

Компьютерные модели в геометрии и динамике

В. Ведюшкина (Фокичева)*, А. Иванов[†], А. Тужилин[‡], А. Фоменко[§]

Аннотация

В работе описаны нетривиальные примеры моделирования сложных задач динамики и геометрии.

Важность компьютерного моделирования в современном мире трудно переоценить. Компьютерные модели играют важную роль не только при решении практических задач, но и при изучении чисто научных вопросов. Хорошая компьютерная модель часто позволяет не только опровергнуть гипотезу, но и сформулировать нетривиальную теорему, и даже наметить методы ее доказательства. Впрочем задачи, которые нужно моделировать, часто оказываются настолько сложны, что их непосредственное моделирование само становится нетривиальной задачей. Поэтому большой интерес представляют случаи, когда удастся подменить одну задачу другой, более простой и наглядной, и, значит, легче поддающейся как изучению, так и моделированию. В данной работе мы приведем два таких нетривиальных примера. Первый относится к теории динамических систем. Как было недавно показано Фокичевой и Фоменко [11], многие классические динамические системы, описывающие движение твердого тела в тех или иных условиях, могут быть описаны с помощью более наглядных механических систем — бильярдов. Второй пример относится к метрической геометрии и связан с изучением кратчайших кривых в метрическом пространстве замкнутых ограниченных подмножеств некоторого метрического пространства. В качестве функции расстояния берется расстояние по Хаусдорфу. Оказывается, задача изучения множества кратчайших кривых, соединяющих пару точек в этом пространстве сводится к описанию реберных покрытий двудольных графов. Нетривиальный факт состоит в том, что количество таких покрытий не может быть любым. Первая такая «лакуна» была найдена в [36], где было показано, что среди натуральных чисел от 1 до 19 все, кроме 19, могут быть реализованы как количества реберных покрытий. Недавно последовательность «запрещенных» чисел удалось продолжить с помощью довольно сложного компьютерного моделирования.

*Ассистент кафедры дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: arinir@yandex.ru.

[†]Профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова; профессор кафедры математического моделирования, МГТУ имени Н.Э.Баумана, e-mail: aoiva@mech.math.msu.su.

[‡]Профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: tuz@mech.math.msu.su.

[§]Академик РАН, профессор, кафедры дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: atfomenko@mail.ru.

1 Скрытые симметрии. Биллиарды и математическая физика.

1.1 Введение.

Интегрируемость биллиарда в плоской области, ограниченной эллипсом, замечена в работе [2] Дж. Д. Биркгофа. Интегрируемость геодезического потока на эллипсоиде следует из теоремы Якоби-Шаля. При стремлении меньшей полуоси эллипсоида к нулю движение по геодезическим переходит в движение по ломаным, целиком лежащим в образе эллипсоида – плоской области, ограниченной эллипсом. Интегрируемость биллиарда сохраняется, если перейти к плоским областям, ограниченным дугами эллипсов и гипербол одного софокусного семейства, на границе которых нет точек излома с углами $\frac{3\pi}{2}$. В этом случае все углы в точках излома равны $\frac{\pi}{2}$, поскольку софокусные квадррики пересекаются всегда под прямым углом. В книге [3] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв заметили, что эти динамические системы вполне интегрируемы по Лиувиллю (т.е. имеется дополнительный независимый интеграл Λ), а именно, что интегрируемость данных систем эквивалентна малой теореме Понселе. Для системы плоского биллиарда в эллипсе построены координаты, в которых движение представляется в виде периодического движения по торах. Такие системы с точностью до лиувиллево эквивалентности подробно изучены в работах [5, 6] В. Драгович, М. Раднович, а также [7, 8] В. В. Фокичевой.

В работах В. В. Фокичевой классифицированы все локально-плоские биллиарды, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол (при этом не обязательно изометрично вложимые в плоскость), а также области, не обязательно являющиеся плоскими, полученные склейками элементарных областей вдоль выпуклых сегментов границ. Далее, В. В. Фокичева исследовала топологию слоений Лиувилля на изоэнергетических поверхностях таких биллиардов, вычислив меченые молекулы Фоменко-Цишанга – инварианты лиувиллево эквивалентности.

Две гладкие интегрируемые системы называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм, переводящий слоение Лиувилля одной системы в слоение Лиувилля другой системы. Если гладкие торы Лиувилля на всюду плотном множестве являются замыканиями нерезонансных траекторий (как в большинстве невырожденных классических случаев интегрируемости), то лиувиллево эквивалентность систем означает, что они имеют “одинаковые” замыкания решений (т.е. интегральных траекторий) на трёхмерных уровнях постоянной энергии. В случае биллиардов торы Лиувилля, слоение Лиувилля и интегральные траектории системы являются кусочно-гладкими, поэтому нерезонансность почти всех торов Лиувилля нами пока подробно не изучалась. Тем не менее, слоение Лиувилля и лиувиллево эквивалентность здесь корректно определены.

Топологический тип слоения Лиувилля полностью определяется инвариантом Фоменко–Цишанга, который является некоторым графом с числовыми метками (см. теорему А. Т. Фоменко и Х. Цишанга в [14], а также в книге [4] А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко). Анализируя большое число вычисленных на настоящее время меченых молекул как различных биллиардов, так и других интегрируемых системы с двумя степенями свободы, А. Т. Фоменко сформулировал следующую гипотезу: многие достаточно сложные случаи интегрируемости (например, в динамике твердого тела) можно “моделировать” значительно более наглядными топологическими биллиардами. В частности, это позволяет эффективно предъявлять устойчивые и неустойчивые периодические решения (траектории) интегрируемых систем. Эта гипотеза получила подтверждение в работе

В.В.Фокичевой и А.Т.Фоменко [11]. А именно, для многих интегрируемых случаев динамики твердого тела для ряда изоэнергетических поверхностей вычисление инварианта Фоменко-Цишанга позволило обнаружить лиувиллеву эквивалентность этих систем топологическим бильярдам путём сравнения меченых молекул (см. [11]). Тем самым, образно говоря, локально-плоские интегрируемые бильярды “наглядно моделируют” многие достаточно сложные случаи интегрируемости в динамике твердого тела.

1.2 Инварианты интегрируемых систем

Определение 1.1. Пусть $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$ — две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M_1^4 и M_2^4 , обладающих, соответственно, интегралами f_1, g_1 и f_2, g_2 . Рассмотрим изоэнергетические поверхности $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$. Интегрируемые гамильтоновы системы называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$, который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию всех критических окружностей, см. [13].

Пусть (M^4, ω, f_1, f_2) — интегрируемая по Лиувиллю невырожденная гамильтонова система на симплектическом многообразии M^4 , обладающая интегралами f_1 и f_2 . Изоэнергетическое многообразие $Q^3 = \{x \in M^4 : f_1(x) = c_1\}$ расслоено на регулярные двумерные поверхности уровня функции f_2 , а именно на торы, цилиндры или плоскости (в силу теоремы Лиувилля) и особые слои. Это слоение называется слоением Лиувилля. Многообразие Q^3 фактически представляет собой склейку регулярных окрестностей особых слоев друг с другом по граничным торам. Рассмотрим базу возникающего слоения Лиувилля на Q^3 . Эта база является одномерным графом W , называемым графом Кронрода-Риба функции $f_2|_{Q^3}$. Структура слоения в малой окрестности особого слоя, отвечающего любой вершине этого графа, описывается комбинаторным объектом, называемым атомом. Граф, для каждой вершины которого указан соответствующий атом, называется инвариантом (грубой молекулой) Фоменко. В вершинах W расположены “атомы”, описывающие соответствующие бифуркации торов Лиувилля. На каждом ребре графа W можно указать стрелкой ориентацию этого ребра, см. подробности [4, 13].

