Алгебры на индикаторах К-булеанов множеств

Баранович А.Е.

Исследуется изоморфизм алгебр на k-булеанах множеств в аксиоматике ZFU и соответствующего им k-гиперпространства индикаторов над $GF[2]$. Оценивается сложность решения задач поиска в k-булеанах множеств. Полученные результаты проецируются на модель k-гиперпространства семиотико-хроматических гипертопографов в аксиоматической системе $[G]$[1]. Последняя положена в основу вычислительной архитектуры ёмкостного паракомпьютера управления знаниями интеллектуальной системы.

Ключевые слова: алгебр морфизмы, алгоритмов сложность ёмкостная, алгоритмов сложность операционная, гипертопографы семиотико-хроматические, графов теории обобщения, графов теории однообъектная парадигма, знаниями управление, множеств индикаторы, множеств (- носителей) k-топологизация, множеств k-булеан, множеств k-булеанов индикаторы, паракомпьютер ёмкостной, поиск на множествах, системы интеллектуальные, топологии дискретные с конечным носителем, k-гиперпространство булево

В работе [6] обоснован изоморфизм алгебр множеств $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[1,X]}\colon < \mathfrak{B}[1,X]$, $\{\Omega_{\mathrm{F}}^{\mathfrak{B}[1,X]} : \bigcup, \bigcap, \setminus, -, \triangle\} >$ и алгебры индикаторов $\mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[1,X]}}\colon < I^{\mathfrak{B}[1,X]}$, $\{\Omega_{\mathrm{F}}^{I[1]} : \omega_{\bigcup}^{I[1]}, \omega_{\bigcap}^{I[1]}, \omega_{\setminus}^{I[1]}, \omega_{-}^{I[1]}, \omega_{\triangle}^{I[1]}\} >$ специального вида. Показана возможность решения задачи поиска произвольных элементов в упорядоченных булеанах $\mathfrak{B}[0,X]$ - $\mathfrak{B}[1,X]$ за *O(const)* условных операций (на вполне определенной векторной модели вычислений) при соответствующих значениях параметра емкостной сложности. Вследствие реальных ограничений на исследуемые системы, нас в максимальной степени будут интересовать алгебры на конечных множествах (точнее, ZFU [9]). И, в частности, алгебра множеств $< \mathfrak{B}[1,X], \{\Omega^M_F : \bigcup, \bigcap, \setminus\} >$, где $\mathfrak{B}[1,X]$ есть булеан 1-го порядка конечного множества-носителя X^1, что априори предполагает вхождение (принадлежность) $\varnothing$ и X в $\mathfrak{B}[1,X]$. Для любого конечного множества X, $|X| = n$ с отношением строго порядка (перенумерованного) может быть определен *упорядоченный* массив (множество) *индикаторов* $I^{\mathfrak{B}[1,X]}$ из $[GF(2)]^{|\mathfrak{B}[0,X]|}$ мощности $|I^{\mathfrak{B}[1,X]}| = 2^{|\mathfrak{B}[0,X]|}$, включая $\varnothing$-множество, биективно соответствующий булеану множества X первого уровня топологизации[2] $\mathfrak{B}[1,X]$ [6-8] [3]. Из определения индикатора следует, что множество индикаторов $I^{\mathfrak{B}[1,X]}$ есть полное конечное булево пространство $[GF(2)]^{|\mathfrak{B}[0,X]|}$.

На множестве $I^{\mathfrak{B}[1,X]}$: $\{\vec{x}_i\}$,$\vec{x}_i \in [GF(2)]^n$, i = $\overline{1,2^n}$, индикаторов $\mathfrak{B}[1,X]$ ($I^{\mathfrak{B}[1,X]} \leftrightarrow \mathfrak{B}[1,X]$) определены, в частности, алгебраические операции $\wedge, \vee, \neg, \oplus$, а соответственно, и алгебра индикаторов $< I^{\mathfrak{B}[1,X]}, \{\Omega^I_{\mathrm{F}} : \wedge, \vee, \neg, \oplus\} >$ в упомянутой сигнатуре. Из продолжения биективного соответствия $\phi^1 : \mathfrak{B}[1,X] \leftrightarrow I^{\mathfrak{B}[1,X]}$ ($\phi^1 : X_\tau \equiv \vec{x}_\tau$) на морфизм[4] алгебр $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[1,X]} : < \mathfrak{B}[1,X], \{\Omega^{\mathfrak{B}[1,X]}_{\mathrm{F}} : \bigcup, \bigcap, \setminus, -, \triangle\} >$ и $\mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[1,X]}} : < I^{\mathfrak{B}[1,X]}, \{\Omega^{I[1]}_{\mathrm{F}} : \omega^{I[1]}_{\bigcup}, \omega^{I[1]}_{\bigcap}, \omega^{I[1]}_{\setminus}, \omega^{I[1]}_{-}, \omega^{I[1]}_{\triangle}\} >$ вида:

