О решетке вложения прогрессивных множеств сложности два

П. С. Дергач

В статье приводится результат об описании структуры непосредственного вложения для семейства $\mathbb{P}_2$ прогрессивных множеств сложности не выше 2. Приводится полная неизбыточная классификация ребер структуры. При этом возникают 12 типов классификации, для описания которых водятся понятия согласованности, асинхронности, слабой и сильной синхронности пар арифметических прогрессий в натуральных рядах. Такая постановка задачи является новой и ранее никем не исследовалась.

Ключевые слова: прогрессивное множество, арифметическая прогрессия, структура непосредственного вложения.

Введение

Под прогрессивным множеством в рамках данной работы подразумевается произвольное периодическое подмножество натурального ряда, а под его сложностью — минимальное количество попарно непересекающихся арифметических прогрессий, дающих в объединении это множество. Элементы семейства $\mathbb{P}_2$ состоят из всех таких подмножеств натурального ряда, которые представимы объединением не более чем двух непересекающихся прогрессий. Поскольку прогрессивные множества сложности 1, в свою очередь, могут быть представлены объединением двух непересекающихся арифметических прогрессий, то семейство $\mathbb{P}_2$ можно рассматривать как множество всех подмножеств натуральных чисел, представимых в виде объединения ровно двух непересекающихся арифметических прогрессий. Для семейства $\mathbb{P}_1$ прогрессивных множеств сложности 1 структура вложения строится тривиально. Но уже для $\mathbb{P}_2$

описание соответствующей структуры является нетривиальной задачей. О решении похожих задач можно прочитать в статьях [1-6]. О других интересных аспектах исследований авторов и других ученых в смежных областях к тематике данной работы можно прочитать в [7-18].

Основные определения

Множество натуральных чисел обозначаем через $\mathbb{N}$.

Если два множества A и B попарно не пересекаются, то их объединение обозначаем через $A \sqcup B$. Если далее в тексте встречается это обозначение, то это по умолчанию означает, что множества A и B попарно не пересекаются.

Множество целых неотрицательных чисел обозначаем через $\mathbb{N}_0$.

Пусть $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$. Тогда *обобщенной арифметической прогрессией с началом a и шагом b* называется множество

$$(a, b) := \{a + ib \mid i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Множество всех обобщенных арифметических прогрессий обозначаем через $\mathbb{P}$.

Множество всех обобщенных арифметических прогрессий (a, b), у которых $b \neq 0$, обозначаем через $\mathbb{P}^+$.

Множество всех подмножеств натуральных чисел, представимых в виде объединения ровно двух непересекающихся арифметических прогрессий, обозначаем через $\mathbb{P}_2$. Тогда *структурой вложения G* называем ориентированный граф, вершинами которого являются элементы из $\mathbb{P}_2$, а направленное ребро (P_1, P_2) для пары $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ проводится если и только если выполнены следующие два условия

1) $P_1 \subsetneq P_2$;

2) не существует $P_3 \in \mathbb{P}_2$ такого, что $P_1 \subsetneq P_3 \subsetneq P_2$.

Пусть $(a, b) \in \mathbb{P}^+$. Обозначим через $(a, b)^+$ множество $\{x \in \mathbb{N} \mid b|(x - a)\}$.

Непересекающиеся последовательности $(a, b), (c, d) \in \mathbb{P}^+$ называем *согласованными,* если оба числа b, d четны и

$$(a, b) \cap (c + \frac{d}{2}, d)^+ \neq \emptyset \;\text{ и }\; (c, d) \cap (a + \frac{b}{2}, b)^+ \neq \emptyset.$$

Иначе называем эти последовательности *не согласованными.* Говорим, что согласованные последовательности *асинхронны,* если

$$(a, b) \not\subset (c + \frac{d}{2}, d)^+ \;\text{ и }\; (c, d) \not\subset (a + \frac{b}{2}, b)^+.$$

Если выполнено только одно из этих условий, то называем эти согласованные последовательности *слабо синхронными.* Если же оба условия не выполнены, то такие согласованные последовательности *сильно синхронны.* Для лучшего понимания этих определений приведем примеры. Последовательности $(1,2)$ и $(2,4)$, хоть у них и четные шаги, не согласованные. Последовательности $(3,6)$ и $(6,10)$ асинхронны, $(1,2)$ и $(2,6)$ — слабо синхронны, $(1,2)$ и $(4,2)$ — сильно синхронны.

Говорим, что *множество $P_2 \in \mathbb{P}_2$ получено преобразованием подобия с коэффициентами m,n из множества $P_1 \in \mathbb{P}_2$* и пишем $P_1 \vdash_{m,n} P_2$, если $m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$ и выполнено

$$P_2 = \{nx + m \mid x \in P_1\}.$$

Пусть $k, x \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 6$ — четное число, $3 \leqslant x \leqslant k-3$ — нечетное число. Тогда вводим обозначения:

$$\boldsymbol{A(x,k)} := \{n \in \mathbb{N} \mid \ n - \text{нечетно};\ n > k - x;$$

$$\text{НОД}(n, x-1, k-1) = 1;\ \text{НОД}(n, k-1) \nmid x - 1;$$

$$\forall \text{ собственного делителя } t \text{ числа } n \text{ выполнено}$$

$$t < k - x \text{ или } \text{НОД}(t, k-1) \mid x - 1\};$$

$$\boldsymbol{B(x,k)} := \{n \in \mathbb{N} \mid \ n - \text{нечетно};\ n > k - 1;$$

$$\text{НОД}(n, k-x, k-1) = 1;\ \text{НОД}(n, k-x) \nmid x - 1;$$

$$\forall \text{ собственного делителя } t \text{ числа } n \text{ выполнено}$$

$$t < k - 1 \text{ или } \text{НОД}(t, k-x) \mid x - 1\}.$$

Теорема 1. *Пусть $P_1', P_2' \in \mathbb{P}_2$. Тогда граф G содержит ориентированное ребро (P_2', P_1') если и только если это ребро можно преобразованием подобия привести к одному из ребер (P_2, P_1) следующих 12 типов:*

1) $P_1 = (1,2) \sqcup (2,2)$ *и* **полоса**

a) $P_2 = (1,2) \sqcup (4,2)$,

b) $P_2 = (3,2) \sqcup (2,2)$,

c) $P_2 = (1,2) \sqcup (2,2p)$, p *— простое,*

d) $P_2 = (1,2p) \sqcup (2,2)$, p *— простое,* *e)* $P_2 = (1,p) \sqcup (2,p),\ \ p > 2,\ \ p$ *– простое*;

2) $P_1 = (1,0) \sqcup (3,1)$ *и* **точка и полоса отступа 2**

a) $P_2 = (1,0) \sqcup (4,1)$,

b) $P_2 = (3,0) \sqcup (4,1)$,

c) $P_2 = (1,2) \sqcup (6,1)$,

d) $P_2 = (1,3) \sqcup (3,3)$,

e) $P_2 = (1,2) \sqcup (4,2p), p$ *– простое*;

3) $P_1 = (1,0) \sqcup (k+1,1), k > 2$ *и* **точка и полоса отступа >2**

a) $P_2 = (1,0) \sqcup (k+2,1)$,

b) $P_2 = (k+1,0) \sqcup (k+2,1)$,

c) $P_2 = (1,k) \sqcup (k+x+1,p),\ \ p$ *– простое*, $0 < x < p,\ \ p|k$,

d) $P_2 = (1,pm) \sqcup (k+1,p),\ \ p$ *– простое*, $p \nmid k,\ \ pm \geqslant k$ *и*
для всех $m_1|m$ *из* $m_1 \neq m$ *следует* $pm_1 < k$,

e) $P_2 = (1,0) \sqcup (k+1,p),\ \ p$ *– простое*, $p|k,\ \ k \neq p,\ \ k \neq 2p$;

4) $P_1 = (a,0) \sqcup (b,k), k \nmid (a-b)$ *и* **точка и внешняя полоса**

a) $P_2 = (a,0) \sqcup (b+k,k)$,

b) $P_2 = (b,0) \sqcup (b+k,k)$,

c) $P_2 = (a,0) \sqcup (b,pk),\ \ p$ *– простое*;

5) $P_1 = (a,x) \sqcup (b,y)$,
$(a,x),(b,y)$ *не согласованные и* **две несогласованные полосы**

a) $P_2 = (a+x,x) \sqcup (b,y)$,

b) $P_2 = (a,x) \sqcup (b+y,y)$,

c) $P_2 = (a,px) \sqcup (b,y),\ \ p$ *– простое*,

d) $P_2 = (a,x) \sqcup (b,py),\ \ p$ *– простое*;

6) $P_1 = (a,x) \sqcup (b,y)$,
$(a,x),(b,y)$ *асинхронные и* **две асинхронные полосы**

a) $P_2 = (a+x,x) \sqcup (b,y)$,

b) $P_2 = (a,x) \sqcup (b+y,y)$,

c) $P_2 = (a, px) \sqcup (b, y), \ p - \textit{простое},$

d) $P_2 = (a, x) \sqcup (b, py), \ p - \textit{простое};$

7) $P_1 = (1,2) \sqcup (n+1, 2n),$ $n > 1$ *- нечетно и* **две слабо синхронные полосы, случай 1**

a) $P_2 = (3,2) \sqcup (n+1, 2n),$

b) $P_2 = (1,2) \sqcup (3n+1, 2n),$

c) $P_2 = (1,2p) \sqcup (n+1, 2n), \ p - \textit{простое}, \ p \neq n,$

d) $P_2 = (1,2) \sqcup (n+1, 2np), \ p - \textit{простое},$

e) $P_2 = (1,n) \sqcup (2x+1, 2p), \ p - \textit{простое}, \ 0 < x < p, \ p|n;$

8) $P_1 = (1,2) \sqcup (k, 2n),$ $n > 1$ *- нечетно,* $k \neq n+1$ *- четно и* **две слабо синхронные полосы, случаи 2,3**

a) $P_2 = (3,2) \sqcup (k, 2n),$

b) $P_2 = (1,2) \sqcup (k+2n, 2n),$

c) $P_2 = (1,2p) \sqcup (k, 2n), \ p - \textit{простое}, \ p \nmid n \textit{ или } p \mid k-1,$

d) $P_2 = (1,2) \sqcup (k, 2np), \ p - \textit{простое},$

e) $P_2 = (1,2p) \sqcup (\hat{k}, n), \ p - \textit{простое}, \ p|n, \ p \nmid k-1,$
$\hat{k} = k \textit{ при } k < n+1 \textit{ и } \hat{k} = k - n \textit{ при } k > n+1;$

9) $P_1 = (1,2n) \sqcup (n+1, 2),$ $n > 1$ *- нечетно и* **две слабо синхронные полосы, случай 4**

a) $P_2 = (1+2n, 2n) \sqcup (n+1, 2),$

b) $P_2 = (1,2n) \sqcup (n+3, 2),$

c) $P_2 = (1,2np) \sqcup (n+1, 2), \ p - \textit{простое},$

d) $P_2 = (1,2n) \sqcup (n+1, 2p), \ p - \textit{простое}, \ p \neq n,$

e) $P_2 = (1,n) \sqcup (2x+n+1, 2p), \ p - \textit{простое}, \ 0 < x < p, \ p|n;$

10) $P_1 = (1,2n) \sqcup (k, 2),$ $n > 1$ *- нечетно,* $k < n+1$ *- четно и* **две слабо синхронные полосы, случай 5**

a) $P_2 = (1+2n, 2n) \sqcup (k, 2),$

b) $P_2 = (1,2n) \sqcup (k+2, 2),$

c) $P_2 = (1,2np) \sqcup (k, 2), \ p - \textit{простое},$

d) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k, 2p)$, $p -$ *простое*, $p \nmid n$ *или* $p \mid k-1$,

e) $P_2 = (1, n) \sqcup (k, 2p)$, $p -$ *простое*, $p|n$, $p \nmid k-1$;

11) $P_1 = (1, 2n) \sqcup (k, 2)$, $n > 1$ - *нечетно,* $k > n+1$ - *четно и* **две слабо синхронные полосы, случай 6**

a) $P_2 = (1+2n, 2n) \sqcup (k, 2)$,

b) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k+2, 2)$,

c) $P_2 = (1, 2np) \sqcup (k, 2)$, $p -$ *простое*,

d) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k, 2p)$, $p -$ *простое*;

12) $P_1 = (1, 2) \sqcup (k, 2)$, $k \geqslant 6$ - *четно и* **две сильно синхронные полосы**

a) $P_2 = (3, 2) \sqcup (k, 2)$,

b) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k+2, 2)$,

c) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2)$, $p -$ *простое*, $2p < k-2$,

d) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2p)$, $p -$ *простое*,

e) $P_2 = (1, 0) \sqcup (k-1, 1)$,

f) $P_2 = (1, k-1) \sqcup (x, n)$, $3 \leqslant x \leqslant k-3 -$ *нечетное*, $n \in A(x, k)$,

g) $P_2 = (1, n) \sqcup (x, k-x)$, $3 \leqslant x \leqslant k-3 -$ *нечетное*, $n \in B(x, k)$.