Приведём примеры часто встречающихся двумерных атомов. Атом A гомеоморфен диску — он расслоен на концентрические окружности, стягивающиеся на особый слой — центральную точку. Атом B представляет собой перестройку одной окружности в две, особым слоем является “восьмерка”. Атом C_2 представляет собой перестройку двух окружностей в две. Эти атомы представлены на рис. 1.

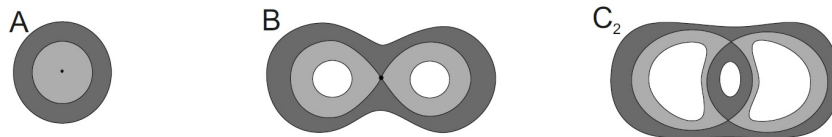


Рис. 1: Двумерные атомы A , B и C_2 .

Рассмотрим топологически устойчивую интегрируемую систему с боттовским интегралом f (см. [4, 13]) на Q^3 и пусть L — связный особый слой слоения Лиувилля на Q . Пусть $U(L)$ — связная инвариантная трехмерная окрестность этого слоя. Тогда $U(L)$ — 3-многообразие со структурой слоения Лиувилля, называемое 3-атомом. Точнее, два

таких многообразия будем считать Лиувиллево эквивалентными, если во-первых, между ними существует послойный диффеоморфизм, а во-вторых, этот диффеоморфизм сохраняет ориентацию 3-многообразий и ориентацию на критических окружностях, задаваемых гамильтоновым потоком.

Такой класс эквивалентности многообразия $U(L)$ называется 3-атомом.

Теорема 1 (А. Т. Фоменко [4, 13]). 1. Многообразие $U(L)$, т.е. 3-атом, несёт на себе структуру расслоения Зейферта, где особые слои имеют тип $(2,1)$.

2. База расслоения Зейферта на 3-атоме $U(L)$ имеет естественную структуру 2-атома.

3. Проекция $\pi : (U(L), L) \rightarrow (P^2, K)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между 3-атомами и 2-атомами.

4. Особые слои типа $(2,1)$ в $U(L)$ соответствуют “звездочкам” на 2-атоме (P^2, K) .

Трёхмерный атом без звездочек послойно гомеоморфен прямому произведению соответствующего двумерного атома на окружность. Простейший 3-атом со звездочкой, а именно атом A^* , получается из двумерного атома B косым умножением на окружность: необходимо “прокрутить” атом B на π . В результате, атому A^* будет соответствовать перестройка одного тора в один.

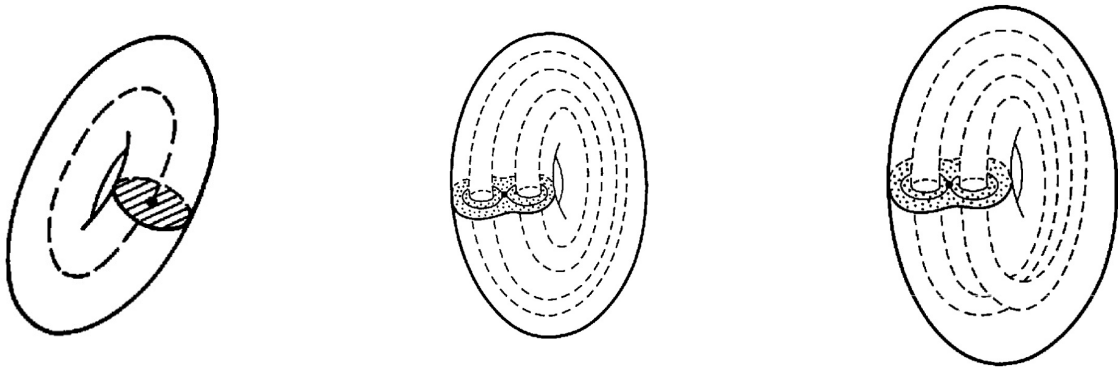


Рис. 2: Трёхмерные атомы A , B , A^*

Для описания топологии слоения необходимо выбрать пары так называемых допустимых базисов на граничных торах и указать матрицы перехода от одного базиса к другому. Структура атома-бифуркации задаёт правило выбора допустимого базиса. Подробное изложение см. в работах [4, 12, 13, 14]. Таким образом в точке каждого ребра грубой молекулы W , представляющей собой тор Лиувилля, определены два допустимых базиса. Для каждой такой пары базисов можно указать матрицу перехода от одного базиса к другому, которая называется матрицей склейки. Так как в допустимом базисе однозначно выбирается лишь один цикл (дополнительный цикл выбирается неоднозначно), то полученная матрица склейки может меняться при замене одних допустимых базисов на другие. Однако, по матрице склейки можно определить ряд чисел-меток, которые для всех таких матриц будут совпадать (см. [4, 12, 13, 14]). Эти числовые метки — r , ε и n — инвариантны относительно допустимых замен базисов на граничных торах (см. леммы 4.5 и 4.6 книги [4]).

Определение 1.2. Молекула W , снабжённая числовыми метками r , ε и n_k , называется меченой молекулой W^* или инвариантом Фоменко-Цишанга.

Теорема 2 (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг [4]). *Две невырожденные топологически устойчивые интегрируемые гамильтоновы системы на регулярных изоэнергетических поверхностях $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

1.3 Топологические интегрируемые бильярды.

Пусть область Ω на плоскости \mathbb{R}^2 такова, что граница области является кусочно-гладкой кривой, причем в точках излома этой кривой углы равны $\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение (материальной) точки внутри Ω с естественным отражением на границе $P = \partial\Omega$. Эту систему назовём “бильярдом в области”. Будем считать, что в точках, где граница P не гладкая (тогда, как было сказано, угол излома обязательно равен $\frac{\pi}{2}$) траектории системы можно доопределить по непрерывности: а именно, попав в вершину угла границы, материальная точка, не теряя скорости, отразится назад по той же траектории. Таким образом, фазовым пространством системы является многообразие

$$M^4 := \{(x, v) \mid x \in \Omega, v \in T_x\mathbb{R}^2, |v| > 0\} / \sim$$

где отношение эквивалентности задаётся так

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P, \quad |v_1| = |v_2| \quad \text{и} \quad v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P.$$

Здесь через $T_x P$ обозначена касательная плоскость к области Ω в точке x , а через $|v|$ – евклидова длина вектора v .

Система бильярда в общем случае не является гладкой, так как склейка в точках границы, как правило, не позволяет ввести гладкую структуру в декартовых координатах. Необходимо видоизменить определения выше с учетом граничных точек. Используемый нами подход и определения предложены А. Т. Фоменко; см. также работы В.Лазуткина [17] и Е. А. Кудрявцевой [15].

Для класса бильярдов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол кусочно-гладкая теорема Лиувилля доказана в работе В.В.Фокичевой [10]. В настоящей работе мы пользуемся этими результатами.

Пусть плоская область Ω ограничена сегментами софокусных квадрик.

Теорема 3 (Якоби, Шаль [3]). *Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в n -мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще $n - 2$ конфокальных с ней квадрик, одна и та же для всех точек данной геодезической.*

В плоском двумерном случае из теоремы Якоби-Шалья следует, что касательные в любой точке бильярдной траектории внутри области Ω касаются эллипса или гиперболы, софокусных с семейством квадрик, образующих границу P области Ω .

Относительно стандартной симплектической структуры на плоскости, функции $|v|$ – модуль вектора скорости – и Λ – параметр софокусной квадрики коммутируют. Так как они сохраняются вдоль траекторий бильярда, значит в пределе они коммутируют и на границе области. Таким образом, данная “бильярдная” система обладает двумя независимыми (см. [3]) интегралами:

1. $|v|$ – модуль вектора скорости,

2. Λ — параметр софокусной квадрики.