$$\left\{ \begin{array}{l}
1.\ \omega^{I[1]}_{\bigcup} \equiv \phi^1(\bigcup\limits_{i,j}(X_i,X_j)) \equiv \mathop{\vee}\limits_{i,j}(\phi^1(X_i), \phi^1(X_j)) \equiv \mathop{\vee}\limits_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j). \\
2.\ \omega^{I[1]}_{\bigcap} \equiv \phi^1(\bigcap\limits_{i,j}(X_i,X_j)) \equiv \mathop{\wedge}\limits_{i,j}(\phi^1(X_i), \phi^1(X_j)) \equiv \mathop{\wedge}\limits_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j). \\
3.\ \omega^{I[1]}_{\setminus} \equiv \phi^1(\mathop{\setminus}\limits_{i,j}(X_i,X_j)) \equiv \mathop{\oplus}\limits_{i,j}(\vec{x}_i, \mathop{\wedge}\limits_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)). \qquad (1) \\
4.\ \omega^{I[1]}_{-} \equiv \phi^1(\overline{X}_i) \equiv \phi^1(\mathop{\setminus}\limits_{i}(X,X_i)) \equiv \mathop{\oplus}\limits_{i}(\vec{1},\vec{x}_i) \equiv \overset{\neg}{\vec{x}_i}. \\
5.\ \omega^{I[1]}_{\triangle} \equiv \phi^1(\mathop{\triangle}\limits_{i,j}(X_i,X_j)) \equiv \mathop{\oplus}\limits_{i,j}(\mathop{\vee}\limits_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j), \mathop{\wedge}\limits_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)),
\end{array} \right.$$

- следует утверждение 1 (лемма 1) [6].

[1] Ранее - булеан $\mathfrak{B}[X]$ (простой) конечного множества X , $|\mathfrak{B}[X]| = 2^{|X|}$, как множество всех его подмножеств, включая $\varnothing$ и само X [8].

[2] Множество X есть по определению булеан нулевого уровня $\mathfrak{B}[0,X]$ и $|X| = |\mathfrak{B}[0,X]|$. Булеан $\mathfrak{B}[1,X]$ есть дискретная топология на X [7].

[3] Вследствие тождественности $X \equiv \mathfrak{B}[0,X]$, в качестве подмножества индикаторов $I^{\mathfrak{B}[0,X]}$ элементов X в $\mathfrak{B}[1,X]$ (одноточечных представителей X) выступают единичные вектора из $I^{\mathfrak{B}[1,X]}$ (базис $[GF(2)]^n$, $n = |\mathfrak{B}[0,X]|$).

[4] При задействовании понятий гомоморфизма и изоморфизма алгебраических систем в настоящей работе используется система определений, введённая в [6].

Лемма 1. *Морфизм алгебр $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[1,X]} \rightleftarrows \mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[1,X]}}$ вида (1) есть изоморфизм* $\triangleleft$