Доказательство утверждений

Лемма 1. Критерий пересечения. *Для любых* $a, c \in \mathbb{N}_0$ *и* $b, d \in \mathbb{N}$ *верно*

$$(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset \Longleftrightarrow a \equiv c \ (mod\ НОД(b, d)).$$

Доказательство леммы см. в [1].

Лемма 2. О подобии. *Пусть* $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}_2$ *и* $P_1 \vdash_{m,n} P_3$, $P_2 \vdash_{m,n} P_4$. *Тогда ребро* (P_1, P_2) *проводится в графе* G *тогда и только тогда, когда ребро* (P_3, P_4) *проводится в графе* G.

Доказательство.

Нам известно, что

$$P_3 = \{nx + m \mid x \in P_1\}, \tag{1}$$

$$P_4 = \{nx + m \mid x \in P_2\}. \tag{2}$$

Пусть ребро (P_1, P_2) проводится в графе G, то есть

1) $P_1 \subsetneq P_2$;

2) не существует $P \in \mathbb{P}_2$ такого, что $P_1 \subsetneq P \subsetneq P_2$.

Из $(1), (2)$ тогда тривиально следует, что $P_3 \subsetneq P_4$. Пусть, тем не менее, существует множество

$$P_5 := (a, b) \sqcup (c, d) \in \mathbb{P}_2, \tag{3}$$

для которого

$$P_3 \subsetneq P_5 \subsetneq P_4. \tag{4}$$

Из $(2), (3)$ и (4) тривиально получаем $(a, b), (c, d) \subset (m, n)$ и значит можно рассмотреть множество

$$P_6 := \left(\frac{a-m}{n}, \frac{b}{n}\right) \sqcup \left(\frac{c-m}{n}, \frac{d}{n}\right). \tag{5}$$

Из $(1), (2), (4)$ и (5) получаем тогда, что $P_1 \subsetneq P_6 \subsetneq P_2$, но этого быть не может. Значит в графе G есть ребро (P_3, P_4).

Обратно утверждение доказывается еще проще. Пусть ребро (P_3, P_4) проводится в графе G, то есть

1) $P_3 \subsetneq P_4$;

2) не существует $P \in \mathbb{P}_2$ такого, что $P_3 \subsetneq P \subsetneq P_4$.

Из $(1), (2)$ тривиально следует, что $P_1 \subsetneq P_2$. Пусть, тем не менее, существует множество

$$P_7 := (a, b) \sqcup (c, d) \in \mathbb{P}_2, \tag{6}$$

для которого
$$P_1 \subsetneq P_7 \subsetneq P_2. \tag{7}$$
Тогда рассмотрим множество
$$P_8 := (an+m, bn) \sqcup (cn+m, dn). \tag{8}$$
Из $(1), (2), (7)$ и (8) получаем $P_3 \subsetneq P_8 \subsetneq P_4$, а этого быть не может. Значит в графе G есть ребро (P_1, P_2).

■

Замечание. Эта лемма позволяет нам при описании ребер графа G вместо ребер произвольного вида исследовать лишь ребра «простого» вида, эквивалентные им с точностью до подобия. Это позволяет заметно упростить производимые выкладки.

Лемма 3. О типах вложения. *Пусть* $(e, f) \subset (a, b) \sqcup (c, d)$, *где* $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$. *Тогда имеет место одно из следующих утверждений:*

- $(e, f) \subset (a, b)$;
- $(e, f) \subset (c, d)$;
- $(e, 2f) \subset (a, b)$ *и* $(e+f, 2f) \subset (c, d)$;
- $(e+f, 2f) \subset (a, b)$ *и* $(e, 2f) \subset (c, d)$.

Доказательство.

Возможны 4 случая:
$$a)e \in (a, b),\ e+f \in (a, b);\quad b)e \in (a, b),\ e+f \in (c, d);$$
$$c)e \in (c, d),\ e+f \in (a, b);\quad d)e \in (c, d),\ e+f \in (c, d).$$
В случае a), очевидно, имеет место первое утверждение.

В случае b) посмотрим на число $e+2f$. Предположим,
$$e+2f \in (c, d).$$
Тогда $e+fb \in (a, b)$ и $e+fb \in (c, d)$. Это противоречит попарному непересечению (a, b) и (c, d). Значит, $e+2f \in (a, b)$, т.е. $(e, 2f) \subset (a, b)$. Посмотрим теперь на число $e+3f$. Допустим, что
$$e+3f \in (a, b).$$

Тогда $e+f+fd \in (a,b)$ и $e+f+fd \in (c,d)$. Это противоречит попарному непересечению (a,b) и (c,d). Значит, $e+3f \in (c,d)$, т.е. $(e+f,2f) \subset (c,d)$. Поэтому верно третье утверждение.

Случаи $c), d)$ реализуют соответственно четвертое и второе утверждения и рассматриваются аналогично.

■

Лемма 4. О зигзаге. *Пусть* $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{N}$ *и*

$$(e,2f) \subset (a,b),\ \ (e+f,2f) \subset (c,d),\ \ (a,b) \cap (c,d) = \emptyset.$$

Тогда числа b,d *четны и*

$$(e,f) \subseteq \left((a,b) \cap (c+\frac{d}{2},d)^+\right) \sqcup \left((c,d) \cap (a+\frac{b}{2},b)^+\right).$$

Доказательство.

Прежде всего заметим, что прогрессии

$$(a,b) \cap (c+\frac{d}{2},d)^+ \text{ и } (c,d) \cap (a+\frac{b}{2},b)^+$$

попарно не пересекаются, так как $(a,b) \cap (c,d) = \emptyset$. Кроме того,

$$2f = bx = dy$$

для некоторых $x,y \in \mathbb{N}$. Допустим, что x четно. Тогда $f = b\frac{x}{2}$ и значит $e+f \in (a,b)$, ведь $e \in (a,b)$. Но это противоречит тому, что

$$(a,b) \cap (c,d) = \emptyset.$$

Значит x нечетно. Аналогично, y нечетно. Поэтому b и d обязательно будут четны. Докажем, что

$$e+2f \in (c+\frac{d}{2},d)^+.$$

В самом деле,

$$e+2f-c-\frac{d}{2} = (e+f-c)+(f-\frac{d}{2}) = (e+f-c)+(\frac{d}{2}y-\frac{d}{2}) =$$
$$= (e+f-c)+\frac{d}{2}(y-1).$$

Первое слагаемое делится на d, так как $e+f \in (c,d)$. Второе слагаемое делится на d, так как y нечетно. Поэтому $e+2f \in (c+\frac{d}{2}, d)^+$. Отсюда и из делимости $2f$ на d получаем

$$(e,2f) \subseteq (a,b) \cap (c+\frac{d}{2}, d)^+.$$

Аналогично доказывается, что

$$(e+f,2f) \subseteq (c,d) \cap (a+\frac{b}{2}, b)^+.$$

Доказательство леммы завершает очевидное равенство

$$(e,f) = (e,2f) \sqcup (e+f,2f).$$

■

Лемма 5. Об общем виде слабой синхронизации. *Пусть есть множества*

$$(a,x),(b,y) \in \mathbb{P}^+$$

и они слабо синхронны. Тогда

$$(a,x) \sqcup (b,y)$$

можно преобразованием подобия перевести в одно из множеств

$$(1,2) \sqcup (k,2n), \quad (1,2n) \sqcup (k,2),$$

где $k,n \in \mathbb{N}$, k *— четно,* $n > 1$ *— нечетно.*

Доказательство.

Слабая синхронность последовательностей $(a,x),(b,y)$ означает, во-первых, что они не пересекаются. Во-вторых, что числа x и y четны. В-третьих, должно быть выполнено

$$(a,x) \cap (b+\frac{y}{2}, y)^+ \neq \emptyset \ \text{ и } \ (b,y) \cap (a+\frac{x}{2}, x)^+ \neq \emptyset.$$

В-четвертых, одно из условий

$$(a,x) \not\subset (b+\frac{y}{2}, y)^+ \ \text{ и } \ (b,y) \not\subset (a+\frac{x}{2}, x)^+$$

верно, а второе — нет. Пусть, без ограничения общности,

$$(a,x) \not\subset (b+\frac{y}{2}, y)^+ \ \text{ и } \ (b,y) \subset (a+\frac{x}{2}, x)^+.$$

Отсюда следует, что b представимо в виде $a + \frac{x}{2} + mx$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. И что y кратно x, т.е. $y = cx$ для некоторого $c \in \mathbb{N}$. Покажем, что c нечетно. Пусть это не так и $c = 2l, l \in \mathbb{N}$. Тогда

$$(a, x) \cap (b + \frac{y}{2}, y)^+ = (a, x) \cap (a + \frac{x}{2} + mx + lx, cx) = \emptyset,$$

а этого быть не может. Далее, c не может быть равно 1, так как в этом случае получили бы

$$(b + \frac{y}{2}, y)^+ = (a + \frac{x}{2} + mx + \frac{x}{2}, x)^+ = (a + x + mx, x)^+ \supset (a, x).$$

Значит

$$(a, x) \sqcup (b, y) = (a, x) \sqcup (a + \frac{x}{2} + mx, cx) \qquad (*).$$

Если $m \geqslant 0$, то параллельным переносом сдвигаем множество $(*)$ в

$$(\frac{x}{2}, x) \sqcup (x + mx, cx).$$

Осталось только сжать конструкцию в $\frac{x}{2}$ раз и получить $(1, 2) \sqcup (2 + 2m, 2c)$. Если же $m < 0$, то параллельным переносом нужно сдвинуть множество $(*)$ в

$$(-mx, x) \sqcup (\frac{x}{2}, cx).$$

Теперь сжимаем конструкцию в $\frac{x}{2}$ раз и получаем $(1, 2c) \sqcup (-2m, 2)$.

$\blacksquare$

Лемма 6. Об общем виде сильной синхронизации. *Пусть есть множества*

$$(a, x), (b, y) \in \mathbb{P}^+$$

и они сильно синхронны. Тогда

$$(a, x) \sqcup (b, y)$$

можно преобразованием подобия перевести в множество вида

$$(1, 2) \sqcup (k, 2),$$

где $k \in \mathbb{N}$ и k — четно.

Доказательство.

