О полноте операций «перестановка переменных», «конъюнкция», «композиция» на бинарных предикатах

С. В. Моисеев (МГУ имени М. В. Ломоносова)

Работа по теории абстрактных клонов. Исследуются бинарные предикаты на k-элементном множестве и операции над этими предикатами. Приведён список операций над бинарными предикатами, замыкание относительно которых для $k \in \{2, 3\}$ эквивалентно замыканию относительно всех примитивных позитивных формул. При $k \geqslant 4$ показано, что замыкание относительно указанных операций строго слабее замыкания относительно всех примитивных позитивных формул.

Ключевые слова: теория клонов, бинарные предикаты, бинарные отношения, операции на предикатах, примитивные позитивные формулы, оператор замыкания, k-значная логика.

1. Мотивация

Обозначим через $R_k(n)$ множество всех предикатов k-значной логики арности n ($n \geqslant 0$), то есть множество всех функций вида

$$p\colon \{0, 1, \ldots, k-1\}^n \to \{\bot, \top\},$$

где $\bot$, $\top$ — константы «ложь», «истина». Обозначим через $R_k(\leqslant n)$ множество всех предикатов арности $\leqslant n$, а через R_k — множество всех предикатов k-значной логики.

Если это необходимо, арность предиката будем обозначать верхним индексом в круглых скобках, например так: $p^{(n)}$.

Определение 1. Определим предикаты $false$, $true$, eq:

$$false^{(2)}(x_1, x_2) \equiv false^{(0)} \equiv \bot$$
$$true^{(2)}(x_1, x_2) \equiv true^{(0)} \equiv \top$$
$$eq^{(2)}(x_1, x_2) \equiv (x_1 = x_2)$$

Определение 2. Формулы вида

$$\varphi(p_1^{(r_1)},\dots,p_n^{(r_n)}) = \\ = \exists y_1 \dots \exists y_s \big(p_1^{(r_1)}(z_{1,1},\dots,z_{1,r_1}) \wedge \dots \wedge p_n^{(r_n)}(z_{n,1},\dots,z_{n,r_n})\big),$$

где $s \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, будем называть *примитивными позитивными формулами.* Множество всех примитивных позитивных формул обозначим через $p.p.f.$.

Определение 3. Будем говорить, что предикат $p^{(r)}$ *задаётся формулой* $\varphi(p_1^{(r_1)},\dots,p_n^{(r_n)})$ и писать $p^{(r)} \sim \varphi\big(p_1^{(r_1)},\dots,p_n^{(r_n)}\big)$, если имеет место равенство

$$p^{(r)}(x_1,\dots,x_r) = \varphi\big(p_1^{(r_1)}(z_{1,1},\dots,z_{1,r_1}),\dots,p_n^{(r_n)}(z_{n,1},\dots,z_{n,r_n})\big),$$

для некоторых метапеременных $z_{k,j}$ из списка символов «x_1», …, «x_r», «y_1», …, «y_s».

Определение 4. Пусть $M \subseteq R_k$. Обозначим через $[M]_{p.p.}$ *замыкание множества M относительно примитивных позитивных формул*:

$$[M]_{p.p.} \equiv \big\{false^{(0)}, true^{(0)}, eq^{(2)}\big\} \cup \\ \cup \big\{p^{(r)}\colon \big(\exists\varphi \in p.p.f.\big)\big(\exists p_1^{(r_1)} \in M\big)\dots\big(\exists p_n^{(r_n)} \in M\big) \\ p^{(r)} \sim \varphi\big(false^{(0)}, true^{(0)}, eq^{(2)}, p_1^{(r_1)},\dots,p_n^{(r_n)}\big)\big\}$$

Пусть также

$$[M]_{p.p.2} \equiv [M]_{p.p.} \cap R_k(2).$$

Основная практическая проблема оператора $[\ ]_{p.p.}$ состоит в том, что для вычисления $[M]_{p.p.}$ для конкретного множества M иногда необходимо использовать формулу φ с большим числом переменных. Другой вариант вычисления $[M]_{p.p.}$ мог бы состоять в том, чтобы вместо примитивных позитивных формул рассматривать элементарные операции на предикатах, введённые Гейгером (см. [**?**]) и Боднарчуком с соавторами (см. [**?**]) — добавление несущественной переменной, отождествление переменных, перестановка переменных, проекция, конъюнкция. Однако, у этого подхода имеется другая проблема: в процессе вывода могут возникать предикаты большой арности, что также не позволяет на практике использовать этот определение.

Возникает вопрос: можно ли переопределить элементарные операции Гейгера — Боднарчука, так чтобы полученный оператор замыкания корректно работал на предикатах малой арности и в то же время не требовал построения предикатов большой арности?

В данной работе дан положительный ответ на этот вопрос для случая $k \in \{2, 3\}$ и бинарных предикатов.