В данной работе под софокусными квадриками мы понимаем семейство софокусных эллипсов и гипербол. Биллиард в области, ограниченной дугами софокусных парабол, также интегрируем. Слоения Лиувилля таких биллиардов с точностью до лиувиллевой эквивалентности классифицированы в работе [9].

Фиксируем декартовы координаты (x, y) на плоскости \mathbb{R}^2 . Рассмотрим семейство софокусных квадрик — кривых, задаваемых соотношением

$$x^2(b - \lambda) + y^2(a - \lambda) = (a - \lambda)(b - \lambda), \quad (1.1)$$

где $a > b > 0$ — фиксированные параметры семейства, а λ — параметр квадрики. При $\lambda < b$ ($b < \lambda < a$) соотношение задает семейство софокусных эллипсов (соответственно гипербол). При $\lambda = b$ соотношение задаёт прямую Ox , которую можно рассмотреть как объединение двух вырожденных гипербол — лучей из фокусов семейства и вырожденного эллипса — отрезка между фокусами. При $\lambda = a$ соотношение задаёт прямую Oy , которую можно рассмотреть как предельную гиперболу. В дальнейших рассуждениях прямую Oy мы будем считать гиперболой.

В качестве примера рассмотрим биллиард в эллипсе с параметром $\lambda = 0$. Покажем, как ведут себя траектории на разных уровнях интеграла Λ (подробнее, см. [3]). Пусть $\Lambda = 0$. Этому значению интеграла соответствуют две траектории, соответствующие движениям по границе эллипса и закручивающиеся в разные стороны. При $\Lambda \in (0, b)$ траектории касаются эллипса с параметром Λ — они также разбиваются на два класса — закручивающиеся по и против часовой стрелки. Значению интеграла $\Lambda = b$ соответствует особый слой 3-атома B (см. [7]): на нём лежат траектории, последовательно проходящие через фокусы семейства 1.1. Критической окружностью является траектория, проходящая вдоль большей оси эллипса. При $\Lambda \in (b, a)$ касательные к траектории касаются гиперболы с параметром Λ . Значению параметра $\Lambda = a$ отвечает вертикальная траектория вдоль меньшей оси эллипса.

В дальнейшем вместо слов “область” или “биллиардная область” мы будем писать “биллиард”.

Определение 1.3. *Простейшим элементарным компактным (плоским) биллиардом* назовём плоское, компактное, изометрично вложимое в плоскость многообразие с краем, граница которого при этом вложении ограничена дугами софокусных эллипсов и гипербол и не содержит углов, превышающих π . *Составным элементарным компактным (локально-плоским) биллиардом* назовем компактное локально-плоское многообразие, которое получается в результате нескольких склеек из конечного числа простейших элементарных биллиардов вдоль некоторых граничных дуг гипербол таким образом что, во-первых, склеиваемые биллиарды при их вложениях в плоскость локально находятся по разные стороны от дуги склейки (в случае если дуга является прямолинейным отрезком мы опускаем это требование), во-вторых, при этом на границе области не образуются углы, превышающие π , в третьих, граничные дуги склеиваются при помощи изометрий. При этом мы не требуем, чтобы существовало изометричное вложение в плоскость составного элементарного биллиарда целиком. Простейшие и составные элементарные биллиарды для краткости мы будем называть просто *элементарными*.

Определение 1.4. Элементарный биллиард (Ω, U_i) , ограниченный дугами квадрик из софокусного семейства (1.1), называется **эквивалентным** другому элементарному биллиарду (Ω', U'_i) , ограниченному дугами квадрик из того же семейства (1.1), если (Ω', U'_i) можно получить из (Ω, U_i) путем композиции следующих преобразований.

- Последовательным изменением сегментов границы в образах некоторых простейших элементарных билиардов U_i при их изометричных вложениях в плоскость путем непрерывной деформации в класс квадрик (1.1), так, чтобы значение параметра λ изменяемого сегмента границы не принимало значения b . При этом потребуем, чтобы одновременно менялись и оставались равными друг другу значения параметра λ для квадрик (гипербол), содержащих образы общей граничной дуги любых двух пересекающихся простейших элементарных билиардов при их изометричных вложениях в плоскость, согласованных на этой дуге до деформации (а потому также во время и после деформации), а также одновременно меняются и остаются равными друг другу значения параметра λ для квадрик (эллипсов), содержащих образы эллиптических граничных сегментов (разных элементарных билиардов), имеющих общую вершину.
- Симметрией относительно оси семейства (1.1) во всех простейших элементарных билиардах U_i одновременно;
- объединением нескольких простейших элементарных билиардов в один или же путем разбиения одного элементарного билиарда на более мелкие.

Мы будем различать граничные сегменты четырёх типов: эллипс, дуга невырожденной гиперболы, заключённая между двумя эллипсами, дуга невырожденного эллипса, заключённая между двумя гиперболами, отрезок фокальной прямой.

Пусть дан набор компактных билиардов Ω_i , ограниченных дугами одного и того же софокусного семейства квадрик. Введём понятие обобщенного билиарда. Обобщенный билиард Δ состоит из нескольких элементарных билиардов Ω_i , склеенных по общим выпуклым эллиптическим сегментам границы (и, возможно, по некоторым гиперболическим, с образованием так называемых конических точек) при этом мы запрещаем все склейки, приводящие либо к углам больше чем π на границе полученного обобщенного билиарда, либо к углам больше чем 2π во внутренних точках этого билиарда.

Траектория обобщенного билиарда “перескакивает” с одного элементарного билиарда на другой в точках пересечения с рёбрами склейки и отражается по стандартному закону отражения при ударе о границу билиарда Δ (см. рис. 3).

Оговорим отдельно случай конической точки, в которой склеиваются два угла различных элементарных билиардов Ω , входящих в состав билиарда Δ . В этом случае, как легко понять из соображений непрерывности, закон отражения будет выглядеть так – материальная точка, проходя по элементарному билиарду Ω , попав в коническую точку, отразится по той же прямой и будет продолжать движение на тому же элементарному билиарду Ω (см. рис. 3). То есть, “перескакивание” материальной точки в конце ребра склейки возможно, только если локально в этой вершине излома определена склейка четырех элементарных билиардов.

При таком определении фазового многообразия M^4 сохраняется интегрируемость системы.

Определение 1.5. Обобщённый билиард Δ , склеенный из элементарных билиардов Ω_i вдоль ребер склейки f_{ij} называется *эквивалентным* другому обобщённому билиарду Δ' , склеенному из Ω'_i вдоль ребер склейки f'_{ij} , если Δ' можно получить из Δ путем замены элементарных билиардов Ω_i на им эквивалентные.

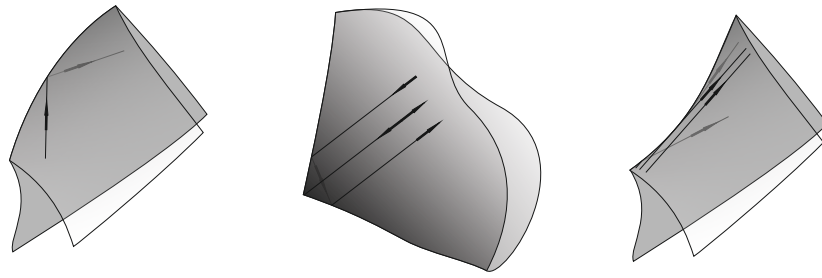


Рис. 3: Слева показано движение в обобщенном бильярде на выпуклой границе склейки двух элементарных бильярдов, на рисунке по центру показано, как именно движение в конической точке доопределяется по непрерывности. На рисунке справа видно, что если граница склейки является невыпуклой, то для траекторий, касательных к границе склейки при ударе нельзя определить непрерывное продолжение – после удара о невыпуклую границу они могут как остаться на том же, так и перейти на другой лист, как пределы двух типов траекторий.

