системы. Режим "Импорт", в частности, позволяет загружать объекты из других баз данных (например DBase, FoxBase и др.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дулин С.К. Введение в диссонансную логику // Вычислительные машины и искусственный интеллект. — ЧССР, 1982. — Т. 1, № 4. — С. 291–299.
2. Дулин С.К. Исследование сетей с диссонансами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1982. — № 5. — С. 74–85.
3. Дулин С.К. Анализ структуры рассогласованных множеств // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1985. — № 5. — С. 18–28.
4. Дулин С.К. Об одной процедуре уменьшения структурной рассогласованности системы знаний // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1987. — № 2. — С. 22–34.
5. Дулин С.К. Согласование структур в условиях расширенного понятия консонанса // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1989. — № 5. — С. 86–93.
6. Дулин С.К. О проблеме гомеостазиса активной системы знаний // Проблемы искусственного интеллекта. — 1992. — № 1. — С. 3–31.
7. Averkin A.N., Dulin S.K. Decrease of contradiction in active knowledge system // Computers and Artificial Intelligence (ČSSR) 1986. — V. 5, № 3. — P. 235–240.
8. Dulin S.K., Ehrlich A.I. Structural contradictions in knowledge base // SCAI"88. Springfield, VA. Amsterdam. 1988. — P. 361–372.

Об устойчивых конфигурациях в однородных структурах

Думов А.С.

Рассматривается вопрос алгоритмической разрешимости существования в однородных структурах таких конфигураций g, что $g = F(g)$, F - функция переходов ОС. Устанавливается, что это свойство алгоритмически разрешимо для линейных ОС и неразрешимо для плоских ОС.

1. Понятия и результаты

Основываясь на [1], дадим необходимые определения. Однородной структурой (ОС) S назовем набор $S = (Z^k, E_n, V, f)$, где Z^k - множество k-мерных векторов с целыми координатами, $E_n = \{0, 1, ..., n-1\}$, $V = \{a_0, ..., a_{h-1}\}$ - упорядоченный набор попарно различных векторов из Z^k, f - функция h переменных, $f : (E_n)^h \to E_n$, причем $f(0, ..., 0) = 0$. Однородную структуру S назовем плоской однородной структурой, если $k = 2$, и линейной однородной структурой, если $k = 1$. Элементы множества Z^k называются ячейками ОС S; элементы множества E_n называются состояниями ячеек: набор V, называемый шаблоном соседства, определяет для каждой ячейки a ОС S набор $V(a) = (a + a_0, ..., a + a_{h-1})$, который назовем окрестностью ячейки a; функция f называется локальной функцией переходов ОС S. Состоянием ОС S называем произвольную функцию g, определенную на множестве Z^k и принимающую значения из E_n. Если $a \in Z^k$ и g - состояние ОС S, то значение $g(a)$ называем состоянием ячейки a, определяемым состоянием g однородной структуры S. На множестве Γ всех состояний ОС S определим основную функцию переходов F однородной структуры S, полагая $F(g_1) = g_2$, если $g_1, g_2 \in \Gamma$ и выполняется тождество $g_2(a) = f(g_1(a + a_0), ..., g_1(a + a_{h-1}))$. Функционирование ОС S представляет собой последовательность ее состояний $g_0, g_1, ...$, для которых выполняется равенство $g_{i+1} = F(g_i)$, $i = 0, 1, ...$. Состояние g_0 интерпретируется как некоторое изначально задаваемое состояние. Состояние g_i иногда интерпретируется как состояние ОС в момент времени i. Если g^1 и g^1 - состояния ОС S и $g^2 = F^t(g^1)$, то говорим, что g^2 выращивается из g^1 за время t, а сам процесс называем выращиванием. Конфигурациями ОС S назовем такие ее состояния g, для которых равенство $g(a) = 0$ выполняется на множестве всех ячеек a, кроме, быть может, конечного их числа. Кроме того. термин "конфигурация" будет иногда использоваться для обозначения множества ячеек в ненулевых состояниях. Если неравенство $g(a) \neq 0$ выполняется ровно для одной ячейки a, то такие конфигурации будем называть инициальными. Диаметром D конфигурации g назовем $\max_{g(a)\neq 0, g(b)\neq 0} \rho(a,b)$, где a, b - ячейки однородной структуры, $\rho(a,b) = \sum_{i=1}^{k} |a_i - b_i|$. Под временем существования (или временем жизни) $T(S,g)$ конфигурации g в ОС S будем понимать минимальное i, при котором в последовательности состояний $g_0 = g, g_1 = F(g_0), g_2 = F(g_1), \ldots$ ОС S возникает тождественно нулевое состояние g_i, и будем полагать время жизни конфигурации равным бесконечности, если такого i не существует. Назовем состоянием-самородком такое состояние g, отличное от тождественно нулевого, что $F(g) = g$. Аналогично определим конфигурацию-самородок.