Определение 5. Пусть $p, p_1, p_2 \in R_k(2)$. Определим операции $perm$, $conj$, $comp$ («перестановка переменных», «конъюнкция предикатов», «обобщённая композиция») на бинарных предикатах:

$$\begin{aligned} perm\,(p)(x_1, x_2) &\equiv p(x_2, x_1) \\ conj\,(p_1, p_2)(x_1, x_2) &\equiv p_1(x_1, x_2) \wedge p_2(x_1, x_2) \\ comp\,(p_1, p_2)(x_1, x_2) &\equiv \exists y\ \big(p_1(x_1, y) \wedge p_2(y, x_2)\big) \end{aligned}$$

Определение 6. Пусть $M \subseteq R_k(2)$. Обозначим через $[M]_{weak}$ наименьшее множество, удовлетворяющее аксиомам:

1) $\{false^{(2)}, true^{(2)}, eq^{(2)}\} \subseteq [M]_{weak}$.
2) *Монотонность.* Если $p \in M$, то $p \in [M]_{weak}$.
3) *Замкнутость относительно элементарных операций.* Если $p \in [M]_{weak}$, $p_1 \in [M]_{weak}$, $p_2 \in [M]_{weak}$, то

$$\begin{aligned} perm\,(p) &\in [M]_{weak} \\ conj\,(p_1, p_2) &\in [M]_{weak} \\ comp\,(p_1, p_2) &\in [M]_{weak} \end{aligned}$$

Очевидно, что если $p, p_1, p_2 \in M$, то $perm\,(p) \in [M]_{p.p.2}$, $conj\,(p_1, p_2) \in [M]_{p.p.2}$, $comp\,(p_1, p_2) \in [M]_{p.p.2}$, поэтому

$$[M]_{weak} \subseteq [M]_{p.p.2}$$

Более того, диаграмма на рисунке **??** коммутативна.

2. Результаты работы

Теорема 1. *Пусть $k \in \{2, 3\}$. Тогда*

$$[M]_{weak} = [M]_{p.p.2}$$

Теорема 2. *Пусть $k \geqslant 4$. Существует M, такое что*

$$[M]_{weak} \neq [M]_{p.p.2}$$

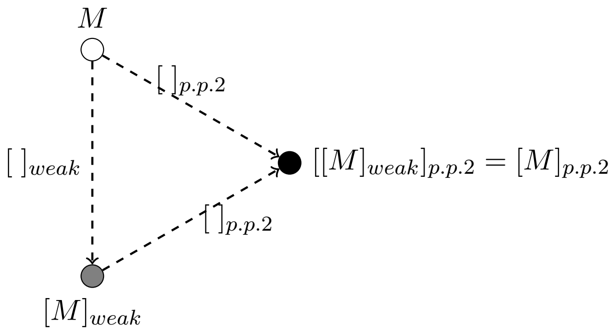


Рис. 1.

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы **??** для $k = 2$ является следствием известных фактов теории клонов и приводится в разделе **??**. Автором предлагается более простое доказательство для этого случая без использования сложных фактов теории клонов (см. раздел **??**).

Доказательство теоремы **??** для $k = 3$ было получено автором с использованием компьютерных вычислений. Описание данного процесса будет опубликовано отдельно.

3.1. Доказательство теоремы ?? для $k = 2$

Рассмотрим операторы «добавления фиктивной переменной справа (слева)»:

$$intro\_r\,(\varphi) \equiv comp\,(conj(\varphi, eq^{(2)}), true^{(2)})$$
$$intro\_l\,(\varphi) \equiv comp\,(true^{(2)}, conj(\varphi, eq^{(2)}))$$

Эти операторы обладают следующим важным для нас свойством:

$$\forall x_2\ \big(\varphi(x_1, x_1) = intro\_r\,(\varphi)(x_1, x_2)\big)$$
$$\forall x_1\ \big(\varphi(x_2, x_2) = intro\_l\,(\varphi)(x_1, x_2)\big)$$

Лемма 1. *Пусть*

$$q(x_1, x_2) = \bigwedge_i \varphi_i(x_1, x_1) \wedge \bigwedge_j \psi_j(x_1, x_2) \wedge \bigwedge_l \xi_l(x_2, x_1) \wedge \bigwedge_m \chi_m(x_2, x_2)$$

Пусть также n — количество формул вида $\varphi_i(x_1, x_1)$, $n \geqslant 0$.

Тогда справедливо равенство:

$$q(x_1, x_2) = conj\,(conj\,(conj\,(intro\_r\,(\varphi), \psi),\ perm\,(\xi)),\ intro\_l\,(\chi)),$$

где

$$\varphi \equiv \begin{cases} true^{(2)} & \text{если } n = 0 \\ \varphi_1 & \text{если } n = 1 \\ conj\,((\ldots conj\,(conj\,(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_3)\ldots), \varphi_n) & \text{если } n \geqslant 2 \end{cases}$$

(формулы ψ, ξ, χ определяются аналогично).