По аналогии с вышесказанным (см. п. 2 в [6]) определим для любого конечного булеана k-го уровня $\mathfrak{B}[k, X]$ $(X \equiv \mathfrak{B}[0, X] \subset \mathfrak{B}[1, X] \subset \ldots \subset \mathfrak{B}[k, X] \subset \mathfrak{B}[k+1, X])$, с введенным отношением строгого порядка (перенумерованного), $|\mathfrak{B}[k, X]| = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot 2^{|X|}-1}}}-1}\}$ ($k-1$ экземпляров 2 в показателе), включая $\varnothing$ [6], упорядоченный массив (множество) индикаторов $I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$ размерности $|\mathfrak{B}[k, X]|$ из $[GF(2)]^{|\mathfrak{B}[k,X]|}$ мощности $|I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}| = 2^{|\mathfrak{B}[k,X]|}$, биективно соответствующий булеану $\mathfrak{B}[k+1, X]$ и сохраняющий порядок множества индикаторов $I^{\mathfrak{B}[1,\mathrm{X}]}$. В результате получим соответствие $\phi^{k+1}: I^{\mathfrak{B}[k+1,X]} \leftrightarrow \mathfrak{B}[k+1, X]$ как продолжение соответствия $\phi^1: I^{\mathfrak{B}[1,\mathrm{X}]} \leftrightarrow \mathfrak{B}[1, X]$. На множестве $I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$: $\{\vec{x}_i\}$, $\vec{x}_i \in [GF(2)]^{|\mathfrak{B}[k,X]|}$, $i = \overline{1, 2^{|\mathfrak{B}[k,X]|}}$, индикаторов $\mathfrak{B}[k+1, X]$ определены алгебраические операции $\wedge, \vee, \neg, \oplus$, а соответственно, и алгебра индикаторов $<\ I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$, $\{\Omega^I_{\mathrm{F}} : \wedge, \vee, \neg, \oplus\} >$ в упомянутой сигнатуре.

Используем биективное соответствие $\phi^{k+1}: \mathfrak{B}[k+1, X] \leftrightarrow I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$ в целях его продолжения на морфизм алгебр $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[k+1,X]}$:
$< \mathfrak{B}[k+1, X]$, $\{\Omega_{\mathrm{F}}^{\mathfrak{B}[k+1,X]} : \bigcup, \bigcap, \setminus, -, \triangle\} >$ в $\mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}}$: $< I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$, $\{\ \Omega_{\mathrm{F}}^{I[k+1]} : \omega_{\bigcup}^{I[k+1]}, \omega_{\bigcap}^{I[k+1]}, \omega_{\setminus}^{I[k+1]}, \omega_{-}^{I[k+1]}, \omega_{\triangle}^{I[k+1]}\} >$ следующего вида (1-5):

$$\left\{\begin{array}{l}
1.\quad \omega_{\bigcup}^{I[k+1]} \equiv \phi^{k+1}(\bigcup\limits_{i,j}(b_i[k{+}1],\ b_j[k+1])) \equiv \\
\quad \equiv \bigvee\limits_{i,j}(\phi^{k+1}(b_i[k+1], \phi^{k+1}(b_j[k+1])) \equiv \bigvee\limits_{i,j}(\vec{b}_i[k+1]\ , \vec{b}_j[k+1]\ ). \\
2.\ \omega_{\bigcap}^{I[k+1]} \ \equiv\ \phi^{k+1}(\bigcap\limits_{i,j}(b_i[k+1]\ , b_j[k+1]))\ \equiv \\
\quad \equiv \bigwedge\limits_{i,j}(\phi^{k+1}(b_i[k+1]),\ \phi^{k+1}(b_j[k+1])) \equiv \bigwedge\limits_{i,j}(\vec{b}_i[k+1]\ , \vec{b}_j[k+1]\ ). \\
3.\ \omega_{\setminus}^{I[k+1]} \equiv \phi^{k+1}(\setminus\limits_{i,j}(b_i[k+1]\ , b_j[k+1]))\ \equiv \qquad\qquad (2) \\
\quad \equiv\ \bigoplus\limits_{i,j}(\vec{b}_i[k+1],\ \bigwedge\limits_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1])). \\
4.\ \omega_{-}^{I[k+1]} \equiv \phi^{k+1}(\overline{b_i[k+1]}) \equiv \phi^{k+1}(\setminus\limits_{i}(\mathfrak{B}[k, X], b_i[k+1]))\ \equiv\ \overline{\vec{b}_i[k+1]}^{\neg}. \\
5.\ \omega_{\triangle}^{I[k+1]}\ \equiv\ \phi^{k+1}(\triangle\limits_{i,j}(b_i[k+1],\ b_j[k+1]\ ))\ \equiv \\
\quad \equiv\ \bigoplus\limits_{i,j}(\bigvee\limits_{i,j}(\vec{b}_i[k+1],\ \vec{b}_j[k+1]),\ \bigwedge\limits_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]\ )),
\end{array}\right.$$

где $b_i[k+1]$, $b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$ (собственные подмножества $\mathfrak{B}[k, X]$), $\vec{b}_i[k+1]$, $\vec{b}_j[k+1] \in I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$ и $\overline{\vec{b}_i[k+1]}^{\neg}$ - инвертированный вектор $\vec{b}_i[k+1]$.