Сильная синхронность последовательностей $(a,x),(b,y)$ означает, во-первых, что они не пересекаются. Во-вторых, что числа x и y четны. В-третьих, должно быть выполнено

$$(a,x)\subset(b+\frac{y}{2},y)^{+}\ \text{ и }\ (b,y)\subset(a+\frac{x}{2},x)^{+}.$$

Тогда y кратно x и x кратно y, т.е. $y=x$. Кроме того, b представимо в виде $a+\frac{x}{2}+mx$ для некоторого $m\in\mathbb{Z}$. Если $m\geqslant 0$, то параллельным переносом сдвигаем множество

$$(a,x)\sqcup(b,y)=(a,x)\sqcup(a+\frac{x}{2}+mx,x) \qquad (**)$$

в

$$(\frac{x}{2},x)\sqcup(x+mx,x)$$

и, сжимая конструкцию в $\frac{x}{2}$ раз, окончательно получаем $(1,2)\sqcup(2+2m,2)$. Если же $m<0$, то параллельным переносом нужно сдвинуть множество $(**)$ в

$$(-mx,x)\sqcup(\frac{x}{2},x)$$

и, сжав конструкцию в $\frac{x}{2}$ раз, получить $(1,2)\sqcup(-2m,2)$.

$\blacksquare$

Лемма 7. О полосе. *Пусть* $P_1,P_2\in\mathbb{P}_2$ *и* $P_1=\mathbb{N}=(1,2)\sqcup(2,2)$. *Тогда ребро от* P_2 *к* P_1 *в графе* G *проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $P_2=(1,2)\sqcup(4,2)$;

2) $P_2=(3,2)\sqcup(2,2)$;

3) $P_2=(1,2)\sqcup(2,2p)$, p *– простое*;

4) $P_2=(1,2p)\sqcup(2,2)$, p *– простое*;

5) $P_2=(1,p)\sqcup(2,p)$, $p>2$, p *– простое.*

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребрами с множествами

$$X:=(1,2)\sqcup(4,2)\ \text{и}\ Y:=(3,2)\sqcup(2,2),$$

потому что они получаются из P_1 удалением одного элемента. Эти ребра дают нам **кандидатов (1)** и **(2)**. Допустим теперь, что в G есть ребро от P_1 к

$$P_2 = (c, x) \sqcup (d, y)$$

и $P_2 \neq X, Y$. Тогда обязательно $c = 1$, $d = 2$ или $c = 2$, $d = 1$, так как иначе между P_1 и P_2 обязательно находилось бы одно из множеств X, Y. Очевидно, что $x > 0$ и $y > 0$ (иначе между P_1 и P_2 можно было бы вставить $(c, 2y) \sqcup (d, y)$ или $(c, x) \sqcup (d, 2x)$). Обозначим через z наибольший общий делитель чисел x и y. Из леммы 1 и попарного непересечения прогрессий (c, x) и (d, y) следует, что $z > 1$. Пусть

$$x := zx_1, \quad y := zy_2.$$

Разберем **два случая:** $z = 2$ и $z > 2$. **В первом случае**, - когда $z = 2$, обязательно выполнено $x_1 > 1$ или $y_1 > 1$, иначе $P_1 = P_2$. Допустим, что $x_1 > 1$. Тогда

$$P_2 \subset (1, 2x_1) \sqcup (2, 2) \subsetneq P_1.$$

Значит $P_2 = (1, 2x_1) \sqcup (2, 2)$, т.е. $y_1 = 1$. Также очевидно, что x_1 - простое число, так как иначе для любого собственного делителя $x_2 > 1$ числа x_1 имели бы

$$P_2 \subsetneq (1, 2x_2) \sqcup (2, 2) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (4)**. Если же $y_1 > 1$, то аналогично получаем **кандидата (3)**. **Во втором случае**, - когда $z > 2$, получаем

$$P_2 = (1, zx_1) \sqcup (2, zy_1) \subset (1, z) \sqcup (2, z) \subsetneq P_1.$$

Значит $x_1 = y_1 = 1$. Осталось заметить, что z - простое число, так как иначе для любого собственного делителя $z_1 > 1$ числа z имели бы

$$P_2 \subsetneq (1, z_1) \sqcup (2, z_1) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (5)**.

Осталось проверить, что все P_2 из **серий (1 − 5)** попарно невложимы друг в друга. Для **серий (1 − 2)** это очевидно. Так как в P_2 из **серий (3 − 5)** есть числа 1 и 2, то они не вкладываются в P_2 из **серии (1 − 2)**. Далее, **серия (3)** не вкладывается **в серию (4)**, так как в первой есть 3, а во второй нет. Аналогично, из-за числа 4 **серия (4)** не вкладывается в **серию (3)**. **Серия (3)** не вкладывается в **серию (5)** из-за числа 3. Аналогично, **серия (5)** не вкладывается в **серию (3)** из-за числа $1 + p$.

Серия (4) не вкладывается в **серию (5)**, так как в первой есть 4 и 6, а во второй хотя бы одного из этих чисел нет. **Серия (5)** не вкладывается в **серию (4)**, так как в первой, в отличие от второй, есть $2+p$. Разные P_2 из **серии (3)** не вкладываются друг в друга, так как иначе

$$(1,2) \sqcup (2,2p_1) \subset (1,2) \sqcup (2,2p_2),$$

т.е. p_1 делится на p_2 и, из их простоты, $p_1 = p_2$. Точно так же показывается попарная невложимость P_2 из **серий (4 − 5)**.

■

Лемма 8. О точке и полосе отступа 2. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ *и* $P_1 = (1,0) \sqcup (3,1)$. *Тогда ребро от* P_2 *к* P_1 *в графе* G *проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $P_2 = (1,0) \sqcup (4,1)$;

2) $P_2 = (3,0) \sqcup (4,1)$;

3) $P_2 = (1,2) \sqcup (6,1)$;

4) $P_2 = (1,3) \sqcup (3,3)$;

5) $P_2 = (1,2) \sqcup (4,2p)$, p *− простое.*

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (1,0) \sqcup (4,1),\ Y := (3,0) \sqcup (4,1),\ Z := (1,2) \sqcup (6,1),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 − 3)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_2 \to P_1$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c,d) \sqcup (e,f).$$

Так как в G есть ребра из **серий (1 − 3)**, то $1,3,4 \in P_2$. **Возможны два случая. В первом из них** $c = 1$ и $d = 2$. Тогда обязательно $e = 4$. Ясно, что $f \neq 0$, так как, например, верно

$$P_2 = (1,2) \sqcup (4,0) \subsetneq (1,2) \sqcup (4,4) \subsetneq P_1.$$

Ясно, что f делится на 2, так как прогрессии $(1,2)$ и $(4,f)$ не пересекаются. Обозначим через p произвольный простой делитель числа $\frac{f}{2}$. Так как

$$P_2 = (1,2) \sqcup (4,f) \subset (1,2) \sqcup (4,2p) \subsetneq P_1,$$

то $f = 2p$ для некоторого простого числа p. Получили **кандидата (5)**. Рассмотрим теперь **второй возможный случай,** в котором $c = 1$ и $d = 3$. Тогда обязательно $e = 3$. Ясно, что $f \neq 0$, так как, например, верно

$$P_2 = (1,3) \sqcup (3,0) \subsetneq (1,3) \sqcup (3,3) \subsetneq P_1.$$

Ясно, что f делится нацело на 3, так как прогрессии $(1,3)$ и $(3,f)$ не пересекаются. Тогда

$$P_2 = (1,3) \sqcup (3,f) \subset (1,3) \sqcup (3,3) \subsetneq P_1.$$

Значит $f = 3$. Получили **кандидата (4)**.

Осталось проверить, что все P_2 из $\mathbf{(1-5)}$ попарно невложимы друг в друга. Для $\mathbf{(1-3)}$ это очевидно. Так как в P_2 из $\mathbf{(4-5)}$ есть числа $1, 3$ и 4, то они не вкладываются в P_2 из $\mathbf{(1-3)}$. **Представитель (4)** не вкладывается в **представителя (5)**, так как иначе

$$(1,3) \sqcup (3,3) \subset (1,2) \sqcup (4,2p),$$

чего быть не может из-за числа 6. **Представитель (5)** не вкладывается в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1,2) \sqcup (4,2p) \subset (1,3) \sqcup (3,3),$$

чего быть не может из-за числа 5. Наконец, **представитель (5)** не вкладывается в другого **представителя (5)**, так как иначе было бы

$$(1,2) \sqcup (4,2p_1) \subset (1,2) \sqcup (4,2p_2),$$

что, в силу простоты и различия чисел p_1 и p_2, невозможно.

■

Лемма 9. О точке и полосе отступа больше 2. *Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ и*

$$P_1 = (1,0) \sqcup (k+1,1), \;\; k > 2.$$

Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1) $P_2 = (1,0) \sqcup (k+2,1)$;

2) $P_2 = (k+1,0) \sqcup (k+2,1)$;

3) $P_2 = (1,k) \sqcup (k+x+1,p)$, *$p$ – простое*, $0 < x < p$, $p|k$;

4) $P_2 = (1,pm) \sqcup (k+1,p)$, *$p$ – простое*, $p \nmid k$, $pm \geqslant k$ *и для всех* $m_1|m$ *из* $m_1 \neq m$ *следует* $pm_1 < k$;

5) $P_2 = (1,0) \sqcup (k+1,p)$, *$p$ – простое*, $p|k$, $k \neq p$, $k \neq 2p$.

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (1,0) \sqcup (k+2,1),\ Y := (k+1,0) \sqcup (k+2,1),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 − 2)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_2 \to P_1$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c,d) \sqcup (e,f).$$

Так как в G есть ребра типов $(1-2)$, то $1, k+1 \in P_2$. **Разбираем случаи. В первом из них** $d = f = 0$. Тогда

$$P_2 \subsetneq (1,0) \sqcup (k+1,2) \subsetneq P_1,$$

чего быть не может. **Во втором случае** одно из чисел d, f равно 0, а второе - не равно. Без ограничения общности, $d = 0, f > 0$. Здесь возникает **пара вариантов. В первом из них** $c = 1$ и $e = k+1$, т.е.

$$P_2 = (1,0) \sqcup (k+1,f).$$

Здесь число f будет простым, так как в противном случае

$$P_2 \subsetneq (1,0) \sqcup (k+1,f_1) \subsetneq P_1$$

для любого собственного делителя f_1 числа f. Значит $f = p$. Покажем, что $k \neq p$ и $k \neq 2p$. Первое верно, так как при $p = k > 2$ получаем

$$P_2 = (1,0) \sqcup (p+1,p) \subsetneq (1,p) \sqcup (p+2,p).$$

Второе верно, так как при $k = 2p$ мы имели бы

$$P_2 = (1,0) \sqcup (2p+1,p) = (1,2p) \sqcup (3p+1,2p),$$

а этот **кандидат** уже учтен в **серии (3)**. Теперь это уже точно **кандидат** из **серии (5)**. **Второй вариант** $c = k+1$ и $e = 1$, когда

$$P_2 = (k+1, 0) \sqcup (1, f),$$

невозможен, так как

$$P_2 \subsetneq (k+1, 2f) \sqcup (1, f) \subsetneq P_1.$$

В третьем случае $d > 0, f > 0$ снова возможны **два варианта:** или $c = 1, d = k$, или $c = 1, e = k+1$. **В первом из них**

$$P_2 = (1, k) \sqcup (e, f).$$

Из попарного непересечения $(1, k)$ и (e, f) и из леммы 1 следует, что $e-1$ не делится на НОД(f, k), т.е. у чисел f и k существует некоторый общий простой делитель p, не делящий $e-1$. Но тогда

$$P_2 \subseteq (1, k) \sqcup (e, p) \subsetneq P_1.$$

По лемме 1 прогрессии здесь не пересекаются, так как НОД$(k, p) = p$ и $e-1$ не делится на p. И $(1, k) \sqcup (e, p) \subsetneq P_1$, так как $k > 2$. Значит

$$P_2 = (1, k) \sqcup (e, p)$$

и $e-1$ не делится на p, т.е. e представимо в виде $k+x+1$, где x не делится на p. Но $x < p$, так как иначе

$$P_2 \subsetneq (1, k) \sqcup (e-p, p) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (3)**. **Разбираем теперь второй вариант,** где $c = 1, e = k+1$, т.е.

$$P_2 = (1, d) \sqcup (k+1, f).$$

Из попарного непересечения этих прогрессий и леммы 1 следует, что k не делится на НОД(d, f), т.е. у чисел d и f существует некоторый общий простой делитель p, не делящий k. Но тогда

$$P_2 \subseteq (1, d) \sqcup (k+1, p) \subsetneq P_1.$$

По лемме 1 прогрессии здесь не пересекаются, так как НОД$(d, p) = p$ и k не делится на p. Кроме того,

$$(1, d) \sqcup (k+1, p) \subsetneq P_1,$$

так как $d > k > 2$. Значит

$$P_2 = (1, pm) \sqcup (k+1, p).$$

Очевидно, $pm \geqslant k$. Осталось заметить, что ни для какого собственного делителя m_1 числа m не может быть выполнено $pm_1 \geqslant k$, ведь иначе было бы

$$P_2 \subsetneq (1, pm_1) \sqcup (k+1, p) \subsetneq P_1.$$

Поучили **кандидата (4)**.