Лемма 2. *Пусть*

$$q(\tilde{x}) = \exists y\ \Big(\bigwedge_i \varphi_i(s_i, t_i) \wedge \bigwedge_j \psi_j(u_j, y) \wedge \bigwedge_l \xi_l(y, v_l) \wedge \bigwedge_m \chi_m(y, y)\Big),$$

где $\tilde{x}$ — непустой список переменных, метапеременные s_i, t_i, u_j, v_j обозначают переменные из списка $\tilde{x}$, причём список $\tilde{x}$ не содержит переменную «y».

Тогда справедливо равенство:

$$q(\tilde{x}) = \bigwedge_i \varphi_i(s_i, t_i)$$
$$\wedge\ \exists y\ \Big(\bigwedge_j \psi_j(u_j, y) \wedge \bigwedge_l perm\,(\xi_l)(v_l, y) \wedge \bigwedge_m intro\_l\,(\chi_m)(x_1, y)\Big),$$

где x_1 — любая переменная списка $\tilde{x}$. То есть предикат q можно привести к виду

$$q(\tilde{x}) = \bigwedge_i \varphi_i(s_i, t_i) \wedge \exists y\ \bigwedge_j \eta_j(w_j, y),$$

где метапеременные w_j обозначают переменные из списка $\tilde{x}$.

Лемма 3. *Пусть*

$$q(\tilde{x}) = \exists y\ \bigwedge_j \eta_j(w_j, y),$$

где $\tilde{x}$ — список переменных, метапеременные w_j обозначают переменные из списка $\tilde{x}$, причём список $\tilde{x}$ не содержит переменную «y».

Тогда для $k = 2$ справедливо равенство:

$$q(\tilde{x}) = \bigwedge_{j, j'} comp\,(\eta_j, perm\,(\eta_{j'}))(w_j, w_{j'}).$$

Доказательства лемм

Леммы **??** и **??** очевидны. Для доказательства леммы **??** рассмотрим предикат
$$q'(\tilde{x}) = \bigwedge_{j,j'} \exists y\ \big(\eta_j(w_j, y) \wedge \eta_{j'}(w_{j'}, y)\big)$$
и докажем, что $q = q'$.

Зафиксируем значения $\tilde{x}$. Очевидно, что если $q(\tilde{x}) = \top$, то $q'(\tilde{x}) = \top$. Предположим, что $q(\tilde{x}) = \bot$. Так как переменная y может принимать ровно два значения $0, 1$ и $q(\tilde{x}) = \bot$, то существуют j, j' (возможно, совпадающие), такие что
$$\begin{aligned} \eta_j(w_j, 0) &= \bot \\ \eta_{j'}(w_{j'}, 1) &= \bot \end{aligned}$$
Как следствие, $q'(\tilde{x}) = \bot$, что завершает доказательство леммы.

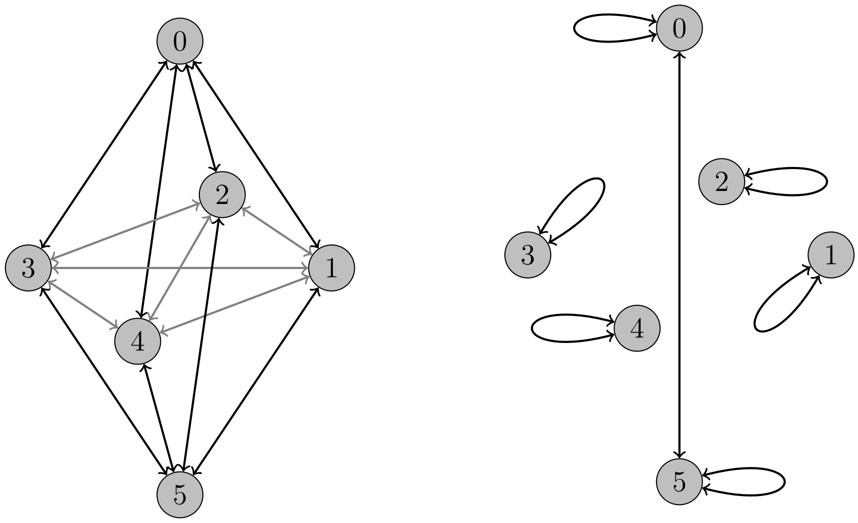
Доказательство теоремы ?? для $k = 2$

Пусть $p(x_1, x_2) = \exists y_1 \ldots \exists y_s \Big(p_1(z_{1,1}, z_{1,2}) \wedge \ldots \wedge p_n(z_{n,1}, z_{n,2})\Big)$. Докажем, что $p \in [\{p_1, \ldots, p_n\}]_{weak}$. Применим индукцию по числу s кванторов существования в формуле, определяющей предикат p. Базис индукции ($s = 0$) обеспечивается леммой **??**. Шаг индукции обеспечивается комбинацией леммы **??** и **??**.