Естественным продолжением леммы 1 является утверждение 1.

Утверждение (теорема) 1. *Морфизм алгебр* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[k+1,X]} \rightleftarrows \mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}}$ *вида (2) для произвольного конечного* $k \in \mathbb{N}_0$ *есть изоморфизм* $\triangleleft$

Доказательство.

1. $\phi^{k+1}(\bigcup\limits_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \leftrightarrow \underset{i,j}{\vee}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1])$, где $b_i[k+1]$, $b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$ и $\vec{b}_i[k+1]$, $\vec{b}_j[k+1] \in I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$. Операции $\bigcup$ и $\omega_{\bigcup}^{I[k+1]}$ коммутативны. Доказательство очевидно.

2. $\phi^{k+1}(\bigcap\limits_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \leftrightarrow \underset{i,j}{\wedge}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1])$, где $b_i[k+1]$, $b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$ и $\vec{b}_i[k+1]$, $\vec{b}_j[k+1] \in I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$. Операции $\bigcap$ и $\omega_{\bigcap}^{I[k+1]}$ коммутативны. Доказательство очевидно.

3. Для исключения из любого множества $b_i[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$, $b_i[k+1] \subseteq \mathfrak{B}[k, X]$, которому биективно соответствует индикатор $\vec{b}_i[k+1] \in I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$, $|\vec{b}_i[k+1]| = |\mathfrak{B}[k, X]|$, собственного подмножества $b_i[k+1]^* \subseteq b_i[k+1]$, $b_i[\mathrm{k}+1]^* \subseteq \mathfrak{B}[k, X]$, из него необходимо удалить все элементы $b_i[k+1]$, входящие в $b_i[k+1]^*$. Относительно индикатора $\vec{b}_i[k+1]$ данная операция эквивалентна «обнулению» всех единичных скаляров индикатора, идентифицирующих элементы $b_i[k+1]^*$ в $b_i[k+1]$. «Обнуление» же единичных скаляров в булевом индикаторе $\vec{b}_i[k+1]$ биективно соответствующих элементам $b_i[k+1]^*$ в $b_i[k+1]$ равносильно операции его сложения по $mod\ 2$ с индикатором $\vec{b}_i[k+1]^*$ множества $b_i[k+1]^*$, $|\vec{b}_i[k+1]^*| = |\vec{b}_i[k+1]|$, а именно выполнению операции $\vec{b}_i[k+1] \oplus \vec{b}_i[\mathrm{k}+1]^*$. Таким образом, относительно любого собственного подмножества $b_i[k+1]^*$ множества $b_i[k+1]$ выполняется $\phi^{k+1}(\underset{i,j}{\setminus}(b_i[k+1],\ b_i[k+1]^*)) \equiv \underset{i,j}{\oplus}(\vec{b}_i[\mathrm{k}+1],\ \vec{b}_i[k+1]^*)$. В свою очередь, $b_i[k+1] \backslash b_j[k+1] \equiv b_i[k+1] \backslash (b_i[k+1] \bigcap b_j[k+1])$ и, согласно п. 2, $\phi^{k+1}(\bigcap\limits_{i,j}(b_i[k+1],\ b_j[k+1])) \leftrightarrow \underset{i,j}{\wedge}(\vec{b}_i[k+1],\ \vec{b}_j[k+1])$. Соответственно, вследствие очевидности условия $b_i[k+1] \bigcap b_j[k+1] \subseteq b_i[k+1]$, и для произвольных $b_i[k+1], b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$ выполняется $\phi^{k+1}(\underset{i,j}{\setminus}(b_i[k+1],\ b_j[k+1])) \equiv \phi^{k+1}(\underset{i,j}{\setminus}(b_i[k+1],\ (b_i[k+1] \bigcap b_j[k+1])) \equiv \underset{i,j}{\oplus}(\vec{b}_i[k+1],\ \underset{i,j}{\wedge}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]))$. Операции $\setminus$ и $\omega_{\setminus}^{I[k+1]}$ не коммутативны. Что и требовалось показать.