Проверим теперь, что все P_2 из **серий (1 − 5)** попарно невложимы друг в друга. Очевидно, для **(1 − 2)** это верно. Так как в P_2 из **серий (3 − 5)** есть числа 1 и $k+1$, то они не вкладываются в P_2 из **серий (1 − 2)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в другого **представителя (3)**, так как иначе было бы

$$(1, k) \sqcup (k + x_1 + 1, p_1) \subset (1, k) \sqcup (k + x_2 + 1, p_2).$$

Тогда p_1 делилось бы нацело на p_2, т.е., из простоты p_1 и p_2, $p_1 = p_2$. В свою очередь, $x_1 - x_2$ делилось бы нацело на $p_1 = p_2$, чего не может быть в силу ограничений

$$0 < x_1, x_2 < p_1 = p_2.$$

Представитель (3) не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, k) \sqcup (k + x + 1, p_1) \subset (1, p_2 m) \sqcup (k+1, p_2).$$

Здесь k делится на p_1 и не делится на p_2. Значит $p_1 \neq p_2$. Так как прогрессии $(1, k)$ и $(k+1, p_2)$ пересекаются в точке $k+1$, то тогда по лемме 3 число $2k$ делилось бы нацело на p_2. Но k не делится на p_2, поэтому обязательно было бы $p_2 = 2$. Получаем

$$(1, k) \sqcup (k + x + 1, p_1) \subsetneq (1, 2m) \sqcup (k+1, 2).$$

Так как $p_1 \neq p_2 = 2$, то $p_1 > 2$ и $(k + x + 1, p_1) \not\subset (k+1, 2)$. Значит по лемме 3 число $2p_1$ делится на $2m$. Но $2m > k > 2$, т.е. $m \neq 1$. Значит $m = p_1$. Но k делится на p_1 и значит числа из $(k + x + 1, p_1)$ несравнимы по модулю p_1 с числами из $(1, 2m)$. Получили противоречие с условием

$$(k + x + 1, p_1) \subset (1, 2m) \sqcup (k+1, 2).$$

Представитель (3) не может вкладываться в **представителя (5)**, так как иначе было бы

$$(1,k)\sqcup(k+x+1,p_1)\subset(k+1,p_2)\sqcup(1,0).$$

Тогда p_1 делится на p_2, т.е., из простоты p_1 и p_2, $p_1=p_2$. Но это означает, что числа из прогрессий $(k+x+1,p_1)$ и $(k+1,p_2)$ дают разные остатки по модулю $p_1=p_2$, чего быть не может. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как иначе было бы

$$(1,p_2m)\sqcup(k+1,p_2)\subset(1,k)\sqcup(k+x+1,p_1).$$

Так как прогрессии $(k+1,p_2)$ и $(1,k)$ пересекаются в точке $k+1$, то по лемме 3 тогда получили бы, что $2p_2$ делится нацело на k, чего быть не может, ведь k не делится на p_2 и $k>2$. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1,p_1m_1)\sqcup(k+1,p_1)\subset(1,p_2m_2)\sqcup(k+1,p_2).$$

Ясно, что прогрессии $(k+1,p_1)$ и $(k+1,p_2)$ пересекаются в точке $k+1$, то есть по лемме 3 число $2p_1$ делится на p_2. Если бы p_2 было равно 2, то по лемме 3 получилось бы, что число $2p_1$ делится на $2m_2$. Но $2m_2>k>2$, т.е. $m_2>1$ и $m_2=p_1$. А это противоречит тому, что

$$1+k+p_1\in(1,p_2m_2)=(1,2m_2)=(1,2p_1),$$

ведь k не делится на p_1. Значит $p_1=p_2$. Но тогда элементы множеств $(1,p_1m_1)$ и $(k+1,p_2)$ дают разные остатки по модулю p_1. Значит

$$(1,p_1m_1)\subset(1,p_2m_2)=(1,p_1m_2),$$

т.е. m_2 является собственным делителем m_1, что, в силу наложенных на (d) ограничений, невозможно. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как иначе имели бы

$$(1,p_1m)\sqcup(k+1,p_1)\subset(k+1,p_2)\sqcup(1,0)$$

и p_1m делилось бы на на p_2, т.е., из простоты p_1 и p_2, получаем $p_1=p_2$. А это невозможно, ведь k не делится на p_1 и элементы из $(1,p_1m)$ и $(k+1,p_2)=(k+1,p_1)$ дают разные остатки по модулю p_1, т.е. множества не пересекаются. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как иначе имели бы

$$(1,0)\sqcup(k+1,p_1)\subset(1,k)\sqcup(k+x+1,p_2).$$

Прогрессии $(k+1, p_1)$ и $(1, k)$ пересекаются в точке $k+1$ и тогда по лемме 3 число $2p_1$ делилось бы нацело на k, но этого быть не может, ведь $k \neq p_1$ и $k \neq 2p_1$. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе имели бы

$$(1, 0) \sqcup (k+1, p_1) \subset (k+1, p_2) \sqcup (1, p_2 m).$$

Прогрессии $(k+1, p_1)$ и $(k+1, p_2)$ пересекаются в точке $k+1$ и по лемме 3 число $2p_1$ делится нацело на p_2. Но k делится на p_1 и не делится на p_2, т.е. $p_1 \neq p_2$ и поэтому $p_2 = 2$. Тогда

$$(k+1+p_1, 2p_1) \subset (1, 2m)$$

и поэтому $m = p_1$. Но, в силу ограничений на (e), это невозможно, ведь $2p_1 = p_2 m \geqslant k$. Наконец, **представитель (5)** не может вкладываться в другого **представителя (5)**, так как иначе имели бы

$$(a, 0) \sqcup (a+kb, p_1 b) \subset (a, 0) \sqcup (a+kb, p_2 b),$$

т.е., в силу простоты p_1 и p_2, $p_1 = p_2$, чего быть не может.

$\blacksquare$

Лемма 10. О точке и внешней полосе. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ *и*

$$P_1 = (a, 0) \sqcup (b, k), \ \ k \nmid (a-b).$$

Тогда ребро от P_2 *к* P_1 *в графе* G *проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $P_2 = (a, 0) \sqcup (b+k, k)$;

2) $P_2 = (b, 0) \sqcup (b+k, k)$;

3) $P_2 = (a, 0) \sqcup (b, pk), \ p$ *— простое.*

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (a, 0) \sqcup (b+k, k), \ \ Y := (b, 0) \sqcup (b, k),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 − 2)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_2 \to P_1$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Ясно, что $a, b \in P_2$. Пусть, без ограничения общности, $a \in (c, d)$. И пусть для некоторого $x \in (b, k)$ верно $x \in (c, d)$. Но тогда (c, d) лежит в (b, k) и значит d делится нацело на k. С другой стороны, $a, x \in (c, d)$, т.е. $x - a$ делится нацело на d, а значит и на k. Но $x \in (b, k)$ и из-за этого по модулю k дает такой же остаток, как и b. Поэтому $b - a$ тоже делится на k, что неверно. Итак, в последовательности (c, d) нет других элементов кроме a, т.е. $c = a$, $d = 0$. Значит $b \in (e, f)$, поэтому $e = b$. При этом, $f \neq 0$, так как иначе

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, 0) \subsetneq (a, 0) \sqcup (b, 2k) \subsetneq P_1.$$

Ясно, что f делится нацело на k, то есть $f = kf_1$. Рассмотрим произвольный простой делитель p числа f_1. Так как выполнено

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, kf_1) \subseteq (a, 0) \sqcup (b, kp) \subsetneq P_1,$$

то $f_1 = p$. Получили **кандидата (3)**.

Осталось проверить, что все P_2 из **серий (1 − 3)** попарно невложимы друг в друга. Для **серий (1 − 2)** это очевидно. Так как в P_2 из **серии (3)** есть числа a и b, то они не вкладываются в P_2 из **серий (1 − 2)**. А **представитель (3)** не может вкладываться в другого **представителя (3)**, так как иначе мы получили бы

$$(a, 0) \sqcup (b, p_1 k) \subset (a, 0) \sqcup (b, p_2 k),$$

т.е., из простоты p_1 и p_2, $p_1 = p_2$, что невозможно.

∎

Лемма 11. О двух несогласованных полосах. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (a, x) \sqcup (b, y)$$

и последовательности $(a, x), (b, y)$ *не согласованные. Тогда ребро от* P_2 *к* P_1 *в графе* G *проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $P_2 = (a+x, x) \sqcup (b, y)$;

2) $P_2 = (a, x) \sqcup (b+y, y)$;

3) $P_2 = (a, px) \sqcup (b, y)$, p *– простое*;

4) $P_2 = (a, x) \sqcup (b, py)$, p *– простое.*

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (a, x) \sqcup (b+y, y), Y := (a+x, x) \sqcup (b, y),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 − 2)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_1 \to P_2$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Очевидно, $a, b \in P_2$. Из леммы 4 следует, что (c, d) или целиком лежит в (a, x) или целиком лежит в (b, y). То же самое можно сказать и про (e, f). Тогда, без ограничения общности, $c = a$, $e = b$. При этом, $d \neq 0$, так как иначе выполнено

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, f) \subsetneq (a, 2x) \sqcup (b, f) \subsetneq P_1.$$

Аналогично, $f \neq 0$. Очевидно, что d делится нацело на x, т.е. $d = xd_1$. Аналогично, $f = yf_1$. Так как $P_2 \neq P_1$, то обязательно или $d_1 > 1$, или $f_1 > 1$. Пусть, без ограничения общности, это выполнено для d_1. Обозначим через p произвольный простой делитель числа d_1. Так как выполнено

$$P_2 = (a, xd_1) \sqcup (b, yf_1) \subseteq (a, xp) \sqcup (b, y) \subsetneq P_1,$$

то получили **кандидата (3)**. А если $d_1 = 1$ и f_1 — простое число, то получаем **кандидата (4)**.

Осталось проверить, что все P_2 из **серий (1 − 4)** попарно невложимы друг в друга. Для **серий (1 − 2)** это очевидно. Так как в P_2 из **серий (3 − 4)** есть числа a и b, то они не вкладываются в P_2 из **серий (1 − 2)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в другого **представителя (3)**, так как иначе мы получили бы

$$(a, p_1x) \sqcup (b, y) \subset (a, p_2x) \sqcup (b, y),$$

т.е., из простоты p_1 и p_2, $p_1 = p_2$, а это невозможно. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в другого **представителя (4)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(a, p_1x) \sqcup (b, y) \subset (a, x) \sqcup (b, p_2y),$$

а это невозможно, так как в левой части есть число $b+y$, а в правой части его нет. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (3)**.