3.2. Доказательство теоремы ??

Пусть $p \in R_k(2)$ — симметричный предикат, принимающий значение «ложь» на наборах $(0, k-1)$, $(k-1, 0)$ и всех наборах вида (a, a) (где $a \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$) и принимающий значение «истина» на остальных наборах:
$$\begin{aligned} p(0, k-1) &= \bot \\ p(k-1, 0) &= \bot \\ p(0, 0) &= \bot \\ p(1, 1) &= \bot \\ &\ldots \\ p(k-1, k-1) &= \bot \\ p(x, y) &= \top \quad \text{на остальных наборах} \end{aligned}$$

Графически этот предикат можно представить ориентированным графом с k вершинами, где ориентированное ребро между вершинами (a, b) имеется тогда и только тогда, когда $p(a, b) = \top$. Для случая $k = 6$ предикат p представлен на рисунке **??** а).



а) Графовое представление предиката p

б) Графовое представление предиката q

Рис. 2.

Пусть

$$M = \{false^{(2)}, true^{(2)}, eq^{(2)}, p\}.$$

Нетрудно проверить, что

$$[M]_{weak} = M.$$

Пусть предикат q определяется следующей примитивной позитивной формулой:

$$q(x_1, x_2) = \\ = \exists y_1 \, \exists y_2 \ldots \exists y_{k-2} \left(\bigwedge_{i=1}^{k-2} p(x_1, y_i) \wedge \bigwedge_{i,j\,:\, i \neq j} p(y_i, y_j) \wedge \bigwedge_{j=1}^{k-2} p(y_j, x_2) \right) \quad (1)$$

Заметим, что из равенства $p(z_1, z_2) = \top$ следует, что $z_1 \neq z_2$. Поэтому если $x_1 \neq x_2$, то значения $y_1, \ldots, y_{k-2}$ определяются однозначно:

$$\{y_1, \ldots, y_{k-2}\} = \{0, 1, \ldots, k-1\} \setminus \{x_1, x_2\}.$$

Учитывая это и то, что предикат p симметричен, формула **??** при $x_1 \neq x_2$ может интерпретироваться так: в графе, определяемом предикатом p, каждое из множеств $\{0,1,\dots,k-1\}\setminus\{x_1\}$ и $\{0,1,\dots,k-1\}\setminus\{x_2\}$ образует клику размера $k-1$ (то есть множество из $k-1$ попарно связанных различных вершин).

Нетрудно показать, что $q(x,y) = \neg p(x,y)$. Для случая $k=6$ предикат q представлен графом на рисунке **??** б). Таким образом,

$$q \in [M]_{p.p.2} \setminus [M]_{weak},$$

что завершает доказательство.

3.3. Комментарии к теореме ??

Заметим, что приведённая конструкция предиката p неприменима при $k \leqslant 3$. Так, при $k=3$ формула **??** приобретает вид

$$q(x_1,x_2) = \exists y \, \big(p(x_1,y) \wedge p(y,x_2)\big),$$

то есть

$$q = comp\,(p,p)$$

и поэтому

$$q \in [M]_{weak}.$$

4. Вывод теоремы ?? для $k=2$ из известных фактов теории клонов

4.1. Существенные предикаты

Определение 7.

1) Предикаты $false^{(0)}$, $true^{(0)}$ *существенны.*
2) При $n \geqslant 1$ предикат $p^{(n)}$ называется *существенным*, если он не может быть представлен как конъюнкция предикатов меньшей арности, то есть если не существуют предикаты $p_1^{(n-1)},\dots,p_s^{(n-1)}$, такие что

$$p^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \bigwedge_{i\in\{1,\dots,s\}} p_i^{(n-1)}(z_{i,1},\dots,z_{i,n-1})$$

для каких-то метапеременных $z_{i,j}$ из списка «x_1», …, «x_n».

Множество всех существенных предикатов арности n обозначим через $ESS_k(n)$, множество всех существенных предикатов арности $\leqslant n$ обозначим через $ESS_k(\leqslant n)$, множество всех существенных предикатов — через ESS_k.

4.2. Оператор замыкания на существенных предикатах

В работах Д. Н. Жука (см., например, [?, ?, ?]) введено семейство частичных операций на предикатах, которые мы будем использовать при определении оператора замыкания на существенных предикатах. Каждая из них является частичной функции одного или нескольких предикатов, арности которых должны быть надлежащим образом согласованы.

