу 6.

Шаг 14: Множество $\{h_{r+1}, \ldots, h_n\}$, где $h_i = \psi(x_i)$ для $i = r+1, \ldots, n$, является искомым дополнением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Золотых, А.А. Михалев *Ранг элемента свободной (p-)супералгебры Ли.* Доклады АН 334 (1994), N 6, 690–693.
2. А.А. Золотых, А.А. Михалев, *Эндоморфизмы свободных ассоциативных алгебр над коммутативными кольцами и их якобианы.* Фундамент. и прикл. математика **1** (1995), 177–190.
3. Г.П. Кукин, *Примитивные элементы свободных алгебр Ли.* Алгебра и логика 9 (1970), N 4, 458–472.
4. А.А. Михалев, *О правых идеалах свободной ассоциативной алгебры, порожденных свободными цветными супералгебрами Ли.* УМН **47** (1992), N 5, 187–188.
5. У.У. Умирбаев, *Об якобиане алгебр Ли.* 6-я Сибирская школа по многообр. алгебр. систем. Тез. сообщ. Магнитогорск, 1990, с. 32–33.
6. У.У. Умирбаев, *Частные производные и эндоморфизмы некоторых относител но свободных алгебр Ли.* Сибирск. матем. журн. **34** (1993), N 6, 179–188.
7. У.У. Умирбаев, *Некоторые алгоритмические вопросы ассоциативных алгеб* Алгебра и логика **32** (1993), N 4, 450–470.
8. У.У. Умирбаев, *Примитивные элементы свободных групп.* УМН **49** (1994), N 175–176.
9. А.И. Ширшов, *О свободных кольцах Ли.* Матем. сборник **45** (1958), 113–122
10. А.В. Ягжев, *Об алгоритмической проблеме распознавания автоморфизмов гр ди эндоморфизмов свободных ассоциативных алгебр конечного ранга.* Сибир матем. журн. **21** (1980), N 1, 193–199.
11. J.S. Birman, *An inverse function theorem for free groups.* Proc. Amer. Math. Soc (1973), 634–638.
12. L.A. Bokut', G.P. Kukin, *Algorithmic and Combinatorial Algebra.* Kluwer Acad Publ., Dordrecht, 1994.
13. P.M. Cohn, *Free Rings and Their Relations. 2nd Ed.* Academic Press, London, York, 1985.
14. W. Dicks, J. Lewin, *A Jacobian conjecture for free associative algebras.* Comm. Alg **10** (1982), 1285–1306.

15. O.G. Kharlampovich, M.V. Sapir, *Algorithmic problems in varieties.* Internat. J. Algebra Comput. **5** (1995), no. 5.
16. A.A. Mikhalev, A.A. Zolotykh, *Applications of Fox differential calculus to free Lie superalgebras.* Non-Associative Algebra and its Applications. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1994, 285–290.
17. A.A. Mikhalev, A.A. Zolotykh, *Rank and primitivity of elements of free color Lie (p-)superalgebras.* Internat. J. Algebra Comput. **4** (1994), 617–656.
18. A.A. Mikhalev, A.A. Zolotykh, *Combinatorial Aspects of Lie Superalgebras.* CRC Press, Boca Raton, New York, 1995.
19. A.A. Mikhalev, A.A. Zolotykh, *An inverse function theorem for free Lie algebras over commutative rings.* Algebra Colloq. **2** (1995), no. 3, 213–220.
20. C. Reutenauer, *Applications of a noncommutative Jacobian matrix.* J. Pure Appl. Algebra **77** (1992), 169–181.
21. A.H. Schofield, *Representations of Rings over Skew Fields.* London Math. Soc. Lecture Note Ser. **92** (1985).
22. V. Shpilrain, *On generators of L/R^2 Lie algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 1039–1043.