1.4 Моделирование некоторых систем математической физики с помощью бильярдов.

Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга элементарных и обобщенных бильярдов позволило обнаружить их совпадение в большом числе случаев с инвариантами, вычисленными ранее в случаях интегрируемости в динамике твердого тела (Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Ковалевской-Яхьи, Клебша и Соколова). Это позволило доказать лиувиллеву эквивалентность случаев интегрируемости в динамике твердого тела элементарным и обобщенным бильярдам. В работах [10, 11] приведён список в то время обнаруженных лиувиллево эквивалентных слоений и указаны области на бифуркационных диаграммах случаев Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, соответствующие этим изоэнергетическим 3-поверхностям. Для каждого инварианта указан бильярд моделирующий поведение решений на данных изоэнергетических поверхностях.

В настоящее время школой А.Т.Фоменко вычислены новые инварианты лиувиллевой эквивалентности. В частности, С.С.Николаенко в работе [28] полностью классифицировал изоэнергетические 3-многообразия системы Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости, а в работе [29] им были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга для интегрируемых систем типа Горячева. В статье [30] Г.М.Сечкин изучил топологию динамики эллипсоида вращения, движущегося по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы тяжести, также дав ответ в терминах молекул Фоменко-Цишанга.

Теорема 4 ([11]). *Следующие случаи динамики твердого тела моделируются (лиувиллево эквивалентны) следующим обобщенным бильярдами:*

- случай Эйлера, см. [4], полностью моделируется обобщенными бильярдами, указанными на рисунках 4а,з,и, соответствующих зонам I, II, III энергии H , соответственно;
- случай Лагранжа, см. [4, 24], моделируется обобщенными бильярдами, указанными на рисунке 4в – зона энергии 5;
- случай Ковалевской, см. [4], моделируется обобщенными бильярдами, указанными на рисунке 4в – зона энергии 5;

	Обобщенный бильярд	Инвариант Фоменко-Цишанга, описывающий обобщенный бильярд	Эквивалентные известные случаи интегрируемости для твердого тела
а		$A \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} A$	Лагранж, Эйлер, Горячев, Чаплыгин, эллипсоид вращения на гладкой плоскости
б		$A \xrightarrow[r=1/2 \quad \varepsilon=1]{} A$	Лагранж, Жуковский, эллипсоид вращения на гладкой плоскости
в		$A \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} B \begin{cases} \xrightarrow[r=\infty \quad \varepsilon=1]{} A \\ \xrightarrow[r=\infty \quad \varepsilon=1]{} A \end{cases}$	Ковалевская, Горячев-Чаплыгин-Сретенский, Жуковский, Ковалевская-Яхья
г		$A \xrightarrow[r=\infty \quad \varepsilon=1]{} B \begin{cases} \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} A \\ \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} A \end{cases}$	Жуковский, Горячев
д		$A \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} B \begin{cases} \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} A \\ \xrightarrow[n=1]{} A \\ \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} A \end{cases}$	Клебш, Соколов, Ковалевская-Яхья, Горячев
е		$A \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} B \begin{cases} \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} A \\ \xrightarrow[n=2]{} A \\ \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} A \end{cases}$	Жуковский, эллипсоид вращения на гладкой плоскости
ж		$A \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} A^* \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} A$ $n=0$	Горячев-Чаплыгин-Сретенский
з		$A \xrightarrow[r=\infty \quad \varepsilon=1]{} C_2 \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} A$ $A \xrightarrow[r=\infty \quad \varepsilon=1]{} C_2 \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} A$	Эйлер, Клебш, Чаплыгин
и		$A \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} C_2 \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} A$ $A \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} C_2 \xrightarrow[r=0 \quad \varepsilon=1]{} A$ $n=2$	Эйлер, Клебш, Соколов, Чаплыгин

Рис. 4:

- случай Горячева-Чаплыгина-Сретенского, см. [4, 23, 24] моделируется обобщенными бильярдами, указанными на рисунках 4в – зона энергии 4, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$,
4ж – зона энергии 2, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$;
- случай Жуковского, см. [4, 19, 20] моделируется обобщенными бильярдами, указанными на рисунках 4б – зона энергии 11, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq RP^3$, 4в – зона энергии 2, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$, 4г – зона энергии 8, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$, 4е – зона энергии 12, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq RP^3$;
- случай Ковалевской-Яхьи, см. [27], моделируется обобщенными бильярдами, указанными на рисунках 4в – зона энергии h_{16} , изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$, 4д – зона энергии h_{18} , изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$;
- случай Клебша, см. [25], моделируется обобщенными бильярдами, указанными на рисунках 4д – зона энергии 2, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$, 4з – зоны энергии 10,12, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$, 4и – зона энергии 5, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq RP^3$;
- случай Соколова, см. [26], моделируется обобщенными бильярдами, указанными на рисунках 4д – зона энергии B , изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$, 4и – зона энергии I , изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq RP^3$.
- случай Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости, см. [28], моделируется обобщенными бильярдами, указанными на рисунках 4а,з,и, отвечающих зонам энергии (1), (2) и (3) соответственно;
- случай Горячева, см. [28], моделируется обобщенными бильярдами, указанными на рисунке 4а, – зоны энергии (1) и (3), 4г – зона энергии (2), 4д – зона энергии (4);
- случай динамики эллипсоида вращения, движущегося по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы тяжести, см. [30], моделируется обобщенными бильярдами, указанными на рисунке 4а,б, е.

1.5 Наглядный пример: известный случай Эйлера моделируется простым бильярдом.

В случае Эйлера топология слоения изоэнергетической поверхности Q^3 при нулевой постоянной площадей позволяет наглядно продемонстрировать поведение периодических решений. Напомним следующий известный эксперимент. Рассмотрим обычную книгу (вместо книги можно взять деревянный брусок в форме книги). Ориентируем её в горизонтальной плоскости, как показано на рис. 5 и подбросим вверх, закрутив книгу вокруг ее горизонтальной оси симметрии, проходящей через центр книги. Затем поймаем книгу и посмотрим, в каком положении она вернулась к нам. Оказывается, результат существенно зависит от того, как мы ориентировали книгу перед началом броска. У книги есть три взаимно перпендикулярных оси симметрии. Если подбросить книгу, закрутив ее вокруг оси, отвечающей наименьшему моменту инерции, то книга вернется назад в том же положении, какое она занимала до броска. Если книга подброшена и

закручена вокруг оси, отвечающей максимальному моменту инерции, то эффект будет тот же. Совсем другая картина возникнет, когда мы подбросим книгу, закрутив ее вокруг оси, отвечающей среднему моменту инерции. Если в начале корешок книги был в левой руке, то поймав книгу в воздухе, вы обнаружите, что корешок оказался в вашей правой руке.