Определение 8. [Операции Жука]

1) Перестановка переменных:

$$op_{1,\sigma}(p^{(n)})(x_1, \dots, x_n) = p^{(n)}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

где $\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ — перестановка.

2) Отождествление переменных:

$$op_2(p^{(n+1)})(x_1, \dots, x_n) = p^{(n+1)}(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

3) Конъюнкция с отождествлением переменных:

$$op_3(p_1^{(n)}, p_2^{(m)})(x_1, , \dots, x_n) = \\ = p_1^{(n)}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \wedge p_2^{(m)}(x_1, \dots, x_m),$$

определённая при $n \geqslant m \geqslant 1$.

4) Проекция:

$$op_{4,s}(p^{(s+n)})(x_1, \dots, x_n) = \exists y_1 \dots \exists y_s \, p^{(s+n)}(y_1, \dots, y_s, x_1, \dots, x_n),$$

определённая при $s \geqslant 1$.

5) Отождествление переменных с проекцией:

$$op_5(p^{(n+2)})(x_1, \dots, x_n) = \exists y \, p^{(n+2)}(y, y, x_1, \dots, x_n).$$

6) Конъюнкция с отождествлением и проекцией:

$$op_6(p_1^{(n+1)}, p_2^{(1)})(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = \exists y \left(p_1^{(n+1)}(y, x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge p_2^{(1)}(y) \right).$$

7) Обобщённая композиция:

$$op_{7,m}(p_1^{(n_1+1)}, \ldots, p_m^{(n_m+1)})(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}, \ldots, x_{m,1}, \ldots, x_{m,n_m}) = \\ = \exists y \Big(p_1^{(n_1+1)}(y, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}) \wedge \ldots \\ \wedge\, p_m^{(n_m+1)}(y, x_{m,1}, \ldots, x_{m,n_m})\Big),$$

определённая, если $2 \leqslant m \leqslant k$ и $n_i + 1 \geqslant 2$ ($i \in \{1, \ldots, m\}$).

Заметим, что результатом применения этих операций к существенным предикатам могут быть как существенные, так и несущественные предикаты. Нас интересует только случай, когда результат операции — существенный предикат (см. определение 9).

Определение 9. Пусть $M \subseteq ESS_k$. Обозначим через $[M]_{ess}$ наименьшее множество, удовлетворяющее аксиомам:

1) $\{false^{(0)}, true^{(0)}, eq^{(2)}\} \subseteq [M]_{ess}$.
2) Если $p \in M$, то $p \in [M]_{ess}$.
3) Если
   а) $p_1, \ldots, p_n \in [M]_{ess}$,
   б) p может быть получен из предикатов $p_1, \ldots, p_n$ как результат применения (одной) операции семейства $op_1, \ldots, op_7$,
   в) p является существенным предикатом,

   то $p \in [M]_{ess}$.

Заметим, что если $M \subseteq ESS_k$, то $[M]_{ess} \subseteq ESS_k$.

Теорема 3 (Жук, [?]). *Семейство операций $op_1, \ldots, op_7$ полно в следующем смысле. Пусть $M \subseteq ESS_k$. Тогда*

$$[M]_{p.p.} \cap ESS_k = [M]_{ess}.$$

4.3. Связь между $R_k(2)$ и $ESS_k(\leqslant 2)$

Определение 10. Для $M \subseteq R_k(2)$ и $M' \subseteq ESS_k(\leqslant 2)$ определим операторы to_ess“, $from\_ess$“ перехода от предикатов арности 2 к существенным предикатам арности $\leqslant 2$ и обратно:

$$
\begin{aligned}
to\_ess\,(p^{(2)}) &\equiv \{q_2^{(2)},\ q_{1,1}^{(1)},\ q_{1,2}^{(1)},\ q_0^{(0)}\} \cap ESS_k,\\
&\textit{где}\ \ q_2^{(2)}(x_1,x_2) = p^{(2)}(x_1,x_2),\\
&\phantom{\textit{где}}\ \ q_{1,1}^{(1)}(x_1) = \exists y\ p^{(2)}(x_1,y),\\
&\phantom{\textit{где}}\ \ q_{1,2}^{(1)}(x_1) = \exists y\ p^{(2)}(y,x_1),\\
&\phantom{\textit{где}}\ \ q_0^{(0)} = \exists y_1\ \exists y_2\ p^{(2)}(y_1,y_2).\\
to\_ess``(M) &\equiv \bigcup\{to\_ess\,(p^{(2)})\colon p^{(2)} \in M\}\\
from\_ess : q^{(2)} &\mapsto p^{(2)}, \quad \text{где } p^{(2)}(x_1,x_2) = q^{(2)}(x_1,x_2);\\
q^{(1)} &\mapsto p^{(2)}, \quad \text{где } p^{(2)}(x_1,x_2) = q^{(1)}(x_1);\\
q^{(0)} &\mapsto p^{(2)}, \quad \text{где } p^{(2)}(x_1,x_2) = q^{(0)}.\\
from\_ess``(M') &\equiv [\{from\_ess\,(q)\colon q \in M'\}]_{perm\,,conj}\,,
\end{aligned}
$$