■

Лемма 12. О двух асинхронных полосах. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (a, x) \sqcup (b, y)$$

и последовательности $(a, x), (b, y)$ *асинхронные. Тогда ребро от* P_2 *к* P_1 *в графе* G *проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $P_2 = (a + x, x) \sqcup (b, y)$;

2) $P_2 = (a, x) \sqcup (b + y, y)$;

3) $P_2 = (a, px) \sqcup (b, y),\ p -$ *простое*;

4) $P_2 = (a, x) \sqcup (b, py),\ p -$ *простое.*

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (a, x) \sqcup (b + y, y), Y := (a + x, x) \sqcup (b, y),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 − 2)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_2 \to P_1$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Ясно, что $a, b \in P_2$. Дальше возможны **варианты. В первом из них** $d = 0, f = 0$. Тогда

$$\{c, e\} = \{a, b\},$$

а этого быть не может, так как иначе

$$P_2 = (a,0) \sqcup (b,0) \subsetneq (a,x) \sqcup (b,0) \subsetneq P_1.$$

Во втором варианте $d = 0, f \neq 0$. Тогда $c = a$, $e = b$. И здесь, по лемме 3, возможны **два случая** — $(b,f) \subset (b,y)$ или же $(b,2f) \subset (b,y)$, $(b+f,2f) \subset (a,x)$. **Первый случай** невозможен, так как

$$P_2 = (a,0) \sqcup (b,f) \subsetneq (a,2x) \sqcup (b,f) \subsetneq P_1.$$

Второй случай невозможен, так как

$$P_2 = (a,0) \sqcup (b,f) \subsetneq (a,x) \cup (b,f) = (a,x) \sqcup (b,2f) \subsetneq P_1;$$

здесь левая часть вложения строгая, так как иначе по лемме 4 для зигзага получили бы

$$(a+x,x) = (b+f,2f), \quad \text{т.е. по лемме 4} \quad (a,x) \subset (b+\frac{y}{2},y)^+;$$

аналогично доказывается и строгость правой части вложения. **Третий вариант** $d \neq 0, f = 0$, разбирается точно так же. Разберем теперь **четвертый вариант,** когда $d \neq 0, f \neq 0$. Здесь возможны **три исхода. В первом** из них

$$(c,d) \subset (a,x), \quad (e,f) \subset (b,y),$$

т.е. (c,d) и (e,f) - полосы. Тогда

$$c = a, \quad e = b, \quad d = xd_1, \quad f = yf_1.$$

Так как $P_2 \neq P_1$, то обязательно $d_1 > 1$ или $f_1 > 1$. Пусть $d_1 > 1$. Обозначим через p произвольный простой делитель числа d_1. Тогда

$$P_2 = (a,xd_1) \sqcup (b,yf_1) \subseteq (a,xp) \sqcup (b,y) \subsetneq P_1,$$

т.е. $d_1 = p$ и $f_1 = 1$. Также мог произойти аналогичный случай, когда $d_1 = 1$ и f_1 - простое число. Получили **кандидатов (3 − 4)**. **Во втором исходе**

$$(c,d) \subset (a,x), \quad (e,f) \not\subset (b,y).$$

Ясно, что $(e,f) \cap (b,y) \neq \emptyset$, так как в противном случае было бы

$$P_2 = (c,d) \sqcup (e,f) \subsetneq (a,x) \sqcup (b,0) \subsetneq P_1.$$

Поэтому (c,d) - полоса, а (e,f) - зигзаг. Значит

$$P_2 = (c,d) \sqcup (e,f) \subset (a,x) \sqcup ((e,f) \cap (b,y)) \subsetneq P_1;$$

здесь правая часть вложения строгая, иначе получили бы

$$(b,y) \subset (e,f), \quad \text{т.е. по лемме 4} \quad (b,y) \subset (a + \frac{x}{2}, x)^+.$$

Поэтому все такие P_2 были уже получены нами в **первом исходе.** Наконец, в **третьем исходе**

$$(c,d) \not\subset (b,y), \quad (e,f) \not\subset (b,y).$$

Тогда из лемм 3 и 4 заключаем:

$$P_2 = (c,d) \sqcup (e,f) \subset ((a,x) \cap (b + \frac{y}{2}, y)^+) \sqcup ((b,y) \cap (a + \frac{x}{2}, x)^+) \subsetneq P_1.$$

Значит P_2 равно $((a,x) \cap (b + \frac{y}{2}, y)^+) \sqcup ((b,y) \cap (a + \frac{x}{2}, x)^+)$, т.е. оно уже было учтено нами в **первом исходе.**

Проверка попарной невложимости **кандидатов $(1-4)$** друг в друга полностью повторяет аналогичные рассуждения из леммы 11.

■

Лемма 13. О слабой синхронизации первого типа. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1,2) \sqcup (n+1, 2n),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ *и* n *нечетно. Тогда ребро от* P_2 *к* P_1 *в графе* G *проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $P_2 = (3,2) \sqcup (n+1, 2n)$;

2) $P_2 = (1,2) \sqcup (3n+1, 2n)$;

3) $P_2 = (1,2p) \sqcup (n+1, 2n)$, p *– простое,* $p \neq n$;

4) $P_2 = (1,2) \sqcup (n+1, 2np)$, p *– простое*;

5) $P_2 = (1,n) \sqcup (2x+1, 2p)$, p *– простое,* $0 < x < p$, $p | n$.

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (3,2) \sqcup (n+1, 2n), Y := (1,2) \sqcup (3n+1, 2n),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 − 2)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_2 \to P_1$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c,d) \sqcup (e,f).$$

Ясно, что $1, n+1 \in P_2$. Дальше возможны **варианты. В первом из них** $d = 0, f = 0$. Тогда $c = 1$, $e = n+1$, а этого быть не может, так как иначе

$$P_2 = (1,0) \sqcup (n+1, 0) \subsetneq (1,2) \sqcup (n+1, 0) \subsetneq P_1.$$

Во втором варианте $d = 0, f \neq 0$ или $d \neq 0, f = 0$. Без ограничения общности, считаем, что $d = 0, f \neq 0$. Здесь нужно рассмотреть **три случая.** В **первом** из них $1, n+1 \in (e,f)$. Это возможно только если $e = 1, f = n$. Но тогда $c \in (1,2)$ и

$$P_2 = (c,0) \sqcup (1,n) \subsetneq (c, 2n) \sqcup (1,n) \subsetneq P_1,$$

а этого быть не может. Правая часть вложения здесь строгая, так как в $(c,2n) \sqcup (1,n)$ при нечетных $n > 1$ не могут одновременно лежать числа 3 и 5. **Во втором случае** $1 \in (c,0)$, $n+1 \in (e,f)$. Это возможно только если $c = 1, e = n+1$. Но тогда f обязательно кратно n и

$$P_2 = (1,0) \sqcup (n+1, f) \subsetneq (1,n) \sqcup (3,0) \subsetneq P_1,$$

что невозможно. **В третьем случае** $n+1 \in (c,0)$, $1 \in (e,f)$. Это возможно только когда выполнено $c = n+1, e = 1$. Но тогда f обязательно кратно n, ведь иначе f было бы четно и

$$P_2 = (n+1, 0) \sqcup (1, f) \subsetneq (1,2) \sqcup (n+1, 4n) \subsetneq P_1,$$

чего быть не может. А если f кратно n, то

$$P_2 = (n+1, 0) \sqcup (1, f) \subsetneq (1,n) \sqcup (3,0) \subsetneq P_1,$$

и это снова невозможно. Наконец, **в третьем варианте** $d \neq 0, f \neq 0$. И здесь тоже возникают **два исхода. В первом из них** одно из чисел $1, n+1$ лежит в (c,d), а второе - в (e,f). Пусть, без ограничения общности,

$$1 \in (c,d), \quad n+1 \in (e,f).$$

Тогда $c = 1,\ e = n + 1$ и f кратно n. Если $d = 2$, то f кратно $2n$, т.е. $f = 2nx$, причем $x > 1$. Тогда для любого простого делителя p числа x имеем
$$P_2 = (1, 2) \sqcup (n + 1, 2nx) \subset (1, 2) \sqcup (n + 1, 2np) \subsetneq P_1.$$
Получили **кандидата (4)**. Если d нечетно, то оно обязательно кратно n и
$$P_2 = (1, d) \sqcup (n + 1, f) \subsetneq (1, n) \sqcup (3, 0) \subsetneq P_1,$$
что невозможно. Пусть теперь d четно, т.е. $d = 2d_1$ и $d_1 > 1$. Тогда
$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (n + 1, f).$$
Здесь возможны **три подслучая. В одном из них** $f = n$. Тогда НОД$(2d_1, f)$ будет делителем числа n и по лемме 1 прогрессии $(1, 2d_1)$, $(n + 1, f)$ пересекаются. **Во втором подслучае** $f = 2n$. Тогда для любого простого делителя p числа d_1 имеем
$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (n + 1, 2n) \subset (1, 2p) \sqcup (n + 1, 2n) \subsetneq P_1.$$
Значит $d_1 = p$. И $p \neq n$, так как иначе
$$P_2 = (1, 2n) \sqcup (n + 1, 2n) \subsetneq (1, n) \sqcup (3, 0) \subsetneq P_1.$$
Получили **кандидата (3)**. **В третьем подслучае** $f > 2n$. Тогда
$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (n + 1, f) \subset (1, 2) \sqcup ((n + 1, f) \cap (n + 1, 2n)) \subsetneq P_1,$$
т.е. такое P_2 или вовсе не соединено ребром с P_1, или совпадает с одним из **кандидатов (4)**. **Во втором исходе** числа $1, n + 1$ одновременно лежат в одной из прогрессий (c, d), (e, f). Без ограничения общности, это (c, d). Это означает, что $c = 1$, $d = n$, т.е.
$$P_2 = (1, n) \sqcup (e, f).$$
Здесь $e - 1$ четно и не кратно n, f четно. Пусть $e = 1 + 2x$. Из леммы 1 следует, что у n и f есть простой общий делитель p, которому не кратно $2x$. Так как n четно, то $p \neq 2$ и x не кратно p. В частности, $x \neq 0$, $x \neq p$. Тогда
$$P_2 \subset (1, n) \sqcup (1 + 2x, 2p) \subsetneq P_1.$$
Поэтому $f = 2p$. Осталось заметить, что при $x > p$ было бы
$$P_2 \subsetneq (1, n) \sqcup (1 + 2(x - p), 2p) \subsetneq P_1,$$

что невозможно. Значит $0 < x < p$. Получили **кандидата (5)**.