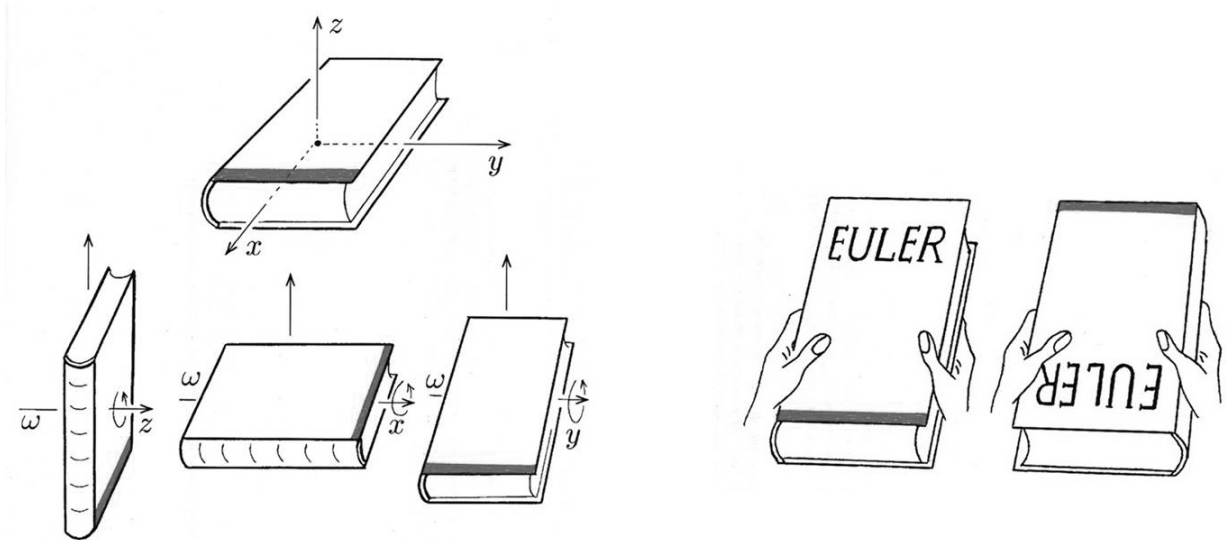


Рис. 5: Эксперимент с книгой.

Это любопытное обстоятельство объясняется так. Полет книги хорошо моделирует случай Эйлера в динамике тяжелого твердого тела. Достаточно забыть о движении центра масс книги, т. е. рассматривать только ее “чистое вращение” вокруг центра масс. Кроме того, можно считать, что постоянная площадей здесь равняется нулю. Дело в том, что при каждом из бросков мы закручиваем книгу вокруг горизонтальной оси, идущей по одному из собственных направлений тензора инерции. Следовательно, вектор кинетического момента пропорционален вектору угловой скорости. Сила тяжести направлена вертикально вниз, то есть ортогональна кинетическому моменту книги. Поскольку постоянная площадей получается как скалярное произведение кинетического момента на вектор силы тяжести, следовательно, в данном эксперименте эта постоянная равна нулю. Поэтому мы попадаем в ситуацию случая Эйлера с нулевой постоянной площадей. Полет книги можно интерпретировать как движение по интегральной траектории динамической системы случая Эйлера на изоэнергетической трехмерной поверхности. Качественный характер движения определяется топологией слоения Лиувилля. Три движения книги в пространстве отвечают трем типам интегральных траекторий.

Первый тип – это устойчивые периодические траектории двух “верхних атомов” A на молекуле. Механически – это вращение книги вокруг минимальной оси ее эллипсоида инерции. Движение устойчиво, и книга возвращается в прежнее положение.

Второй тип – это устойчивые периодические траектории двух “нижних атомов” A на молекуле. Это – вращение книги вокруг максимальной оси эллипсоида инерции. Такое движение также устойчиво, что мы и видим.

Третий тип определяется двумя гиперболическими периодическими траекториями, отвечающими седловому атому C_2 . Это – две траектории, проходящие через его вершины. Полет книги в данном случае задается интегральной траекторией, начинающейся

вблизи первого седлового периодического решения. Теоретически можно было бы закрутить книгу так, чтобы соответствующая точка все время двигалась бы по седловой периодической траектории. Но на практике этого сделать нельзя. Неизбежно присутствующее малое возмущение заставит книгу двигаться по интегральной траектории, которая лишь сначала близка к седловому периодическому решению. Но затем траектория быстро удаляется от него и через некоторое время начинает приближаться ко второму седловому периодическому решению. Интегральная траектория в действительности движется по плоскому кольцу (на особом слое 3-атома C_2), “смаываясь” с его наружной границы и “наматываясь” на внутреннюю границу кольца. Таким образом, в тот момент, когда вы ловите книгу, интегральная траектория уже почти достигла второго периодического решения. А это и есть в точности эффект “переворачивания корешка книги”. Закрутив книгу вокруг ее средней оси инерции, вы заставляете интегральную траекторию двигаться от одной седловой вершины атома C_2 к другой его седловой вершине.

Эту картину можно наглядно смоделировать на обобщенном бильярде, склеенном из двух областей, ограниченных эллипсами. Рассмотрим малую окрестность $B_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 , лежащей на фиксированной критической траектории 3-атома C_2 , описывающего бифуркацию линий уровня функции Λ в изоэнергетической поверхности такого обобщенного бильярда.

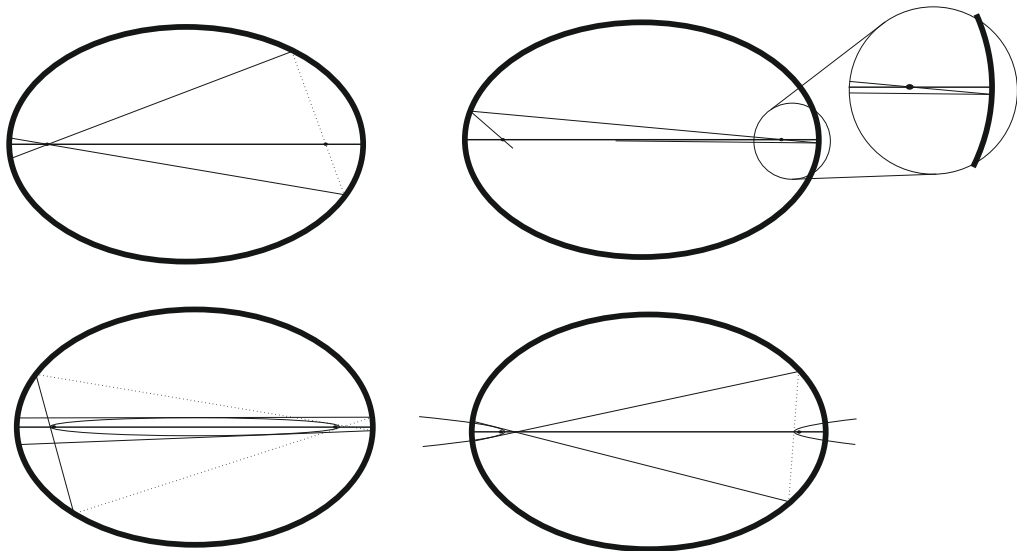


Рис. 6: На верхних рисунках изображены траектории, лежащие на особом слое атома C_2 , описывающего бифуркацию линий уровня функции Λ в изоэнергетической поверхности обобщенного бильярда, склеенного из двух областей, ограниченных эллипсами. На нижних – траектории, лежащие на эллиптическом (слева) и гиперболическом (справа) торах. Траектория выделена сплошной линией при прохождении по верхнему экземпляру бильярда, ограниченного эллипсом и пунктиром – по нижнему. Жирными точками выделены фокусы.

Пусть точка $x \in B_\varepsilon(x_0)$ также лежит на особом слое, но уже не принадлежит критической траектории. В этом случае, она лежит на одном из четырех колец – траектории на двух из них бесконечно приближаются к фиксированной критической окружности, а

на двух других – “разматываются” с неё, бесконечно приближаясь к другой критической окружности. Это поведение траекторий изображено на верхних рисунках 6 ниже.

Пусть точка $x \in B_\varepsilon(x_0)$ не лежит на особом слое. В этом случае она лежит на эллиптическом или гиперболическом торе, в зависимости от того квадратики какого типа касаются её касательные. В обоих случаях (см. нижние рисунки 6 ниже) видно, что траектория, проходящая через точку x , через короткое время будет приближаться к другой критической окружности.

Заметим, что в случае с книгой мы не могли попасть из-за неточности начальных данных строго на особый слой, что приводило к тому что корешок книги при вращении вокруг средней оси переворачивался. Так и траектория обобщенного бильярда, будучи изначально близка к одной критической окружности, через короткое время будет “закручиваться” в другую сторону.