4. $\phi^{k+1}(\overline{b_i[k+1]}) \equiv \phi^{k+1}(\underset{i}{\setminus}(\mathfrak{B}[k,X], b_i[k+1])) \equiv \underset{i}{\oplus}(\vec{1},\ \underset{i}{\wedge}(\vec{1},\ \vec{b}_i[k+1])) \equiv \underset{i}{\oplus}(\vec{1}, \vec{b}_i[k+1]) \equiv \overline{\vec{b}_i[k+1]}^{\neg}$.

5. Для любых $b_i[k+1]$, $b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1,X]$ выполняется $b_i[k+1] \bigtriangleup b_j[k+1] \equiv b_j[k+1] \bigtriangleup b_i[k+1] \equiv (b_i[k+1] \setminus b_j[k+1]) \bigcup (b_j[k+1] \setminus b_i[k+1]) \equiv (b_i[k+1] \bigcup b_j[k+1]) \setminus (b_j[k+1] \bigcap b_i[k+1])$. $b_j[k+1] \bigcap b_i[k+1]$ есть собственное подмножество $b_i[k+1] \bigcup b_j[k+1]$ и для него биективный морфизм есть $\phi^{k+1}(\underset{i,j}{\setminus}(b_i[k+1], b_i[k+1]^*) \equiv \underset{i,j}{\oplus}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_i[k+1]^*)$. Соответственно, с учетом пп. 1-2 $\phi^{k+1}(\underset{i,j}{\bigtriangleup}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \equiv \phi^{k+1}(\underset{i,j}{\setminus}(b_i[k+1] \bigcup b_j[k+1], b_j[k+1] \bigcap b_i[k+1])) \equiv \underset{i,j}{\oplus}(\phi^{k+1}(b_i[k+1] \bigcup b_j[k+1]), \phi^{k+1}(b_i[k+1] \bigcap b_j[k+1])) \equiv \underset{i,j}{\oplus}(\underset{i,j}{\vee}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]), \underset{i,j}{\wedge}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]))$. Операции $\bigtriangleup$ и $\omega_{\bigtriangleup}^{I[k+1]}$ коммутативны. Что и требовалось показать ⊲⊲

В качестве опорной модели вычислений определим модель конечного булево векторного вычислителя из [6], где в качестве базовых операций сложности *O(1)* над элементами $[GF(2)]^n$ выбраны вышеупомянутые операции $\wedge, \vee, \neg, \oplus$ алгебры индикаторов на множестве $I^{\mathfrak{B}[1,X]}$. В качестве основного емкостного параметра модели определён объём её памяти в ячейках условной ёмкости 1 [5]. В рамках введённой модели вычислений имеет место следующее базовое утверждение.

Утверждение (теорема) 2. *Операционная сложность поиска произвольного непустого элемента $b_l[k]$ в упорядоченном булеане $\mathfrak{B}[k,X]$ k-уровня топологизации с множеством-носителем X, $|X| = n$ характеризуется значением O(const) условных операций на вышеопределённой вычислительной модели при емкостной сложности $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n-1}}}}-1} - 1 \times 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n-1}}}}-1} - 1$ ($k-1$ экземпляров 2 в показателе) двоичных разрядов («бит»)* ⊲

Доказательство. Согласно утверждению 1, на булеане k-уровня топологизации $\mathfrak{B}[k,X]$ произвольного конечного множества и множестве индикаторов его элементов $I^{\mathfrak{B}[k,X]}$ определены изоморфные алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[k,X]} \rightleftarrows \mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[k,X]}}$. Элемент $b_l[k]$ булеана $\mathfrak{B}[k,X]$ есть вполне определенное подмножество $\mathfrak{B}_l[k-1,X]$ множества $\mathfrak{B}[k-1,X]$, коих в $\mathfrak{B}[k,X]$ ровно $2^{|\mathfrak{B}[k-1,X]\setminus\varnothing|}$ экземпляров, а именно $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{|X|}-1}}}}-1}\}$ ($k-1$ экземпляров 2 в показателе), включая $\varnothing$. В свою очередь, для любого конечного $\mathfrak{B}[k,X] \setminus \varnothing$

(как множества *непустых* элементов с отношением строго порядка) можно определить упорядоченное множество индикаторов $I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$ из $[GF(2)]^{|\mathfrak{B}[k,X]\setminus\varnothing|}$ размерности $|\mathfrak{B}[k,X]|$-1 и мощности $|I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}| = 2^{|\mathfrak{B}[k,X]\setminus\varnothing|}$ (включая $\varnothing$), биективно соответствующее булеану множества X *(*$k+1$*)*-го уровня топологизации $\mathfrak{B}[k{+}1,X]$ $(I^{\mathfrak{B}[k+1,X]} \leftrightarrow \mathfrak{B}[k{+}1,X])$.