где под $[\ ]_{perm\,,conj}$ мы понимаем слабое замыкание на $R_k(2)$ относительно двух операций — $perm$ и $conj$.

$$
\begin{tikzcd}
R_k(2) \supseteq M \arrow[r, dashed, "to\_ess``"] \arrow[d, dashed] & M' \subseteq ESS_k(\leqslant 2) \arrow[d, dashed] \\
{[M]_{weak}} & {[M']_{ess}} \arrow[l, dashed, "from\_ess``"']
\end{tikzcd}
$$

Рис. 3.

Основное свойство этих операторов, которое мы докажем в конце статьи (см. следствие **??**), состоит в том, что при $k = 2$ и $M \subseteq R_2(2)$

$$from\_ess``[to\_ess``(M)]_{ess} = [M]_{weak},$$

то есть диаграмма на рисунке **??** коммутативна. Этот факт позволяет связать при $k = 2$ операции Жука на существенных предикатах и операции $perm\,, conj\,, comp$ на предикатах арности 2.

Лемма 4 (Жук, [?]). *Пусть* $p \in R_k(\leqslant 2)$. *Тогда*

$$p \in from\_ess``(to\_ess\,(p)).$$

Лемма 5. *Пусть* $M \subseteq R_k(2)$. *Тогда*

$$to\_ess``[M]_{p.p.2} \subseteq [to\_ess``M]_{p.p.} \cap ESS_k(\leqslant 2).$$

Доказательство. Переформулируем лемму следующим образом:

$$\big(\forall p^{(2)} \in [M]_{p.p.}\big)\ \big(to\_ess\,(p^{(2)}) \subseteq [to\_ess``M]_{p.p.} \cap ESS_k(\leqslant 2)\big)$$

и воспользуемся определением $[\ ]_{p.p.}$.

Пусть $p_1^{(2)}, \ldots, p_n^{(2)} \in M$ и $p^{(2)} \in [\{p_1^{(2)}, \ldots, p_n^{(2)}\}]_{p.p.}$. По лемме **??** для всех $k \in \{1, \ldots, n\}$ имеем:

$$p_k^{(2)} \in from\_ess``(to\_ess\,(p_k^{(2)})) =$$
$$= [\{from\_ess\,(q) \colon q \in to\_ess\,(p_k^{(2)})\}]_{perm\,,conj} \subseteq [to\_ess\,(p_k^{(2)})]_{p.p.}$$

Поэтому

$$p^{(2)} \in [to\_ess\,(p_1^{(2)}) \cup \ldots \cup to\_ess\,(p_n^{(2)})]_{p.p.} \subseteq [to\_ess``M]_{p.p.}$$

Из определения to_ess следует также, что

$$to\_ess\,(p^{(2)}) \in [\{p^{(2)}\}]_{p.p.} \cap ESS_k(\leqslant 2),$$

что завершает доказательство.

4.4. Функции почти-единогласия

Определение 11. Функция $f \in P_k(r)$, где $r \geqslant 3$, называется функцией *почти-единогласия (near-unanimity function, NUF)*, если

$$f(x, y, \ldots, y) = f(y, x, y, \ldots, y) = \ldots = f(y, \ldots, y, x) = y.$$

Множество всех функций почти-единогласия арности r ($r \geqslant 3$) обозначим через $NUF_k(r)$. Множество всех функций почти-единогласия обозначим через NUF_k.

Определение 12. Скажем, что функция $f^{(r)}$ *сохраняет* множество $M \subseteq R_k$ (обозначение — $f^{(r)}$ *preserves* M), если для любого предиката $p^{(n)} \in M$ выполнено

$$\big(p^{(n)}(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}) \wedge \ldots \wedge p^{(n)}(x_{r,1}, \ldots, x_{r,n})\big) \to$$
$$p^{(n)}\big(f^{(r)}(x_{1,1}, \ldots, x_{r,1}), \ldots, f^{(r)}(x_{1,n}, \ldots, x_{r,n})\big).$$

Теорема 4 (Бейкер, Пиксли, [?]). *Пусть $M \subseteq ESS_k$. Тогда*

$$\big([M]_{ess} \text{ конечно}\big) \leftrightarrow \big(\exists f \in NUF_k\ (f \text{ preserves } M)\big).$$