2 Геометрия пространства замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства

Напомним, что *метрическим пространством* называется множество X , на парах элементов $x, y \in X$ которого, называемых точками, задана так называемая *метрика* $|xy|$, моделирующая расстояние между ними. Метрика должна обладать следующими свойствами: это неотрицательная функция на $X \times X$ симметричная, невырожденная, т.е. $|xy| = 0$, если и только если $x = y$, и удовлетворяющая неравенству треугольника $|xz| \leq |xy| + |yz|$.

Сравнение подмножеств фиксированного метрического пространства (например, евклидова пространства \mathbb{R}^n) — важная задача как с математической, так и с практической точки зрения. Один из возможных способов такого сравнения — ввести расстояние между подмножествами, которое, говоря неформально, будет численно характеризовать насколько «далеки друг от друга» рассматриваемые подмножества. Исследованиям пространств компактов посвящено много работ, начиная от классических работ Хаусдорфа [32] и Громова [33], и заканчивая недавними работами Иванова, Тужилина и их учеников [34], [35] и [38].

Есть много естественных способов задать «расстояние» между подмножествами $A, B \subset X$ метрического пространства X . Например $|AB| = \inf \{|ab| : a \in A, b \in B\}$. Однако, полученная функция не будет метрикой (в данном случае нарушается невырожденность и неравенство треугольника).

2.1 Метрика Хаусдорфа

В 1914 году Феликс Хаусдорф [32] предложил следующую конструкцию.

Пусть $B_r(A) = \{x \in X : |xA| \leq r\}$, где $r > 0$, $A \subset X$ и $|xA| = \inf\{|xa| : a \in A\}$ для $x \in X$. Для непустых $A, B \subset X$ положим

$$d_H(A, B) = \inf\{r : A \subset B_r(B) \text{ \& } B_r(A) \supset B\}.$$

d_H называется *расстоянием по Хаусдорфу*. Хаусдорф показал, что функция d_H является метрикой на множестве $\mathcal{H}(X)$ всех замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X .

Например, пусть X — плоскость с обычным евклидовым расстоянием, A — круг с центром $(0, 0)$ и радиусом 0.3, B — круг с центром $(2, 0)$ и радиусом 1, см. рис. 7. Легко проверить, что в данном случае $d_H(A, B) = 3$.

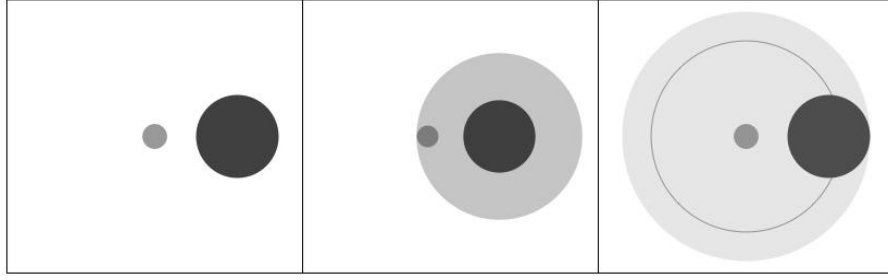


Рис. 7: Слева: $A, B \subset \mathbb{R}^2$; в центре: $B \subset B_r(A)$, $r = 2.3$, справа: $B_r(A) \supset B$, $r = 3$, а для $r = 2.3$ — включения нет.

Пространства $\mathcal{H}(X)$ довольно хорошо изучены. Например, хорошо известно, что следующие свойства одновременно или имеют или не имеют место у пространств X и $\mathcal{H}(X)$: полнота, полная ограниченность (т.е. наличие конечных ε -сетей), компактность. Для дальнейшего нам понадобится еще одно свойство.

Напомним, что метрика пространства X называется *внутренней*, если $|xy| = \inf\{|\gamma| : \gamma \text{ — непрерывная кривая, соединяющая } x \text{ и } y\}$, где через $|\gamma|$ обозначена длина кривой γ в метрическом пространстве X , и *строго внутренней*, если каждая пара точек x, y соединяется некоторой *кратчайшей кривой* γ , т.е. такой, что $|\gamma| = |xy|$.

Предложение 2.1. *Если X — ограниченно компактное пространство со строго внутренней метрикой, то $\mathcal{H}(X)$ — также ограниченно компактное, и метрика Хаусдорфа — строго внутренняя.*

2.2 Явная конструкция кратчайших в $\mathcal{H}(X)$

Пусть W — произвольное метрическое пространство, $a, b \in W$, $|ab| = r$, $s \in [0, r]$. Будем говорить, что $c \in W$ находится в s -положении между a и b , если $|ac| = s$ и $|cb| = r - s$.

Предложение 2.2. *Пусть X — произвольное метрическое пространство и $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A, B)$, $s \in [0, r]$. Тогда если множество $C \in \mathcal{H}(X)$ находится в s -положении между A и B , то $C \subset B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$.*

Множество $B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$ будем обозначать через $C_s(A, B)$ или, если понятно, о каких A и B идет речь, то просто через C_s .

Рассмотрим тот же пример, см. рис. 8: пусть снова $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ — круг с центром $(0, 0)$ и радиусом 0.3 , $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ — круг с центром $(2, 0)$ и радиусом 1 . Расстояние $d_H(A, B) = 3$.

В качестве следующего примера рассмотрим одноточечные компактные подмножества произвольного метрического пространства.

Предложение 2.3. *Пусть X — произвольное метрическое пространство и $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $r = |ab|$, $s \in [0, r]$. Тогда*

1. C_s представляет собой множество всех точек из X , находящихся между a и b в s -положении;
2. C_s находится в s -положении между A и B , если и только если $C_s \neq \emptyset$;

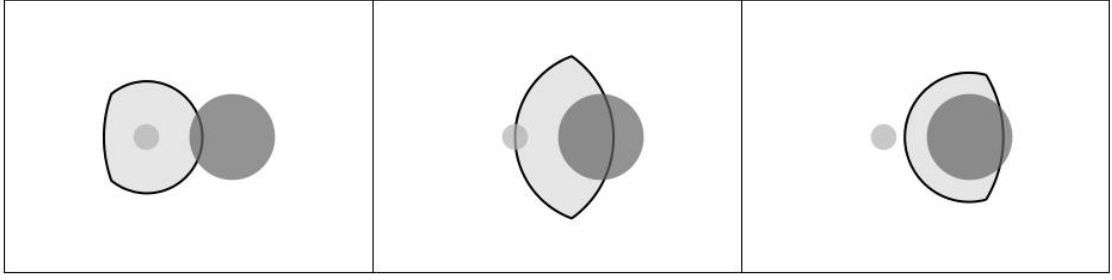


Рис. 8: Множество $C_s(A, B)$ для $s = 1$, $s = 2$, $s = 2.5$ (слева направо).

3. множество $C \subset X$ находится в s -положении между A и B , если и только C — непустое замкнутое подмножество C_s .

Например, если $X = \mathbb{R}^n$, то C_s — точка отрезка $[a, b]$, отстоящая от a на расстояние s . Если же X — плоскость с нормой $\|(x, y)\| = |x| + |y|$, $A = \{(0, 0)\}$, $B = \{(3, 2)\}$, см. рис. 9. Тогда $d_H(A, B) = 5$. В этом случае в s -положении находится бесконечно много подмножеств. Каждое из них порождает кратчайшую, соединяющую A и B , см. рис. 10.

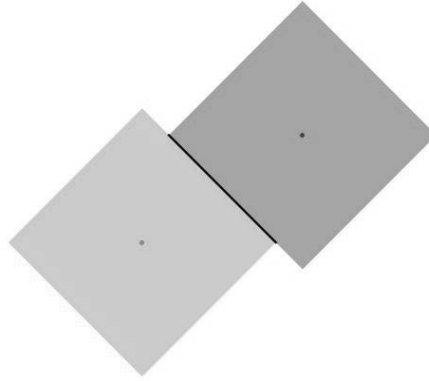


Рис. 9: Множество $C_s(A, B)$ при $s = 2.5$, любое замкнутое непустое подмножество $C \subset C_s(A, B)$ находится в s -положении.