Произвольный *непустой* элемент булеана $b_l[k]$ (*непустое* подмножество $\mathfrak{B}_l[k-1,X] \subseteq \mathfrak{B}[k-1,X]$), $l = \overline{1, 2^{|\mathfrak{B}[k-1,X]\setminus\varnothing|} - 1}$ однозначно характеризуется булевым индикатором

$$\vec{b}_l[k] = (\underset{1}{0} \ \ldots \ \overset{k}{1} \ \ldots \ \underset{2^{|\mathfrak{B}[k-1,X]\setminus\varnothing|}-1}{0})$$

размерности $2^{|\mathfrak{B}[k-1,X]\setminus\varnothing|}-1$ $(|\mathfrak{B}[k,X]\setminus\varnothing|)$, упорядоченным в порядке нумерации вектора, единица в котором располагается на месте соответствующему значению индекса k, а нули - на всех оставшихся местах. Множеству $\mathfrak{B}[k,X]\setminus\varnothing$ соответствует единичный вектор $\vec{1} \in [GF(2)]^{2^{|\mathfrak{B}[k-1,X]\setminus\varnothing|-1}}$. Произвольное собственное подмножество $\mathfrak{B}_\tau[k,X] \subseteq \mathfrak{B}[k,X]$, $\mathfrak{B}_\tau[k,X] \equiv \{b_{i_1}[k], \ \ldots, b_{i_m}[k]\}$, однозначно характеризуемое *упорядоченным* набором натуральных чисел-индексов $(i_1, \ \ldots, \ i_m)$, $i_j \in \{\overline{1, 2^{|\mathfrak{B}[k-1,X]\setminus\varnothing|} - 1}\}$, $j = \overline{1,m}$, $i_r \neq i_s$ для $\forall \ r \neq s$ и $i_r < \ i_s$ при $r < s$, представимо булевым индикатором

$$\vec{b}_\tau[k] = (\underset{1}{0} \ \ldots \ \overset{i_1}{1} \underset{\cdots}{\therefore\because} \overset{i_m}{1} \ \ldots \ \underset{2^{|\mathfrak{B}[k-1,X]\setminus\varnothing|}-1}{0})$$

Тогда, для идентификации (поиска) элемента $b_l[k]$ в произвольном $\mathfrak{B}_\tau[k,X] \subseteq \mathfrak{B}[k,X]$ достаточно выполнить следующие операции на вышеопределённой вычислительной модели.

Алгоритм 1.

1 : $\vec{x}{:=}\vec{b}_l[k]\&\vec{b}_\tau[k]$ *Размерность* $\vec{x}$ *совпадает с размерностью* $2^{|\mathfrak{B}[k-1,X]\setminus\varnothing|} - 1$ $(|\mathfrak{B}[k,X]\setminus\varnothing|)$ *индикаторов* $\vec{b}_\tau[k]$, $\vec{b}_l[k]$

2 : $\vec{x}{:=}\vec{x} \oplus \vec{b}_l[k]$

3: If $\vec{x} = 0$ JZ 6: *Jump to zero (если* 0*, то на*6:*)*

4: Нет

5: Stop

6: Да

7: Go to 5:

Размерность индикатора $\vec{b}_l[k]$ есть $2^{|\mathfrak{B}[k-1,X]\backslash\varnothing|}-1$ $(|\mathfrak{B}[k,X]\backslash\varnothing|)$. Общее число индикаторов непустых элементов $\mathfrak{B}[k,X]\backslash\varnothing$ (базис $[GF(2)]^{|\mathfrak{B}[k,X]\backslash\varnothing|}$) есть $|\mathfrak{B}[k,X]\backslash\varnothing| = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot 2^n-1}}}-1}-1$ ($k-1$ экземпляров 2 в показателе). Таким образом, ёмкостная сложность алгоритма составляет $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot 2^n-1}}}-1}-1 \times 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot 2^n-1}}}-1}-1$ ($k-1$ экземпляров 2 в показателе) двоичных разрядов («бит»). Что и требовалось показать $\triangleleft\triangleleft$