Более того, если существует функция $f^{(r+1)}$ почти-единогласия арности $r+1$, такая что $f^{(r+1)}$ сохраняет M, то

$$[M]_{ess} \subseteq ESS_k(\leqslant r).$$

4.5. Бинарные предикаты при $k = 2$

Пусть $maj^{(3)}\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ — функция голосования:

$$maj(x,y,y) = maj(y,x,y) = maj(y,y,x) = y.$$

Так как при $k = 2$ все предикаты арности $\leqslant 2$ сохраняются функцией голосования, то по теореме **??** получаем:

$$\big(M \subseteq ESS_2(\leqslant 2)\big) \to \big([M]_{ess} \subseteq ESS_2(\leqslant 2)\big).$$

Это означает, что для вычисления $[M]_{ess}$ достаточно ограничиться конечным списком **??** операций семейства $op_1, \ldots, op_7$, которые принимают на вход предикаты арности $\leqslant 2$ и возвращают предикат арности $\leqslant 2$:

$$\big(\forall M \subseteq ESS_2(\leqslant 2)\big)\ \big([M]_{ess} = [M]_{\mathbf{??}}\big).$$

Список **??** выглядит так:

$$\begin{aligned}
op_{1,\sigma}(p^{(2)})(x_1,x_2) &= p^{(2)}(x_2,x_1)\\
op_2(p^{(2)})(x_1) &= p^{(2)}(x_1,x_1)\\
op_3(p_1^{(2)},p_2^{(2)})(x_1,x_2) &= p_1^{(2)}(x_1,x_2) \wedge p_2^{(2)}(x_1,x_2)\\
op_3(p_1^{(2)},p_2^{(1)})(x_1,x_2) &= p_1^{(2)}(x_1,x_2) \wedge p_2^{(1)}(x_1)\\
op_{4,1}(p^{(2)})(x_1) &= \exists y_1\ p^{(2)}(y_1,x_1)\\
op_6(p_1^{(2)},p_2^{(1)})(x_1) &= \exists y\ \Big(p_1^{(2)}(y,x_1) \wedge p_2^{(1)}(y)\Big)\\
op_{7,2}(p_1^{(2)},p_2^{(2)})(x_1,x_2) &= \exists y\ \Big(p_1^{(2)}(y,x_1) \wedge p_2^{(2)}(y,x_2)\Big)
\end{aligned} \qquad (zhuk\text{-}ops\text{-}ar2)$$

В этот список мы не включаем операции, возвращающие предикат арности 0, так как по нашему определению $[M]_{ess} \supseteq \{false^{(0)}, true^{(0)}\}$.

Лемма 6. *Пусть* $k = 2$ *и* $M \subseteq R_2(2)$. *Тогда*

$$from\_ess\text{“}[to\_ess\text{“}(M)]_{ess} \subseteq [M]_{weak}.$$

Доказательство. Переформулируем лемму так:

$$\big[\{from\_ess\,(q)\colon q \in [to\_ess\text{“}(M)]_{ess}\}\big]_{perm\,,conj} \subseteq [M]_{weak}.$$

Так как $[M]_{perm\,,conj} \subseteq [M]_{weak}$ и

$$[to\_ess\text{“}(M)]_{ess} = [to\_ess\text{“}(M)]_{\mathbf{??}},$$

то достаточно доказать, что

$$\big(\forall q \in [to\_ess\text{“}(M)]_{\mathbf{??}}\big)\ \big(from\_ess\,(q) \in [M]_{weak}\big).$$

Докажем этот факт индукцией по определению $[\ ]_{\mathbf{??}}$.

1) а) $from\_ess\,(false^{(0)}) = false^{(2)} \in [M]_{weak}$.
   б) $from\_ess\,(true^{(0)}) = true^{(2)} \in [M]_{weak}$.
   в) $from\_ess\,(eq^{(2)}) = eq^{(2)} \in [M]_{weak}$.
2) Пусть $q \in to\_ess\text{“}(M)$. Докажем, что $from\_ess\,(q) \in [M]_{weak}$.
   а) Пусть $q^{(2)} \in to\_ess\text{“}(M)$. По определению to_ess тогда $q^{(2)} \in M$. По определению $from\_ess$ тогда $from\_ess\,(q^{(2)}) = q^{(2)}$, и поэтому $from\_ess\,(q^{(2)}) \in [M]_{ess}$.
   б) Пусть $q^{(1)} \in to\_ess\,(M)$. По определению to_ess тогда

$$q^{(1)}(x_1) = \exists y\ p^{(2)}(x_1, y) \quad \text{для некоторого } p^{(2)} \in M.$$

   (либо $q^{(1)}(x_1) = \exists y\ p^{(2)}(y, x_1)$ — этот случай рассматривается аналогично). По определению $from\_ess$ тогда

$$\begin{aligned} from\_ess\,(q^{(1)})(x_1, x_2) = q^{(1)}(x_1) = \exists y\ p^{(2)}(x_1, y) = \\ = \exists y\ \big(p^{(2)}(x_1, y) \wedge true^{(2)}(y, x_2)\big) = \\ = comp\,(p^{(2)}, true^{(2)}) \in [M]_{weak}. \end{aligned}$$

3) Пусть $from\_ess\,(p_1) \in [M]_{weak}$, $from\_ess\,(p_2) \in [M]_{weak}$, предикат p может быть получен из предикатов p_1, p_2 как результат применения (одной) операции списка **??**. Докажем, что $from\_ess\,(p) \in [M]_{weak}$.
   В зависимости от операции, которая была применена, рассмотрим случаи.