Осталось проверить, что все P_2 из **серий (1 − 5)** попарно невложимы друг в друга. Для **серий (1 − 2)** это очевидно. Так как в P_2 из **серий (3 − 5)** есть числа 1 и $n+1$, то они не вкладываются в P_2 из **серий (1 − 2)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в другого **представителя (3)**, так как иначе мы получили бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (n+1, 2n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (n+1, 2n),$$

т.е., из простоты p_1 и p_2, $p_1 = p_2$, а это невозможно. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в другого **представителя (4)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (n+1, 2n) \subset (1, 2) \sqcup (n+1, 2np),$$

а это невозможно, так как в левой части есть число $3n+1$, а в правой части его нет. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (3)**. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как иначе было бы

$$(1, n) \sqcup (2x+1, 2p_1) \subset (1, 2p_2) \sqcup (n+1, 2n),$$

т.е.

$$(2x+1, 2p_1) \subset (1, 2p_2).$$

А это невозможно, так как здесь точно $p_1 = p_2$, т.е. при $0 < x < p_1 = p_2$ верно

$$1 < 2x+1 < 1+2p_2.$$

Представитель (5) не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, n) \sqcup (2x+1, 2p_1) \subset (1, 2) \sqcup (n+1, 2np_2),$$

а это невозможно, ведь в левой части, в отличие от правой, есть число $3n+1$. **Представитель (5)** не может вкладываться в другого **представителя (5)**, так как из условия

$$(1, n) \sqcup (2x_1+1, 2p_1) \subset (1, n) \sqcup (2x_2+1, 2p_2)$$

следует

$$(2x_1+1, 2p_1) \subset (2x_2+1, 2p_2),$$

т.е., из простоты p_1 и p_2, верно $p_1 = p_2$. Но тогда $x_1 - x_2$ обязательно кратно p_1, т.е., в силу ограничений

$$0 < x_1 < p_1,\ 0 < x_2 < p_2 = p_1$$

получаем $x_1 = x_2$, чего быть не может. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (n+1, 2n) \subset (1, n) \sqcup (2x+1, 2p_2),$$

т.е. из леммы 3 число $4p_1$ делилось бы на нечетное n, но $p_1 \neq n$. Наконец, **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как из условия

$$(1, 2) \sqcup (n+1, 2np_1) \subset (1, n) \sqcup (2x+1, 2p_2)$$

по лемме 3 получили бы делимость 4 на нечетное n, что невозможно.

■

Лемма 14. О слабой синхронизации второго типа. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1, 2) \sqcup (k, 2n),$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n+1$ *- четно,* $n > 1$ *- нечетно. Тогда ребро от* P_2 *к* P_1 *в графе* G *проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $P_2 = (3, 2) \sqcup (k, 2n)$;

2) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k+2n, 2n)$;

3) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2n),\ p$ *– простое,* $p \nmid n$ *или* $p \mid k-1$;

4) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2np),\ p$ *– простое*;

5) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, n),\ p$ *– простое,* $p|n,\ p \nmid k-1$.

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (3, 2) \sqcup (k, 2n), Y := (1, 2) \sqcup (k+2n, 2n),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 − 2)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_2 \to P_1$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Ясно, что $1, k \in P_2$. Дальше возможны **варианты. В первом из них** $d = 0, f = 0$. Тогда $c = 1,\ e = k$, а этого быть не может, так как иначе

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (k, 0) \subsetneq (1, 2) \sqcup (k, 0) \subsetneq P_1.$$

Во втором варианте $d = 0, f \neq 0$ или $d \neq 0, f = 0$. Без ограничения общности, считаем, что $d = 0, f \neq 0$. Здесь нужно рассмотреть **три случая.** В **первом** из них $1, k \in (e, f)$. Тогда имеем $1 + 3k \in (e, f)$. Но $k < 1 + 3k < k + 2n$ и $1 + 3k$ нечетно. Случай невозможен. **Во втором случае** $1 \in (c, 0),\ k \in (e, f)$. Это возможно только если $c = 1, e = k$. Но тогда f обязательно кратно n и

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (k, f) \subsetneq (k, n) \sqcup (3, 0) \subsetneq P_1,$$

что невозможно. **В третьем случае** $k \in (c, 0),\ 1 \in (e, f)$. Это возможно только при $c = k, e = 1$. Но тогда f обязательно нечетно, ведь иначе

$$P_2 = (k, 0) \sqcup (1, f) \subsetneq (1, 2) \sqcup (k, 4n) \subsetneq P_1,$$

чего быть не может. А если f нечетно, то $1 + f, 1 + 3f \in (k, 2n)$, т.е. f делится на n. Но

$$(1, n) \cap (k, 2n) = \emptyset,$$

так как $k - 1 < n$. Случай невозможен. **В третьем варианте** $d \neq 0, f \neq 0$. И здесь тоже возникают **два исхода. В первом из них** числа $1, k$ одновременно лежат в одной из прогрессий (c, d), (e, f). Без ограничения общности, это (c, d). Но тогда $c = 1,\ d = k - 1$ и числа $1 + d, 1 + 3d$ четны и значит обязаны лежать в $(k, 2n)$. Поэтому d делится на n, т.е. $1 + d, 1 + 3d \in (1, n)$. Но прогрессии $(1, n)$ и $(k, 2n)$ не пересекаются, так как $1 < k < n + 1$. Противоречие. **Во втором исходе** одно из чисел $1, k$ лежит в (c, d), а второе - в (e, f). Пусть, без ограничения общности,

$$1 \in (c, d), \quad k \in (e, f).$$

Тогда $c = 1,\ e = k,\ f$ кратно n и

$$P_2 = (1, d) \sqcup (k, f).$$

Если $d = 2$, то f кратно $2n$, т.е. $f = 2nx$, причем $x > 1$. Тогда для любого простого делителя p числа x имеем

$$P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2nx) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2np) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (4)**. Число d не может быть нечетным, так как иначе числа $1 + d, 1 + 3d$ были бы четны и значит лежали бы в $(k, 2n)$. Тогда бы d делилось на n, т.е. $1 + d, 1 + 3d \in (1, n)$. Но прогрессии $(1, n)$ и $(k, 2n)$ не пересекаются. Пусть теперь d четно и $d \neq 2$, т.е. $d = 2d_1$ и $d_1 > 1$. Тогда

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (k, f).$$

Здесь возможны **три подслучая. В одном из них** $f = n$. Тогда у чисел d_1, n будет общий простой делитель p и для него

$$P_2 \subset (1, 2p) \sqcup (k, n) \subsetneq P_1.$$

Чтобы прогрессии здесь не пересекались, нужно потребовать выполнение дополнительного условия $k-1 \nmid p$. Получили **кандидата (5)**. **Во втором подслучае** $f = 2n$. Тогда для любого простого делителя p числа d_1 имеем

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2n) \subsetneq P_1,$$

т.е. $d_1 = p$. И здесь $p \nmid n$ или $p \mid k - 1$, ведь иначе последовательности $(1, 2p)$ и (k, n) не пересекаются и

$$P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2p) \sqcup (k, n) \subsetneq P_1,$$

а это уже **кандидат (5)**. Получили **кандидата (3)**. **В третьем подслучае** $f > 2n$. Тогда

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (k, f) \subset (1, 2) \sqcup ((k, f) \cap (k, 2n)) \subsetneq P_1,$$

т.е. такое P_2 или вовсе не соединено ребром с P_1, или совпадает с одним из **кандидатов (4)**.

Осталось проверить, что все P_2 из **серий** $(\mathbf{1} - \mathbf{5})$ попарно невложимы друг в друга. Для **серий** $(\mathbf{1} - \mathbf{2})$ это очевидно. Так как в P_2 из **серий** $(\mathbf{3} - \mathbf{5})$ есть числа 1 и k, то они не вкладываются в P_2 из **серий** $(\mathbf{1} - \mathbf{2})$. **Представитель (3)** не может вкладываться в другого **представителя (3)**, так как иначе мы получили бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, 2n),$$

т.е., из простоты p_1 и p_2, $p_1 = p_2$, а это невозможно. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в другого **представителя (4)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2np),$$

а это невозможно, так как в левой части есть число $k + 2n$, а в правой части его нет. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (3)**. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, 2n),$$

откуда

$$(1, 2p_1) \subset (1, 2p_2),$$
$$(k + n, 2n) \subset (1, 2p_2).$$

А это невозможно, так как из первого условия следует, что $p_1 = p_2$, а из второго - что $k + n - 1$ делится на $p_2 = p_1$. Но $k - 1$, в отличие от n, не делится на p_1. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, n) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2np_2),$$

а это невозможно, ведь в левой части, в отличие от правой, есть число $k + 2n$. Наконец, **представитель (5)** не может вкладываться в другого **представителя (5)**, так как из условия

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, n)$$

и простоты p_1 и p_2 получаем $p_1 = p_2$. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, n),$$

т.е. из леммы 3 число $4p_1$ делилось бы на $2p_2$, но $p_2 \mid n$, т.е. $p_2 \neq 2$ и $p_1 = p_2$. А это, в силу наложенных на p ограничений в **(3, 5)**, невозможно. Наконец, **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как из условия

$$(1, 2) \sqcup (k, 2np_1) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, n)$$

по лемме 3 получили бы делимость 4 на $2p_2$, но $p_2 \mid n$, т.е. $p_2 \neq 2$.

$\blacksquare$

Лемма 15. О слабой синхронизации третьего типа. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1,2) \sqcup (k, 2n),$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, $k > n+1$ *- четно,* $n > 1$ *- нечетно. Тогда ребро от* P_2 *к* P_1 *в графе* G *проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $P_2 = (3,2) \sqcup (k, 2n)$;

2) $P_2 = (1,2) \sqcup (k+2n, 2n)$;

3) $P_2 = (1,2p) \sqcup (k,2n),\ p -$ *простое,* $p \nmid n$ *или* $p \mid k-1$;

4) $P_2 = (1,2) \sqcup (k, 2np),\ p -$ *простое*;

5) $P_2 = (1,2p) \sqcup (k-n, n),\ p -$ *простое,* $p|n,\ p \nmid k-1$.

Доказательство.

Доказательство леммы похоже на доказательство леммы 14. Поэтому будем излагать его подробно только там, где оно отличается. **Кандидаты (1 − 2)** точно соединены ребром с P_1. В других кандидатах вида

$$P_2 = (c,d) \sqcup (e,f)$$

точно есть 1 и k. Одновременно d и f равны 0 быть не могут. Если $d = 0$, $f > 0$, то возможны **варианты. В первом** $1, k \in (e,f)$. Не при всех k этот вариант вообще возможен. Но в любом случае, если $c \in (1,2)$, то

$$P_2 \subsetneq (1,2) \sqcup ((e,f) \cap (k,2n)) \subsetneq P_1.$$

А если $c \in (k,2n)$, то

$$P_2 \subsetneq ((1,2) \cap (e,f)) \sqcup (k,2n) \subsetneq P_1.$$

Во втором варианте $c = 1$ и $k \in (e,f)$. Если $(k,2n) \not\subset (e,f)$, то

$$P_2 \subsetneq (1,2) \sqcup ((e,f) \cap (k,2n)) \subsetneq P_1.$$

Иначе, $f = n$ или $f = 2n$. Если $f = n$, то тут возможны **два случая.** Или НОД$(k-1,n) > 1$ и тогда для любого общего простого делителя p чисел $k-1$ и n будет

$$P_2 = (1,0) \sqcup (e,n) \subset (1,2p) \sqcup (k,2n) \subsetneq P_1.$$

Это **кандидат (3)**. Или же НОД$(k-1,n)=1$ и для любого простого делителя p числа n получим

$$P_2=(1,0)\sqcup(e,n)\subsetneq(1,2p)\sqcup(e,n)\subsetneq P_1.$$

Если же $f=2n$, то $e=k$ и

$$P_2=(1,0)\sqcup(k,2n)\subsetneq(1,4)\sqcup(k,2n)\subsetneq P_1.$$

В третьем варианте $c=k$ и $e=1$. Если $(1,f)$ - зигзаг, то

$$P_2=(k,0)\sqcup(1,f)\subset(1,0)\sqcup(k-n,n)\subsetneq P_1.$$

А это уже **второй вариант.** Если же $(1,f)$ - полоса, то

$$P_2=(k,0)\sqcup(1,f)\subsetneq(1,2)\sqcup(k,4n)\subsetneq P_1.$$

Пусть теперь $d>0$, $f>0$. Если (c,d) и (e,f) — **полосы,** то, без ограничения общности, $c=1$, $k=e$ и тогда эти P_2 — **кандидаты (3 − 4)**. Пусть теперь (c,d) и (e,f) — **полоса и зигзаг.** Без ограничения общности, полосой будет (c,d). Если $(c,d)\subset(1,2)$, то

$$P_2\subset(1,2)\sqcup((e,f)\cap(k,2n))\subset P_1.$$

Тогда или P_2 уже представлен нами как «полоса+полоса», или же $(k,2n)\subset(e,f)$, т.е. $f=n$ или $f=2n$. Если $f=n$, то $(e,f)=(k-n,n)$ и $(c,d)=(1,2d_1)$. Тогда по лемме 1 у n и d_1 есть общий простой делитель p, на который не делится $k-1$, и

$$P_2\subset(1,2p)\sqcup(k-n,n)\subsetneq P_1.$$

Получаем **кандидата (5)**. Если же $f=2n$, то

$$(e,f)=(k,2n)\text{ и }\ (c,d)=(1,2d_1).$$

Берем любой простой делитель числа d_1 и получаем **кандидата (3)**. Осталось разобрать случай, когда (c,d) и (e,f) — **зигзаги.** По лемме 4 тогда получаем

$$P_2\subset(k-n,2n)^+\sqcup(k,2n)\subsetneq P_1,$$

а это уже случай «полоса+полоса».