Следствие к утверждению 2. *Операционная сложность поиска произвольного собственного подмножества $\mathfrak{B}_l[k-1,X]$ в упорядоченном множестве $\mathfrak{B}[k-1,X]$ характеризуется значением в $O(const)$ условных операций на вышеопределённой вычислительной модели при ёмкостной сложности $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot 2^n-1}}}-1}-1 \times 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot 2^n-1}}}-1}-1$ ($k-1$ экземпляров 2 в показателе) двоичных разрядов* $\triangleleft$

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из утверждения 2 вследствие того, что произвольный непустой элемент $b_l[k]$, $l=\overline{1, 2^{|\mathfrak{B}[k-1,X]\backslash\varnothing|}-1}$ булеана $\mathfrak{B}[k,X]$ есть *непустое* собственное подмножество $\mathfrak{B}_l[k-1,X]$ множества $\mathfrak{B}[k-1,X]$. Пустое же подмножество $(\varnothing)$ априори принадлежит $\mathfrak{B}[k-1,X]$ $\triangleleft\triangleleft$

Вполне определ¨нные ограничения, налагаемые на объ¨м настоящих трудов, не позволяют более подробно раскрыть в предлагаемой работе взаимосвязь полученных результатов с алгебрами на семиотико-хроматических гипертопографах (в аксиоматической системе $[G]^1$) и, далее, с архитектурой вычислений перспективного ¨мкостного паракомпьютера управления знаниями [1-5]. Особенности морфизмов перечисленных моделей и аспекты их реализации на практике предполагается изложить отдельным образом.

Автор выражает искреннюю благодарность коллективу кафедры МАТИС мех.-матем. факультета МГУ им. М.В.Ломоносова и лично В.Б. Кудрявцеву и Э.Э Гасанову за ценные рекомендации и содействие в подготовке работы.

Список литературы

[1] Баранович А.Е. K-гиперпространство семиотико-хроматических гипертопографов как универсальная модель представления фактографических знаний / Матер. IX междунар. конф. «Интеллект.

сист. и компьют. науки». Т. 1. Ч. 1. - М., Изд. мех.-мат. фак-та МГУ, 2006. С. 53-55.

[2] Баранович А.Е. Многоосновные СХ-гипертопографы - однообъектная парадигма / Тр. Конгресса по интеллект. системам и информ. технол. «IS&IT'11». Науч. изд. в 4-х т. - М., Физматлит, 2011. Т. 1. С. 377-385.

[3] Баранович А.Е. Однообъектная парадигма в обобщениях графов / Тр. XI междунар. Колмогоровских чт.: сб. ст. - Ярославль, Изд-во ЯГПУ, 2013. С. 57-62.

[4] Баранович А.Е., Соловьев И.П. Алгебраизация гипертопографов: особенности аксиоматической реализации / Тр. XII междунар. Колмогоровских чт.: сб. ст. - Ярославль, Изд-во ЯГПУ, 2014. С. 45-51.

[5] Баранович А.Е., Соловьев И.П. О некоторых предельных схемах кодирования гипертопографов / Тр. Конгресса по интеллект. сист. и информ. технол. «IS&IT'14». Науч. изд. в 4-х т. - М., Физматлит, 2014. Т. 2. С. 53-60.

[6] Баранович А.Е. Алгебры на индикаторах множеств / Тр. Конгресса по интеллект. сист. и информ. технол. «IS&IT'14». Науч. изд. в 4-х т. - М., Физматлит, 2014. Т. 1. С. 204-211.

[7] Баранович А.Е. Семиотико-хроматические гипертопографы. Введение в аксиоматическую теорию: информационный аспект. 2-е изд., испр. и доп. - М., Центр САММ, 2015.

[8] Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. - М.: Наука, Главн. ред. физ.-матем. лит., 1982.

[9] Barwise J. Admissible sets and structures. - Berlin, Springer et al., 1975.