а) Пусть $p^{(2)}(x_1, x_2) = p_1^{(2)}(x_2, x_1)$. Тогда

$$from\_ess\,(p^{(2)}) = perm\,(p_1^{(2)}) \in [M]_{weak}.$$

Здесь и далее мы учитываем, что если p_1 — предикат арности 2, то $from\_ess\,(p_1) = p_1$, и поэтому $p_1 \in [M]_{weak}$. Аналогично для p_2.

б) Пусть $p^{(1)}(x_1) = p_1^{(2)}(x_1, x_1)$. Тогда

$$from\_ess\,(p^{(1)}) = intro\_r\,(p_1^{(2)}) \in [M]_{weak}.$$

в) Пусть $p^{(2)}(x_1, x_2) = p_1^{(2)}(x_1, x_2) \wedge p_2^{(2)}(x_1, x_2)$. Тогда

$$from\_ess\,(p^{(2)}) = conj\,(p_1^{(2)}, p_2^{(2)}) \in [M]_{weak}.$$

г) Пусть $p^{(2)}(x_1, x_2) = p_1^{(2)}(x_1, x_2) \wedge p_2^{(1)}(x_1)$. Тогда

$$from\_ess\,(p^{(2)}) = conj\,(p_1^{(2)}, from\_ess\,(p_2^{(1)})) \in [M]_{weak}.$$

д) Пусть $p^{(1)}(x_1) = \exists y_1\; p_1^{(2)}(y_1, x_1)$. Тогда

$$from\_ess\,(p^{(1)}) = comp\,(perm\,(p_1^{(2)}), true^{(2)}) \in [M]_{weak}.$$

е) Пусть $p^{(1)}(x_1) = \exists y\, \left(p_1^{(2)}(y, x_1) \wedge p_2^{(1)}(y)\right)$. Тогда

$$\begin{aligned} &from\_ess\,(p^{(1)}) = \\ &\qquad = comp\,(perm\,(p_1^{(2)}), from\_ess\,(p_2^{(1)})) \in [M]_{weak}. \end{aligned}$$

ж) Пусть $p^{(2)}(x_1, x_2) = \exists y\, \left(p_1^{(2)}(y, x_1) \wedge p_2^{(2)}(y, x_2)\right)$. Тогда

$$from\_ess\,(p^{(2)}) = comp\,(perm\,(p_1^{(2)}), p_2^{(2)}) \in [M]_{weak}.$$

4.6. Доказательство теоремы ?? для $k = 2$

Пусть $M \subseteq R_2(2)$. Доказательство даёт следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} [M]_{weak} &\subseteq [M]_{p.p.2} \\ &\subseteq from\_ess``(to\_ess``[M]_{p.p.2}) && \textit{(лемма ??)} \\ &\subseteq from\_ess``([to\_ess``M]_{p.p.} \cap ESS_2(\leqslant 2)) && \textit{(лемма ??)} \\ &\subseteq from\_ess``[to\_ess``M]_{ess} && \textit{(теорема ??)} \\ &\subseteq [M]_{weak}. && \textit{(лемма ??)} \end{aligned}$$

Следствие 1. *Пусть* $M \subseteq R_2(2)$. *Тогда*

$$[M]_{weak} = from\_ess``[to\_ess``M]_{ess}.$$

5. Благодарности

Автор выражает благодарность к.ф.-м.н. Жуку Дмитрию Николаевичу за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

[1] Geiger D. Closed systems of functions and predicates // Pacific journal of mathematics. — 1968 Oct 1. — 27 (1). — P. 95–100.

[2] Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. — 1969. — № 3. — С. 1–10; — № 5. — С. 1–9.

[3] Baker K. A., Pixley A. F. Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Zeitschrift. — 1975. — 143. — P. 165–174.

[4] Zhuk D. N. The Lattice of All Clones of Self-Dual Functions in Three-Valued Logic // Multiple-Valued Logic and Soft Computing. — 2015. — 24.1–4. — P. 251–316.

[5] Жук Д. Н. Решётка замкнутых классов самодвойственных функций трёхзначной логики. М.: Изд-во МГУ, 2011.

[6] Zhuk D. N., Moiseev S. V. On the Clones Containing a Near-Unanimity Function // IEEE 43rd International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL). — 2013.