Теорема 1. *Существует алгоритм $\aleph$, который для любой линейной ОС устанавливает, есть ли в ней (A) конфигурации-самородки, (B) состояния-самородки.*

Теорема 2. *Не существует алгоритма $\aleph$, который для любой плоской ОС устанавливает, есть ли в ней (A) конфигурации-самородки, (B) состояния-самородки.*

2. Доказательство теоремы 1

(A). Не ограничивая общности можно считать, что шаблон соседства V ОС
S есть $\{(-p), (-p+1), \ldots, 0, \ldots, (p-1), p\}$, полагая в случае необходимости
тивную зависимость локальной функции переходов $f(x_{-p}, \ldots, x_p)$ ОС S от
которых переменных. Пусть g - конфигурация-самородок в ОС S, пусть
состоит из ячеек $g(1), \ldots, g(k)$ и пусть существуют такие $i, j, i < j$, что

$$(*) \qquad g(i) = g(j), g(i+1) = g(j+1), \ldots, g(i+6p+2) = g(j+6p+2).$$

Тогда конфигурация g', образованная $k+i-j$ ячейками в состояниях $g'(1)$
$g(1), \ldots, g'(i-1) = g(i-1), g'(i) = g(j), g'(i+1) = g(j+1), \ldots, g'(k+i-j) =$
также является конфигурацией-самородком, поскольку состояния ячеек
блона соседства $V(a')$ для любой ячейки a' конфигурации g' совпадают
стояниями ячеек шаблона $V(a)$ некоторой ячейки a конфигурации g. Пусть
- число состояний ячейки ОС S, тогда n^{6p+3} - количество различных наборов
этих состояний длины $6p+3$ и, следовательно, для конфигурации диаметра
$D \geq D^* = (6p+3)n^{6p+3}$ непременно найдутся такие i, j, которые удовлетворя-
ют $(*)$, т.е. отсутствие конфигураций-самородков среди конфигураций
метра меньше D влечет за собой отсутствие конфигураций-самородков
ди любых конфигураций ОС S. Таким образом, для проверки существования
конфигураций-самородков в данной ОС достаточно перебрать все конфи-
рации диаметра меньше D, что и позволяет предложить очевидный алгоритм

(B). Пусть S - линейная однородная структура с тем же числом состояний и таким же шаблоном соседства, что и ОС из пункта (A). Если в ОС S существуют конфигурации-самородки, то они могут быть найдены как это было описано выше. Допустим теперь, что в ОС S не существует конфигураций-самородков, но есть состояние-самородок g. Если существуют два множества ячеек $G_i^0 = \{(i), \ldots, (i+2p)\}$ и $G_j^0 = \{(j), \ldots, (j+2p)\}$, $j > i+2p+1$, все ячейки которых находятся в нулевом состоянии, и ячейка $(a), i+2p < a < j, g((a)) \neq 0$, то состояние g', получаемое из g переводом в нулевое состояние всех ячеек $(b), b < i$, и $(c), c > j+2p$, будет конфигурацией-самородком ОС S, что вступает в противоречие с предположением. Таким образом, обязательно существует множество ячеек $G_k = \{(k), \ldots, (k+D^*+4p+1)\}$, в котором нет множеств G_i^0. Рассмотрим конфигурацию g', получаемую из состояния g переводом в нулевое состояние всех ячеек, не входящих в G_k. Пусть состояние ОС S в момент времени t есть g', тогда состояния ячеек $(k+p), \ldots, (k+D^*+3p+1)$ в момент времени $t+1$ останутся неизменными. Назовем конфигурации, подобные g', т.е. такие, у которых за 1 такт не меняются состояния ячеек, "отстоящих от краев" конфигурации не менее, чем на p ячеек, пассивными конфигурациями. Поскольку по произвольному состоянию-самородку g мы построили пассивную конфигурацию g' диаметра $D = D^* + 4p + 2$, то существование пассивных конфигураций диаметра D является необходимым условием существования в ОС состояний-самородков. Покажем теперь, что из существования пассивной конфигурации диаметра D вытекает существование в ОС состояний-самородков. Действительно, как и в пункте (A), среди ячеек $(k+p), \ldots, (k+D^*+3p+1)$ найдутся такие две различные ячейки (a) и (b), что состояния ячеек их шаблонов соседства совпадают. Пусть $a < b$. Обозначим через $[a,b)$ множество всех ячеек (c), таких, что $a \leq c < b$. Если теперь мы переведем все ячейки x ОС S, находящиеся от некоторой ячейки $(c) \in [a,b)$ на расстоянии $l(b-a)$, где l - произвольное целое число, в то же состояние, что и состояние ячейки (c), то получим состояние-самородок. Итак, существование пассивных конфигураций диаметра D является критерием существования состояний-самородков. Существование алгоритма, проверяющего все конфигурации фиксированного диаметра на пассивность, не вызывает сомнения. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