Следующие результаты были известны только для случая $X = \mathbb{R}^n$. Оказалось, что доказательства практически дословно проходят в более общем случае.

Теорема 5 (Иванов, Тужилин, 2016). Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой. Тогда для любых $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A, B)$, $s \in [0, r]$, множество $C_s = C_s(A, B)$ принадлежит $\mathcal{H}(X)$ и находится в s -положении между A и B .

Теорема 6 (Иванов, Тужилин, 2016). Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой, $A, B \in \mathcal{H}(X)$, и $r = d_H(A, B)$. Тогда $\gamma(s) = C_s(A, B)$, $s \in [a, b]$, является кратчайшей кривой, соединяющей A и B , причем длина кривой γ равна $d_H(A, B)$, а параметр s — натуральный.

2.3 Сколько может быть кратчайших кривых?

Легко построить примеры подмножеств, которые соединяет единственная кратчайшая, а также бесконечное семейство кратчайших. Из теоремы 6 вытекает, что если X — пол-

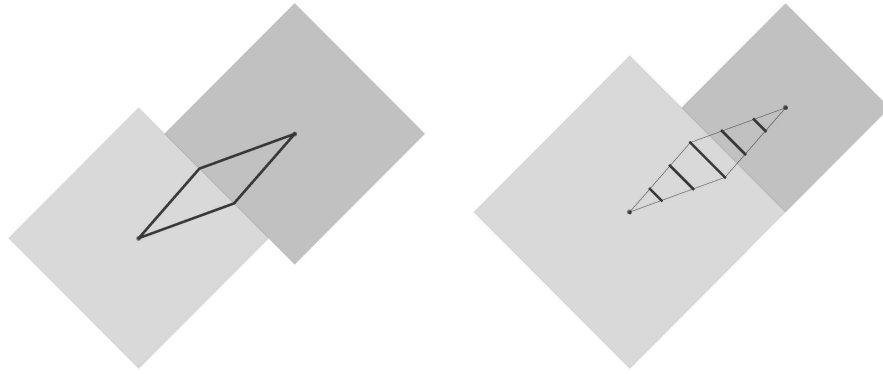


Рис. 10: Точки A и B соединяет бесконечно много кратчайших. Слева — две из них, состоящие из одноточечных подмножеств; справа одна, состоящая из параллельных отрезков.

ное локально компактное пространство с внутренней метрикой, то каждому $C \in \mathcal{H}(X)$, находящемуся в s -положении между A и B , соответствует кратчайшая, соединяющая A и B . Поэтому, если число кратчайших конечно, то в s -положении может быть лишь конечное число множеств (для каждого значения s).

Следствие 1. Пусть $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A, B) > 0$. Предположим, что существуют $a \in A$ и $b \in B$, для которых $|ab| < r$. Тогда при каждом $0 < s < r$ имеется бесконечно много $C \in \mathcal{H}(X)$, которые находятся в s -положении между A и B , и, значит, бесконечно много кратчайших.

Следствие 2. Предположим, что для $A \neq B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A, B)$ и некоторого $s \in (0, r)$ имеется лишь конечное число элементов $C \in \mathcal{H}(X)$, находящихся в s -положении между A и B . Тогда для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|ab| \geq r$ и $|aB| = |Ab| = r$.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Пару $\{A, B\}$ различных множеств из $\mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A, B)$, назовем *конфигурацией*, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|ab| \geq r$ (или, что равносильно, $|aB| = |Ab| = r$). Конфигурацию назовем *конечной*, если для каждого s имеется лишь конечное число элементов в s -положении.

В качестве примера рассмотрим множества $A, B \subset \mathbb{R}^2$ — вершины правильного шестиугольника, взятые через одну. Для каждого s множество $C_s(A, B)$ состоит из 6 точек, см. рис. 11.

Пусть X — ограниченно компактное пространство со строго внутренней метрикой. Пусть также любые две точки соединяются единственной, с точностью до параметризации, кратчайшей кривой, и кратчайшие кривые, содержащие общий невырожденный фрагмент, лежат в одной и той же кратчайшей кривой.

Теорема 7. Пусть $\{A, B\}$ — произвольная конечная конфигурация и $r = d_H(A, B) > 0$. Тогда количество множеств $C \in \mathcal{H}(X)$ в s -положении не зависит от $s \in (0, r)$ и равно количеству кратчайших, соединяющих A и B .

Пусть $\{A, B\}$ — конечная конфигурация. Построим двудольный граф, ребра которого — суть пары $\{a, b\}$, $a \in A$, $b \in B$, для которых $d_H(A, B) = |ab|$. Элементы множества $C_s(A, B)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с ребрами этого графа. Подмножество $C \subset C_s(A, B)$ находится в s -положении, если и только если соответствующие

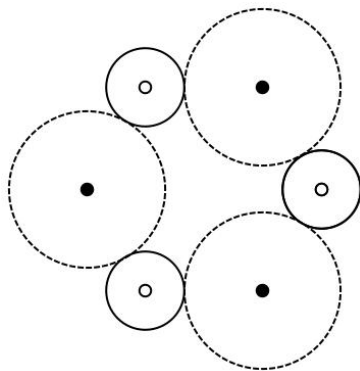


Рис. 11: Множество $C_s(A, B)$ для $s = 1/3$ состоит из 6 точек пересечения пар разноцветных окружностей.

ребра образуют покрытие множества вершин графа. На рис. 12 приведен двудольный граф для множеств A и B из предыдущего примера.

Несложно показать, что для каждого двудольного графа существуют множества $A, B \subset \mathbb{R}^n$ (для некоторого n), образующие конечную конфигурацию с таким двудольным графом. Таким образом, задача сводится к изучению возможного числа реберных покрытий двудольных графов.

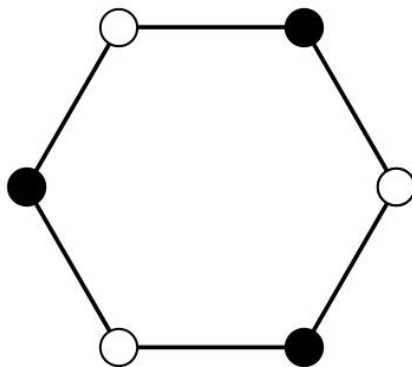


Рис. 12: Двудольный граф, соответствующий $C_s(A, B)$. Для данного двудольного графа существует 18 реберных покрытий.

Назовем натуральное число n *хорошим*, если существует двудольный граф, у которого ровно n реберных покрытий. Blackburn, Lund, Schlicker, Sigmon, Zupan [36] открыли удивительный факт: среди чисел от 1 до 36 все числа хорошие, за исключением 19. В 2013 году К. Honigs [37] и З. Овсянников независимо выяснили, что 37 — тоже нехорошее число.

2.4 Как продолжить последовательность 19, 37?

З. Овсянников [38] предложил следующий метод, основанный на разложении двудольных графов на так называемые *атомарные*.

Семейство подграфов G_1, \dots, G_k назовем *разложением* графа G , если $G = \cup_i G_i$, любая пара графов G_i, G_j не имеет общих ребер, имеют не более одной общей вершины,

и граф этого разбиения (т.е. граф, вершины которого — подграфы G_i , и две вершины смежны если и только если соответствующие G_i пересекаются) — дерево.