Доказательство попарной невложимости **представителей** из **(1 − 5)** дословно повторяет соответствующую часть доказательства леммы 14, только с заменой (k,n) на $(k-n,n)$.

$\blacksquare$

Лемма 16. О слабой синхронизации четвертого типа. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1, 2n) \sqcup (n+1, 2),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ *и* n *нечетно. Тогда ребро от* P_2 *к* P_1 *в графе* G *проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $P_2 = (1 + 2n, 2n) \sqcup (n+1, 2)$;

2) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (n+3, 2)$;

3) $P_2 = (1, 2np) \sqcup (n+1, 2),\ p$ *− простое*;

4) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (n+1, 2p),\ p$ *− простое*, $p \neq n$;

5) $P_2 = (1, n) \sqcup (2x + n + 1, 2p),\ p$ *− простое*, $0 < x < p,\ p|n$.

Доказательство.

Синхронизация четвертого типа очень похожа на синхронизацию первого типа, приводимую аккуратно в лемме 13. Поэтому дадим здесь лишь неформальное сокращенное доказательство.

Пусть в графе G проведено ребро от P_2 к P_1 и

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Вариант, когда в P_2 нет 1 или $n+1$, дает нам **кандидатов (1 − 2)**. Пусть теперь эти числа есть в P_2. Разбираем **случаи.** Если $d = f = 0$, т.е. P_2 — это **«точка+точка»,** то P_2 можно поглотить «полосой+полосой». То же самое верно и в случае, когда P_2 — **«точка+полоса».** Случай, когда P_2 — **«полоса+полоса»** дает нам **кандидатов (3 − 4)**. Только нужно учесть, что $(1, 2n) \sqcup (n+1, 2n)$ с $p = n$ в **(4)** нам не подходит, так как поглощается **кандидатом (5)**. Разбираем случай, когда P_2 — **«точка+зигзаг»**. Если точка (обозначим ее за x) лежит в $(1, n)$, то по лемме 4 о зигзаге конструкция поглощается $(1, n) \sqcup (n+3, 0)$. А если точки в $(1, n)$ нет, то конструкция поглощается $(1, n) \sqcup (x, 2n)$. Аналогично, в случае, когда P_2 — **«зигзаг+зигзаг»**, конструкция по лемме 4 о зигзаге поглощается $(1, n) \sqcup (n+3, 0)$. Осталось разобрать только случай **«полоса+зигзаг»**. Если полоса лежит в $(1, 2n)$, то конструкция поглощается $(1, n) \sqcup (n+3, 0)$. Значит полоса лежит в $(n+1, 2)$. Далее, если зигзаг не накрывает целиком $(1, 2n)$, то конструкция поглощается

$(n+1,2)\sqcup((1,2n)\cap(\text{зигзаг}))$. Значит зигзаг накрывает $(1,2n)$, т.е. $f=n$ или $f=2n$. В первом случае получаем **кандидата (5)**, а второй случай невозможен, так как зигзаг превращается в полосу.

Доказательство попарной невложимости **кандидатов (1 − 5)** повторяет аналогичные рассуждения леммы 13.

■

Лемма 17. О слабой синхронизации пятого типа. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1,2n)\sqcup(k,2),$$

где $k,n\in\mathbb{N}$, $k<n+1$ *— четно,* $n>1$ *— нечетно. Тогда ребро от* P_2 *к* P_1 *в графе* G *проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $P_2=(1+2n,2n)\sqcup(k,2)$;

2) $P_2=(1,2n)\sqcup(k+2,2)$;

3) $P_2=(1,2np)\sqcup(k,2),\ p$ *− простое*;

4) $P_2=(1,2n)\sqcup(k,2p),\ p$ *− простое,* $p\nmid n$ *или* $p\mid k-1$;

5) $P_2=(1,n)\sqcup(k,2p),\ p$ *− простое,* $p|n,\ p\nmid k-1$.

Доказательство.

Как и в предыдущей лемме, случаи **«точка+точка», «точка+полоса», «точка+зигзаг»** невозможны, а случаи **«полоса+полоса»**, **«зигзаг+зигзаг»** дают нам **кандидатов (3 − 4)**. А в случае **«полоса+зигзаг»** полоса лежит в $(k,2)$, так как иначе конструкция поглощается $(1,n)\sqcup(k,0)$. Тогда зигзаг накрывает целиком $(1,2n)$, так как иначе конструкцию можно поглотить множеством $(k,2)\sqcup((1,2n)\cap(\text{зигзаг}))$. Значит $f=n$ и мы получаем **кандидата (5)**.

Доказательство попарной невложимости **кандидатов (1 − 5)** повторяет аналогичные рассуждения леммы 14.

■

Лемма 18. О слабой синхронизации шестого типа. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1,2n)\sqcup(k,2),$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, $k > n+1$ *— четно,* $n > 1$ *— нечетно. Тогда ребро от* P_2 *к* P_1 *в графе* G *проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $P_2 = (1+2n, 2n) \sqcup (k, 2)$;

2) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k+2, 2)$;

3) $P_2 = (1, 2np) \sqcup (k, 2)$, p *— простое*;

4) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k, 2p)$, p *— простое.*

Доказательство.

Этот тип слабой синхронизации еще проще, чем остальные. Отличие возникает только том в случае **«полоса+зигзаг»**. Здесь точно так же полоса должна лежать в $(k, 2)$. А зигзаг по лемме 4 лежит в

$$(k-n, 2n)^+ \sqcup (k, 2n).$$

Но если он не содержит в себе все $(1, 2n)$, то конструкцию можно поглотить множеством

$$(k, 2) \sqcup ((1, 2n) \cap (\text{зигзаг})).$$

Ну а если в зигзаге есть $(1, 2n)$, то он равен $(1, n)$; но в P_1 нет числа $n+1$. Поэтому варианта с **кандидатом** вида **(5)** из предыдущих лемм не возникает.

Доказательство попарной невложимости **кандидатов** $\mathbf{(1-4)}$ уже много раз было доказано в других леммах.

■

Лемма 19. О сильной синхронизации. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1, 2) \sqcup (k, 2),$$

где $k \geqslant 6$ *— четно. Тогда ребро от* P_2 *к* P_1 *в графе* G *проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из семи условий:*

1) $P_2 = (3, 2) \sqcup (k, 2)$;

2) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k+2, 2)$;

3) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2)$, p *— простое,* $2p < k-2$;

4) $P_2 = (1,2) \sqcup (k,2p),\ p$ *– простое*;

5) $P_2 = (1,0) \sqcup (k-1,1)$;

6) $P_2 = (1,k-1) \sqcup (x,n),\ 3 \leqslant x \leqslant k-3$ *– нечетное*, $n \in A(x,k)$;

7) $P_2 = (1,n) \sqcup (x,k-x),\ 3 \leqslant x \leqslant k-3$ *– нечетное*, $n \in B(x,k)$.

Доказательство.

Необходимость наличия в списке **условий (1 – 2)** очевидна. Пусть в графе G проведено ребро от P_2 к P_1 и

$$P_2 = (c,d) \sqcup (e,f).$$

Как и ранее, это не могут быть **«точка+точка»,** и **«точка+полоса»**. Вариант **«полоса+полоса»** дает нам **кандидатов (3 – 4)**. Важно лишь учесть, что серия «$P_2 = (1,2p) \sqcup (k,2),\ p$ – простое» при $2p \geqslant k-2$ пропадает, так как в этом случае

$$(1,2p) \sqcup (k,2) \subsetneq (1,0) \sqcup (k-1,1).$$

Рассмотрим вариант **«точка+зигзаг»**. Если зигзаг не накрывает целиком ни одну из прогрессий $(1,2),(k,2)$, то конструкцию можно накрыть **«полосой+полосой»**. Поэтому в этом варианте шаг зигзага равен 1, а сам зигзаг, как следствие, равен $(k-1,1)$. Но тогда точкой точно будет число 1. Получили **кандидата (5)**. Рассмотрим вариант **«полоса+зигзаг»**. Как и в предыдущем случае, для того, чтобы наша конструкция не накрывалась **«полосой+полосой»**, зигзаг должен иметь шаг 1. Но тогда он точно пересекает нашу полосу, что невозможно. Разберем теперь последний вариант **«зигзаг+зигзаг»**. Чтобы конструкция не накрывалась **кандидатами (1, 2, 5)**, в ней должны быть числа $1,k$ и хоть одно из чисел $3,5,\dots,k-3$. При этом, шаги d,f зигзагов должны быть нечетны, иначе они бы стали полосами. Возможны только **два исхода. В первом** числа $1,k$ попадают в один и тот же зигзаг. Тогда это точно $(1,k-1)$. И начало e второго зигзага должно лежать в $\{1,3,\dots,k-3\}$. Получили

$$P_2 = (1,k-1) \sqcup (x,n),\ 3 \leqslant x \leqslant k-3 \text{ – нечетное},\ n \text{ – нечетное}.$$

Покажем, что $n \in A(x,k)$, т.е. выполнены условия

$$n > k-x,\ \text{НОД}(n,k-1) \nmid x-1,\ \text{НОД}(n,x-1,k-1) = 1$$

и что для любого собственного делителя t числа n имеет место или условие $t < k - x$, или условие НОД$(t, k-1) \mid x - 1$. Условие $n > k - x$ следует из того, что $n + x$ четно, а k — минимальное четное число в P_1. И $n \neq k - x$ из-за непересечения последовательностей в P_2. Из этого же непересечения по лемме 1 получаем НОД$(n, k-1) \nmid x - 1$. Условие НОД$(n, x-1, k-1) = 1$ выполнено, так как иначе для любого общего простого делителя p чисел $n, x-1, k-1$ получаем

$$(1, k-1) \sqcup (x, n) \subset (1, 2p) \cup (k, 2) \subsetneq P_1.$$

Наконец, если для некоторого собственного делителя t числа n имеет место неравенство $t \geqslant k - x$ и НОД$(t, k-1) \nmid x - 1\}$, то

$$(1, k-1) \sqcup (x, n) \subset (1, k-1) \cup (x, t) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (6)**. Во **втором исходе** числа $1, k$ попадают в разные зигзаги. Тогда зигзаг с 1 проходит мимо чисел $3, 5, \ldots, k-3$. И ровно одно из них лежит в зигзаге с k. С этого числа, которое обозначаем за x, зигзаг и начинается. Получили

$$P_2 = (1, n) \sqcup (x, k-x),\ 3 \leqslant x \leqslant k-3 - \text{нечетное},\ n - \text{нечетное}.$$

Покажем, что $n \in B(x, k)$, т.е. выполнены условия

$$n > k - 1,\ \text{НОД}(n, k-x) \nmid x - 1,\ \text{НОД}(n, k-x, k-1) = 1$$

и что для любого собственного делителя t числа n имеет место или условие $t < k - 1$, или условие НОД$(t, k-x) \mid x - 1$. Условие $n > k - 1$ следует из того, что $n + 1$ четно, а k — минимальное четное число в P_1. И $n \neq k - 1$ из-за непересечения последовательностей в P_2. Из этого же непересечения по лемме 1 получаем НОД$(n, k-x) \nmid x - 1$. Условие НОД$(n, k-x, k-1) = 1$ выполнено, так как иначе для любого общего простого делителя p чисел $n, k-x, k-1$ получаем

$$(1, n) \sqcup (x, k-x) \subset (1, 2p) \cup (k, 2) \subsetneq P_1.$$

Наконец, если для некоторого собственного делителя t числа n имеет место неравенство $t \geqslant k - 1$ и НОД$(t, k-x) \nmid x - 1\}$, то

$$(1, n) \sqcup (x, k-x) \subset (1, t) \cup (x, k-x) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (7)**.