(A). Приведем некоторые сведения из теории алгоритмов [3] в том виде, в котором они изложены в [1]. Однородная система продукций Поста - это тройка $T = \langle A, P, k\rangle$, где $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ - конечный алфавит, $P \subset A \times A^*$, A^* - множество конечных слов в алфавите A, $P = p_1, \ldots, p_m$ - множество пар вида $p_i = (a_i, R_i), a_i \in A, R_i \in A^*$, k - натуральное число. Будем говорить, что T применима к слову $w \in A^*$, называть слово w' результатом применения T к слову w и обозначать $w' = T(w)$, если $w = w_1 \ldots w_s, s \geq k$, и $w' = w_{k+1} \ldots w_s R_i, i : a_i = w_1$. Таким образом, у слова w "стираются" первые w

букв, и к нему приписывается слово R_i, которое соответствует букве a_i в паре $p_i \in P$. Если $s < k$, то T неприменима к слову w. Будем называть слово w' T-продукцией слова w, если существует конечная цепочка слов $w_1, ..., w_t$, такая, что $w^1 = w, w^t = w', w^{i+1} = T(w^i), 1 \leq i \leq t-1$. Таким образом, множество $\tau(w)$ всех T-продукций данного слова w образует последовательность, первым элементом которого является само слово w, и каждый элемент последовательности есть результат применения T к предшествующему элементу. Если эта последовательность конечна (последнее слово имеет длину, меньшую k), то будем говорить, что при применении к слову w система T останавливается через конечное число шагов. Имеет место следующая

Лемма 1. *Существует система однородных продукций Поста*

$$T^0 = \langle A^0, P^0, k^0 \rangle,$$

для которой не существует алгоритма $\aleph_{T^0}$, решающего по произвольному наперед заданному слову w конечно или бесконечно множество T^0-продукций этого слова.

Поставим в соответствие m буквам $a_1, ..., a_m$ алфавита A состояния $a_1, ..., a_m$ ячеек однородной структуры S. Будем говорить, что конфигурация g кодирует слово $w = w_1...w_s, w \in A^*$, если некоторые s ячеек с координатами $(p+1), ..., (p+s)$ находятся в состояниях $w_1, ..., w_s$ соответственно, а все остальные ячейки находятся в нулевом состоянии. Обозначим через B класс линейных ОС с шаблоном соседства $\{(0), (-1)\}$, а через $B(n)$ - класс всех ОС из B с n состояниями ячейки.

Лемма 2. *Для любой системы однородных продукций Поста $T = \langle A, P, k \rangle$ существует линейная ОС $S, S \in B$, которая, имея в качестве начальной конфигурации g_0 конфигурацию, кодирующую произвольное слово w в алфавите A^*, будет переходить в тождественно нулевое состояние тогда и только тогда, когда последовательность продукций системы Поста для слова w конечна.*

Доказательство леммы. Мы предложим ОС $S \in B$, которая некоторым образом моделирует последовательность применений системы Поста к данному слову. Пусть множество состояний ячейки ОС S включает в себя, помимо нулевого состояния и состояний $a_1, ..., a_m$, соответствующих буквам алфавита, состояния-векторы $(z, R_i), 1 \leq i \leq m$, где z - либо $a_j, 1 \leq j \leq m$, либо натуральное число $N, N \leq m$, и состояния $R_i^j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq |R_i|$, $|R_i|$ - длина слова R_i. Определим функцию переходов в соответствии со следующей таблицей.