Граф называется *атомарным*, если его нельзя разложить на два или более подграфа. З. Овсянников [38] показал, что существует ровно семь различных двудольных атомарных графов, число реберных покрытий которых не более 67. Они представлены на рис. 13. З. Овсянников также описал элементарные операции, позволяющие из атомарных графов и уже полученных двудольных графов, последовательно построить все двудольные графы, а также выписал формулы пересчета числа реберных покрытий результирующего графа (довольно сложные).

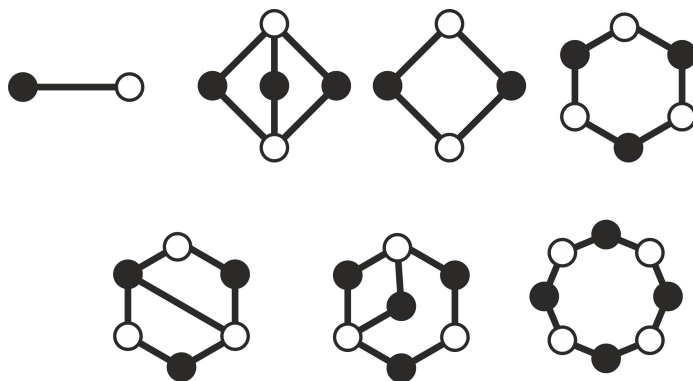


Рис. 13: Атомарные графы с числом реберных покрытий не больше 67.

Был разработан алгоритм последовательного перебора всех двудольных графов, подсчета числа их реберных покрытий и проверки достаточности перебора (чтобы утверждать, что данное число реализуется — достаточно предъявить пример, а чтобы утверждать, что не реализуется, необходимо доказать, что перебрано уже достаточно графов).

Теорема 8 (Овсянников [38]). *Для натуральных чисел от 1 до 1000, не существует двудольных графов с 19, 37, 51, 59, 67 реберными покрытиями.*

Кроме того, возможно также не хорошими являются числа 82, 97, 149, 197, 233, 257, 291, 379. Все остальные числа от 1 до 1000 — хорошие.

Насколько нам известно, найденная последовательность 19, 37, 51, 59, 67 пока нигде не встречалась. Было бы интересно продолжить исследования, в частности, провести более масштабные компьютерные вычисления и продолжить последовательность.

Список литературы

- [1] Табачников С.Л., *Геометрия и бильярды* // НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, Москва, Ижевск, 2011.
- [2] Биркгоф Дж.Д., *Динамические системы* // Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999.
- [3] Козлов В.В., Трещёв Д.В., *Генетическое введение в динамику систем с ударами* // Изд-во МГУ, Москва, 1991.
- [4] Болсинов А.В., Фоменко А.Т., *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Т. 1, 2 // НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва, Ижевск, 1999.

- [5] Dragovic V., Radnovic M., “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards,” *Regul. Chaotic Dyn.*, Математический ин-т им.В.А.Стеклова РАН, **14** (4–5), 479 (2009).
- [6] Драгович В., Раднович М., *Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе* // НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Москва, Ижевск 2010.
- [7] Фокичева В.В., “Описание особенностей системы “бильярд в эллипсе”,” *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, Издательство Московского университета, Москва, No. 5, 31 (2012).
- [8] Фокичева В.В., “Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами,” *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Мех.*, No. 4, 18 (2014) [англ. пер.: Fokicheva V. V., “Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas”, *Moscow Univ. Math. Bull*, **69** (4), 148 (2014).
- [9] Фокичева В.В., “Классификация бильярдных движений в областях, ограниченных софокусными параболами,” *Матем. сб.*, **205** (8), 139 (2014) [англ. пер.: Fokicheva V. V., “Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas”, *Sb. Math.*, **205** (8), 1201 (2014).
- [10] Фокичева В.В., “Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик,” *Матем. сб.*, **206** (10), 127 (2015).
- [11] Фокичева В.В., Фоменко А.Т., “Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела,” *ДАН*, **465** (2), 1 (2015).
- [12] Фоменко А.Т., Цишанг Х., “О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем,” *Изв. АН СССР*, **52** (2) 378 (1988).
- [13] Фоменко А.Т., “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем,” *Успехи матем. наук*, **44** (1), 145 (1989).
- [14] Фоменко А.Т., Цишанг Х., “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы,” *Изв. АН СССР*, **54** (3), 546 (1990).
- [15] Кудрявцева Е.А., “Интегрируемые по Лиувиллю обобщенные бильярдные потоки и теоремы типа Понселе,” *Фундаментальная и прикладная математика*, **20** (3), 113 (2015).
- [16] Кудрявцева Е.А., Никонов И.М., Фоменко А.Т., “Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия,” *Матем. сб.*, **199** (9), 3 (2008).
- [17] Lazutkin V., *KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions* // Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [18] Арнольд В.И., *Математические методы классической механики*, Наука, Москва, 1989.
- [19] Ошемков А.А., “Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы,” *Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. 23*, Изд-во МГУ, Москва. 1988, сс. 122–132.
- [20] Oshemkov A.A., Fomenko A.T., “Invariants for the Main Integrable Cases of the Rigid Body Motion Equations,” in *Advances in Soviet Mathematics*, v. 6, Ed.: Fomenko A.T., AMS, Providence, 1991, pp. 67-146.
- [21] Болсинов А.В., Фоменко А.Т., “Геодезический поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела,” *Доклады РАН*, **339** (3), 293 (1994).
- [22] Болсинов А.В., Фоменко А.Т., “Траекторная классификация геодезических потоков на двумерных эллипсоидах. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела,” *Функциональный анализ и его приложения*, **29** (3), 1 (1995).
- [23] Орел О.Е., “Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева-Чаплыгина,” *Матем. сборник*, **186** (2), 105 (1995).
- [24] Орел О.Е., Такахашаи Ш., “Траекторная классификация интегрируемых задач Лагранжа и Горячева-Чаплыгина методами компьютерного анализа,” *Матем. сборник*, **187** (1), 95 (1996).
- [25] Морозов П.В., “Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша,” *Матем. сб.*, **193** (10), 113 (2002).

- [26] Морозов П.В., “Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа,” Матем. сб., **195** (3), 69 (2004).
- [27] Славина Н.С., “Классификация системы Ковалевской-Яхьи с точностью до лиувиллевой эквивалентности,” Доклады РАН, серия: математика, **452** (3), 252 (2013).
- [28] Николаенко С.С., “Топологическая классификация систем Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости,” Матем. сб., **205** (2), 75 (2014).
- [29] Николаенко С.С., “Топологическая классификация интегрируемого случая Горячева в динамике твердого тела,” Матем. сб., **205** (2), 123 (2016).
- [30] Сечкин Г.М., “Топология динамики неоднородного эллипсоида вращения на гладкой плоскости,” дипломная работа, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедры дифференциальной геометрии и приложений, 2015.
- [31] Козлов В.В., *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*, Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995.
- [32] Hausdorff F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig, 1914.
- [33] Gromov M., “Groups of Polynomial Growth and Expanding Maps,” Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **53**, pp. 53–73 (1981).
- [34] Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А., “Метрика Громова–Хаусдорфа на пространстве метрических компактов – строго внутренняя,” Матем. заметки, **100** (6), 947 (2016).
- [35] Ivanov A. O., Tropin A. M., Tuzhilin A. A., “Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance,” J. of Geometry, (2016).
- [36] Blackburn C.C., Lund K., Schliker S., Sigmon P., and Zupan A., “A Missing Prime Configuration in the Hausdorff Metric Geometry,” J. Geom, **92**, pp. 28–59 (2009).
- [37] Honigs K., “Missing Edge Coverings of Bipartite Graphs and the Geometry of the Hausdorff Metric,” J. Geom., **104**, pp. 107–125 (2013).
- [38] Овсянников З.Н., “Количество реберных покрытий двудольных графов или кратчайших с фиксированными концами в пространстве компактов в \mathbb{R}^n ,” Докл. РАН, **466** (4), 402 (2016).