Покажем теперь попарную невложимость **кандидатов (1 − 7)**. Для **(1 − 2)** все очевидно. Также тривиальны сравнения внутри **(3 − 4)**. Разбираем оставшиеся случаи, в которых задействованы **(5 − 7)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как из условия

$$(1, 2p) \sqcup (k, 2) \subset (1, 0) \sqcup (k - 1, 1)$$

следовало бы $1+2p \geqslant k-1$, т.е. $2p \geqslant k-2$. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (6)**, так как из условия

$$(1, 2p) \sqcup (k, 2) \subset (1, k - 1) \sqcup (x, n)$$

по лемме 4 о зигзаге получили бы $k-1 \mid 4$, но $k-1$ - нечетно и больше 1. Точно также, **представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (7)**, так как из условия

$$(1, 2p) \sqcup (k, 2) \subset (1, n) \sqcup (x, k - x)$$

по лемме 4 о зигзаге получили бы $k - x \mid 4$, но $k - x$ нечетно и больше 1. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как в левой части гипотетического вложения

$$(1, 2) \sqcup (k, 2p) \subset (1, 0) \sqcup (k - 1, 1)$$

есть число 3, а в правой части его нет. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителей (6 − 7)** по тем же соображениям, что и **(3)**. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как из условия

$$(1, 0) \sqcup (k - 1, 1) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2)$$

следует $(k - 1, 2) \subset (1, 2p)$, что невозможно. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как из условия

$$(1, 0) \sqcup (k - 1, 1) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2p)$$

следует $(k, 2) \subset (k, 2p)$, что невозможно.**Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (6)**, так как из условия

$$(1, 0) \sqcup (k - 1, 1) \subset (1, k - 1) \sqcup (x, n)$$

по лемме 4 о зигзаге следует $k - 1 \mid 2$, но $k \geqslant 6$. Аналогично, **представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (7)**, так как из условия

$$(1, 0) \sqcup (k - 1, 1) \subset (1, n) \sqcup (x, k - x)$$

по лемме 4 о зигзаге следует $n \mid 2$, но $n > k-1 \geqslant 5$. Покажем, что **представитель (6)** не может вкладываться в **представителя (3)**. Иначе было бы

$$(1, k-1) \sqcup (x, n) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2),$$

т.е.

$$(1, 2k-2) \sqcup (x, 2n) \subset (1, 2p).$$

Но тогда числа $k-1, x-1$ и n делятся на p, что невозможно из-за ограничения НОД$(n, x-1, k-1) = 1$. **Представитель (7)** не может вкладываться в **представителя (3)**, иначе было бы

$$(1, n) \sqcup (x, k-x) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2),$$

т.е.

$$(1+n, 2n) \sqcup (k, 2k-2x) \subset (1, 2p).$$

В этом случае числа $n, k-1, k-x$ делятся на p, но

$$\text{НОД}(n, k-x, k-1) = 1.$$

Представитель (6) не может вкладываться в **представителя (4)**, иначе было бы

$$(1, k-1) \sqcup (x, n) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2p),$$

т.е.

$$(k, 2k-2) \sqcup (x+n, 2n) \subset (k, 2p).$$

Тогда числа $k-1, x+n-k, n$ делятся на p. Значит и число $x-1$ делится на p, а это, как уже было показано выше, невозможно. **Представитель (7)** не может вкладываться в **представителя (4)**, иначе было бы

$$(1, n) \sqcup (x, k-x) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2),$$

т.е.

$$(1, 2n) \sqcup (x, 2k-2x) \subset (1, 2p).$$

Тогда числа $n, x-1, k-x$ делятся на p. Значит и число $k-1$ делится на p, а это невозможно. **Представители (6 – 7)** не могут вкладываться в **представителя (5)**, так как в них есть одно из чисел $3, 5, \ldots, k-3$. **Представитель (6)** не может вкладываться в другого **представителя (6)**, так как иначе

$$(1, k-1) \sqcup (x_1, n_1) \subset (1, k-1) \sqcup (x_2, n_2),$$

т.е.

$$(x_1, n_1) \subset (x_2, n_2).$$

Тогда $x_1 = x_2$ и n_2 - собственный делитель числа n_1. Но мы знаем, что для любого собственного делителя t числа n_1 имеет место $t < k - x_1$ или НОД$(t, k-1) \mid x_1 - 1$. Получили противоречие, ведь $n_2 \geqslant k - x_2 = k - x_1$ и НОД$(n_2, k-1) \nmid x_2 - 1 = x_1 - 1$. Аналогично, **представитель (7)** не может вкладываться в другого **представителя (7)**, так как иначе

$$(1, n_1) \sqcup (x_1, k - x_1) \subset (1, n_2) \sqcup (x_2, k - x_2).$$

Здесь точно $x_1 = x_2$. Поэтому

$$(1, n_1) \subset (1, n_2)$$

и n_2 - собственный делитель числа n_1. Далее рассуждения повторяют предыдущий случай. **Представитель (6)** не может вкладываться в **представителя (7)**, так как иначе

$$(1, k-1) \sqcup (x_1, n_1) \subset (1, n_2) \sqcup (x_2, k - x_2)$$

и по лемме 4 о зигзаге $2(k-1)$ делится на n_2. Так как n_2 нечетно, то $k-1$ делится на n_2. Но $n_2 > k-1$. Противоречие. Наконец, **представитель (7)** не может вкладываться в **представителя (6)**, так как иначе

$$(1, n_1) \sqcup (x_1, k - x_1) \subset (1, k-1) \sqcup (x_2, n_2).$$

Тогда обязательно $x_1 = x_2$. Значит по лемме 4 о зигзаге $2(k - x_1)$ делится на n_2. Так как n_2 нечетно, то $k - x_1$ делится на n_2. Но $n_2 > k - x_2 = k - x_1$. Противоречие.

■

Доказательство основной теоремы

Доказательство будет проходить перебором по всем возможным вариантам для P_1 (с учетом замечания к лемме 2.) Пусть

$$P_1 = (a, b) \sqcup (c, d).$$

Если P_1 — объединение двух точек, т.е. $b = d = 0$, то в P_2 вообще не существует собственных подмножеств P_1. Если P_1 — объединение точки и полосы, т.е., без ограничения общности, $b = 0, d > 0$, то возможны случаи. Если $a \in (c, d)^+$, то P_1 можно преобразованием подобия перевести в $(1, 0) \sqcup (x, 1)$. При $x = 2$ получаем условие 1, описанное в лемме 7. При $x = 3$ получаем условие 2, описанное в лемме 8 о точке и полосе отступа 2. При $x > 3$ получаем условие 3, описанное в лемме 9 о точке и полосе отступа больше 2. Если же $a \notin (c, d)^+$, то получаем условие 4, описанное в лемме 10 о точке и внешней полосе. Пусть теперь $b > 0, d > 0$. Здесь тоже возможны варианты. Если последовательности (a, b) и (c, d) не согласованные, то получаем условие 5, описанное в лемме 11 о двух несогласованных полосах. Если последовательности (a, b) и (c, d) согласованные, но не синхронные, то получаем условие 6, описанное в лемме 12 о двух асинхронных полосах. Если последовательности (a, b) и (c, d) слабо синхронны, то по лемме 5 об общем виде слабой синхронизации P_1 можно преобразованием подобия перевести в одно из множеств вида

$$(1, 2) \sqcup (k, 2n), \ (1, 2n) \sqcup (k, 2),$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, k — четно, $n > 1$ — нечетно. Если это $(1, 2) \sqcup (k, 2n)$, то при $k = n + 1$ по лемме 13 о слабой синхронизации первого типа получаем условие 7. А при $k \neq n+1$ из лемм 14, 15 о слабой синхронизации второго и третьего типов выводится условие 8. Если же P_1 подобно множеству $(1, 2n) \sqcup (k, 2)$, то при $k = n + 1$ по лемме 16 о слабой синхронизации четвертого типа получаем условие 9. При $k < n + 1$ из леммы 17 о слабой синхронизации пятого типа выводится условие 10. Наконец, при $k > n+1$ из леммы 18 о слабой синхронизации шестого типа выводится условие 11. Остался не разобранным последний случай, в котором последовательности (a, b) и (c, d) сильно синхронны. По лемме 6 об общем виде сильной синхронизации P_1 можно преобразованием подобия перевести в множество вида

$$(1, 2) \sqcup (k, 2),$$

где $k \in \mathbb{N}$ и k — четно. Если $k = 2$ или $k = 4$, то эти случаи уже описаны нами в условиях 1 и 2. А если $k \geqslant 6$, то по лемме 19 о сильной синхронизации получаем условие 12. Все случаи разобраны.

■

Список литературы

[1] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении некоторых подмножеств натурального ряда.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 79-86.

[2] П. С. Дергач. *О каноническом регулярном представлении S-тонких языков.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.

[3] П. С. Дергач. *О проблеме вложения допустимых классов.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 143-174.

[4] П. С. Дергач. *О двух размерностях спектров тонких языков.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 155-174.

[5] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении последовательности натуральных чисел, имеющей пропуск длины 2.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 67-86.

[6] Е. Д. Данилевская, П. С. Дергач. *О покрытиях и разбиениях натуральных чисел, имеющих два последовательных пропуска длины 1.* Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 1, М., Сс.187-230.

[7] Д. Е. Александров. *Эффективные методы реализации проверки содержания сетевых пакетов регулярными выражениями.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 37-60.

[8] Д. Н. Бабин. *Частотные регулярные языки.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 205-210.

[9] Д. Е. Александров. *Об оценках автоматной сложности распознавания классов регулярных языков.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 161-190.

[10] В. М. Дементьев. *О звездной высоте регулярного языка и циклической сложности минимального автомата.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 215-222.

[11] И. Е. Иванов. *О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 1, М., Сс. 145-160.

[12] А. А. Петюшко. *О контекстно-свободных биграмных языках.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 187-208.

[13] И. Е. Иванов. *Нижняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 175-194.

[14] В. А. Орлов. *О конечных автоматах с максимальной степенью различимости состояний.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 1, М., Сс. 213-222.

[15] П. С. Дергач. *О проблеме проверки однозначности алфавитного декодирования в классе регулярных языков с полиномиальной функцией роста.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 147-202.

[16] А. М. Миронов. *Основные понятия теории вероятностных автоматов.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 283-330.

[17] А. А. Петюшко, Д. Н. Бабин. *Классификация Хомского для матриц биграммных языков.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 331-336.

[18] С. Б. Родин. *О связи линейно реализуемых автоматов и автоматов с максимальной вариативностью относительно кодирования состояний.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 337-348.