условие перехода	текущее состояние ячейки					
	0	a_i	(a_i, R_j)	(k, R_i)	$(k-1, R_j)$	R_j^m
$l = 0$		(k, R_i)				
$l = (k, R_j) \wedge k > 1$		$(k-1, R_j)$				
$l = (*, R_j)$	R_j^1	(a_i, R_j)				
$l = R_j^{p+1}, p < \|R_j\|$	R_j^{p+1}					
1			a_i	0	0	$R_j(m)$

(l означает состояние левого соседа рассматриваемой ячейки; '$*$' - либо 1, либо букву алфавита A; $R_j(i)$ - i-ю букву слова R_j, условие перехода "1" означает безусловный переход.)

Пусть в момент времени $t = 0$ конфигурация g_0 ОС S кодирует некоторое слово $w = w_1...w_s, w \in A^*$. В момент времени $t = 1$ крайняя левая ячейка b_1 конфигурации g_0 изменит свое состояние: $w_1 \to (k, R_i), i : a_i = w_1$. В момент $t = 2$ ячейка b_1 перейдет в нулевое состояние, а ячейка справа от нее в состояние $(k-1, R_i)$. Т.о., за $2k$ тактов первые k ячеек исходной конфигурации, состояния которых соответствовали первым k буквам слова w, будут переведены в нулевое состояние. Затем компонента R_i состояния будет "передана" до самой правой ячейки, после чего справа к конфигурации будет "приписано" слово R_i. Заметим, что "стирание" левых букв, "передача" R_i и "приписывание" могут и будут происходить одновременно. Так, уже в момент времени $t = 2k+2$, ячейка b_{k+1} перейдет в состояние (k, R_j), и начнется построение второй продукции. Несложно видеть, что состояние ОС с введенной функцией переходов действительно перейдет в тождественно нулевое состояние тогда, и только тогда, когда последовательность продукций Поста для исходного слова конечна.

Далее, имеет место следующая очевидная лемма (аналогичная лемме в [4]).

Лемма 3. *Для любой ОС $S \in B(n)$, для любой конфигурации g диаметра D этой ОС, существуют при $n^* = n + D^2$ ОС $S^* \in B(n^*)$, и инициальная конфигурация g^* в ОС S^*, такие, что если F^* и F - функции переходов ОС S^* и S, то для всех $i \geq 0$ выполняется равенство $(F^*(g^*))^{D+i} = F^i(g)$.*

Обозначим через $C(n)$ класс плоских ОС с n состояниями ячейки и шаблоном соседства $\{(0,0), (-1,0), (0,-1), (1,0), (0,1)\}$.

Лемма 4. *Для произвольной пары $S_g = (S, g)$, где $S \in B(n)$, g - инициальная конфигурация в ОС S, можно указать такую ОС S', $S' \in C(n)$, в которой конфигурации-самородки существуют тогда и только тогда, когда $T(S, g) < \infty$.*

Доказательство леммы. Пусть $f(x, l), f'(x, l, r, d, u)$ - локальные функции переходов ОС S и S' соответственно, x означает текущее состояние ячейки, l, r, d, u - состояния ее левого, правого, нижнего и верхнего соседей соответственно, и пусть $g(0) = x_0, x_0 \neq 0$. Определим $f'(x, l, r, d, u)$ через $f(x, l)$:

$$f'(x,l,r,d,u) = \begin{cases} x_0, & \text{при } x = x_0 \wedge l = d = 0 \vee x = 0 \wedge r \neq 0 \wedge u \neq 0; \\ f(d,l), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, если состояния ячеек конфигурации $(1,k), (2,k-1), ..., (k,1)$ ОС S' совпадают с состояниями ячеек конфигурации $(1), (2), ..., (k)$ ОС S в момент времени t, то состояния ячеек $(1,k+1), (2,k), ..., (k+1,1)$ ОС S' будут совпадать с состояниями ячеек $(1), (2), ..., (k), (k+1)$ ОС S в момент времени $t+1$. Тогда конфигурацию ОС S' можно поставить в соответствие последовательности конфигураций ОС S.

Пусть $T(S,g) < \infty$ и пусть g' - такое состояние ОС S', что $g'(i,j) = g^{i+j}(i)$, где $g^t(i)$ - состояние ячейки (i) ОС S в момент времени t, при $i \geq 0, j \geq 0$; и $g'(i,j) = 0$ в остальных случаях. Время жизни конфигурации g в ОС S конечно, $g'(i+j) = 0$ при $i + j \geq T(S,g)$, значит неравенство $g'(a) \neq 0$ выполняется только для конечного числа ячеек a, т.е. g' - конфигурация. Условие $g'(a) = (F'(g'))(a)$. где F' - глобальная функция переходов ОС S', проверяется непосредственно для произвольной ячейки a ОС S'. Следовательно g' - конфигурация-самородок.

Будем называть множество Y ячеек в состояниях, отличных от нулевого, z-связным, если для любых двух ячеек $a \in Y, b \in Y$ существует такая последовательность ячеек $a = c_1, c_2, ..., c_k = b, c_i \in Y, 1 \leq i \leq k$, что $||c_{i+1} - c_i|| \leq z, 1 \leq i < k$. Будем называть множество ячеек Y замкнутым z-связным, если оно является z-связным и к нему не может быть добавлено новых ячеек без нарушения z-связности.

Утверждение. *Пусть g - конфигурация-самородок в рассматриваемой ОС, и $g = g_1 \cup ... \cup g_k$, где $g_i, 1 \leq i \leq k$, - замкнутые $\sqrt{2}$-связные множества, тогда любая конфигурация g_i также будет конфигурацией-самородком.*

Доказательство. Для определенности возьмем $i = 1$. Назовем множество B, состоящее из всех ячеек b в нулевом состоянии и таких, что $||b-a|| \leq \sqrt{2}$, где a - некоторая ячейка g_1, границей g_1. Несложно видеть, что из $\sqrt{2}$-связности множества g_1 следует, что множество B ячеек разбивает плоскость однородной структуры на две области - внутреннюю (совпадающую с g_1) и внешнюю, куда попадают остальные множества g_i. Рассмотрим конфигурацию g_i, которая получается из конфигурации-самородка g переведением ячеек всех множеств $g_i, i > 1$, в нулевое состояние. Пусть в момент времени $t = 0$ состояние ОС S есть g_1. Рассмотрим состояние ОС S в момент времени $t = 1$. Поскольку шаблон соседства V ОС S определяет зависимость состояний данной ячейки от состояний ячеек, удаленных от нее не более, чем на единицу, то состояния ячеек конфигурации g_1 не изменятся, так как ни для одной из них не изменились состояния ячеек шаблона соседства, по сравнению с конфигурацией g. Рассмотрим ячейки множества B. Среди них не может находиться ячейка b, состояния верхнего и правого соседей которой отлично от нулевого, иначе исходная конфигурация g не была бы конфигурацией-самородком. Таким образом, в соответствии с введенной функцией переходов $f'(x,l,r,d,u)$, их состояния будут полностью определяться состояниями нижнего и левого соседей. Но при "переходе" от g к g_1 эти состояния не изменились или стали нулевыми, следовательно все ячейки конфигурации B в момент $t = 1$ останутся в нулевом состоянии, т.е. g_1 - самородок. Утверждение доказано.

Пусть теперь $T(S,g) = \infty$. Предположим, в ОС S' существует конфигурация-самородок g'. Пусть g' - замкнутая $\sqrt{2}$-связная конфигурация, что в силу предыдущего утверждения не ограничивает общности. В любой непустой конфигурации g существует непустое множество ячеек X_g, левый и нижний соседи которых находятся в нулевом состоянии. Несложно проверить, что если g - замкнутое $\sqrt{2}$-связное множество, и если есть две различные ячейки $a \in X_g, b \in X_g$, то найдется такая ячейка c в нулевом состоянии, что состояния ее верхнего и правого соседей будут отличны от нулевого. В силу определения $f'(x,l,r,d,u)$ такая ячейка перейдет в состояние x_0, и, следовательно, конфигурация g - не конфигурация-самородок. Тогда $|X'_g| = 1$, т.е. существует единственная ячейка a, левый и нижний соседи которой находятся в нулевом состоянии. Не ограничивая общности будем считать, что эта ячейка - $(0,0)$. В конфигурации-самородке g' она обязана находиться в состоянии x_0. Рассмотрим локальную функцию переходов $f'(x,l,r,d,u)$. Поскольку g', по предположению, конфигурация- самородок, то обусловленный этой функцией переход ячейки из состояния 0 в состояние x_0 при условии $r \neq 0 \wedge u \neq 0$ не происходит, кроме того, поскольку $|X'_g| = 1$, переход $x_0 \to x_0$ при $l = d = 0$ имеет место только для одной ячейки. Следовательно, для всех ячеек ОС, отличных от нулевой, функция переходов $f'(x,l,r,d,u)$ превращается в $f(x,l)$. Тогда, очевидно, состояния ячеек, лежащих на прямой $i + j = k, k > 0$, полностью определяются состояниями ячеек, лежащих на прямой $i + j = k - 1$. Если g' - конфигурация-самородок, то это означает, что $g'(i,j) = g^{i+j}(i)$. Но поскольку время жизни конфигурации g в ОС S бесконечно, количество ячеек g' в ненулевых состояниях тоже должнобыть бесконечным, что вступает в противоречие с определением конфигурации. Лемма доказана.

Возьмем систему однородных продукций Поста $T^0 = \langle A^0, P^0, k^0 \rangle$, для которой вопрос конечности последовательности продукций алгоритмически неразрешим. Возьмем линейную ОС S из леммы 2, соответствующую T^0. Далее, для каждого слова w в алфавите A^0 возьмем некоторую линейную структуру $S_w \in B$, существующую на основании леммы 3, которая из инициальной конфигурации g_0 выращивает конфигурацию, кодирующую w, и в дальнейшем функционирует как S. Для каждой такой структуры S_w возьмем некоторую плоскую ОС S'_w, существующую на основании леммы 4, наличие конфигураций-самородков в которой эквивалентно конечности времени существования инициальной конфигурации g_0 в S_w. Образуем из таких ОС S'_w класс K. Из существования алгоритма, который по произвольной ОС S'_w из класса K определял бы существование в ней конфигураций-самородков следовало бы существование алгоритма, определяющего конечность времени жизни линейной ОС S_w, из чего вытекала бы алгоритмическая разрешимость вопроса конечности последовательности продукций Поста. Доказательство пункта (А) завершено.

(B). Отсутствие алгоритма, определяющего по произвольной плоской ОС наличие в ней состояний-самородков, устанавливается при доказательстве одной из теорем [2], хотя и не оформлено в отдельное утверждение. Мы не станем повторять здесь это доказательство, а лишь отметим, что из алгоритмической разрешимости вопроса о существовании состояний-самородков вытекала бы разрешимость общей проблемы домино [5].

Список литературы

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.
2. Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Болотов А.А. Основы теории однородных структур. — М.: Наука, 1990.
3. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1965.
4. Думов А.С. О времени существования конфигураций в однородных структурах. — В печати.
5. Berger R. The undecidability of the domino problem // Memoirs of Amer. Math. Soc. — 1966. — V. 66.

Алгоритмы дополнения примитивных систем элементов свободных алгебр Ли до свободных порождающих множеств*

А.А. Золотых, А.А. Михалев

1. Введение

Система элементов свободной алгебры (свободной группы) называется примитивной, если ее можно дополнить до множества свободных образующих этой алгебры (группы). Многие алгоритмические проблемы теории ассоциативных алгебр и алгебр Ли являются алгоритмически неразрешимыми (см. [12], [15]). Например, У.У. Умирбаев в [8] доказал, что не существует алгоритма, распознающего, является ли конечное число элементов свободной ассоциативной алгебры свободным порождающим множеством подалгебры, которую они порождают. В то же время А.В. Ягжев показал в [10], что такой алгоритм существует при условии, что рассматриваемые элементы порождают всю свободную ассоциативную алгебру.

В данной работе построены алгоритмы определения примитивности системы элементов свободной алгебры Ли и дополнения примитивной системы элементов до свободного порождающего множества свободной алгебры Ли.

Г.П. Кукин в [3] получил следующий критерий того, что элемент свободной алгебры Ли $L(X)$ является примитивным: элемент a примитивен тогда и только тогда, когда фактор-алгебра $L(X)/\mathrm{id}(a)$ является свободной алгеброй Ли, где $\mathrm{id}(a)$ — идеал алгебры $L(X)$, порожденный элементом a. Он также показал, что существует алгоритм, сводящий проблему распознавания примитивности элемента a к проблеме распознавания совместности некоторой системы алгебраических уравнений. Для свободных алгебр Ли матричный критерий распознавания автоморфизмов среди эндоморфизмов (гипотеза о якобиане) был получен У.У. Умирбаевым в [5] (К. Ройтенауер в [20] и В. Шпильрайн в [22] также получили этот результат); для свободных супералгебр Ли это было доказано А.А. Михалевым в [4]. Для свободных ассоциативных алгебр при $n = 2$ см. статьи [14] У. Дикса и Ж. Левина, и при любом n — монографию [21] А. Шоффилда. В статьях [19] и [2] А.А. Золотых

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и INTAS.