

# О математическом моделировании электрогидродинамических явлений

И. Л. Панкратьева, В. А. Полянский  
(МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва)

На основе системного подхода описаны математические методы исследования различных электрогидродинамических явлений. Обсуждаются три модели с минимальным набором «эффективных» переменных и задаваемых параметров и некоторые результаты, полученные в рамках каждой из них.

**Ключевые слова:** электрогидродинамика, электрическое поле, слабопроводящие среды, математические модели, объемный электрический заряд, электрохимические реакции, электризация.

## Введение

В электрогидродинамике (ЭГД) изучаются течения многокомпонентных слабопроводящих сред, содержащих заряженные частицы, в которые внешние приложенные электрические поля могут проникать на характерные гидродинамические расстояния. Примером таких сред могут служить технические жидкие диэлектрики, жидкости с малой примесью заряженных частиц типа различных биологических растворов, слабоионизованные высокотемпературные газовые смеси, такие, как продукты горения, многофазные среды, содержащие заряженные частицы. Интерес к изучению ЭГД течений обусловлен их широким использованием в различного рода современных технологиях и устройствах. Можно отметить, например, устройства с микро- и нано-размерными каналами, применяемыми в биотехнологических и фармацевтических исследованиях для транспортировки нано-объемов жидкости, анализа биологических образцов, изменения состава смеси в микрообъемах и т. п. Наличие объемного заряда дает возможность с помощью внешних приложенных электрических полей управлять движением среды в таких каналах.

При математическом моделировании взаимодействия слабопроводящих сред с электрическими полями основная трудность связана с необхо-

димостью включения в модель большого числа физических параметров, сведения о которых в литературе либо весьма скудны, либо отсутствуют. К ним относятся ионный состав среды, свойства переноса ионных компонент, параметры объемных и поверхностных электрохимических процессов с участием ионов, условия на границах раздела для концентраций заряженных частиц.

Методы построения моделей многокомпонентных химически реагирующих смесей при наличии электромагнитных полей в механике сплошных сред известны [?] и в литературе описаны модели, обладающие «всеобщностью», однако, их практическая ценность не велика из-за неопределенности в значениях многочисленных параметров, входящих в модель. Поэтому возникает потребность в системном подходе к проблеме, состоящем в разработке математических моделей с минимальным набором так называемых «эффективных» искомых переменных и задаваемых параметров, которые позволяют описывать те или иные ЭГД-явления с достаточной адекватностью и полнотой. Понятие «эффективный» параметр (переменная) обсуждается далее для трех конкретных моделей, представленных в порядке возрастающей степени сложности.

Относительно простой и больше всего используемой является модель униполярно заряженной среды, состоящей из несущих жидкости или газа и заряженных частиц только одного знака, описываемых некоторой эффективной плотностью. Физически можно интерпретировать плотность этих частиц как плотность нескомпенсированного объемного заряда в среде, реально содержащей много сортов ионов. Модель содержит два задаваемых эффективных «электрических» параметра — подвижность ионов и величину их плотности на границе раздела.

Более сложная модель включает две заряженные компоненты разных знаков, объединяющие положительные и отрицательные ионы с соответствующими эффективными плотностями, которые образуются в среде за счет различного типа объемных химических процессов. Например, в жидкостях вследствие диссоциации электролитных примесей на положительные и отрицательные ионы («природные» ионы), в высокотемпературных газовых смесях — в результате реакций ассоциативной ионизации. В этой модели число задаваемых параметров существенно возрастает. Кроме еще одной подвижности необходимо также учитывать коэффициенты объемных электрохимических реакций ионизации и рекомбинации. При описании взаимодействия заряженных частиц с границами раздела в модели возникает еще ряд параметров, связанных с поверхностными электрохимическими процессами.

Дальнейшее усовершенствование модели связано с введением третьей заряженной компоненты, которая попадает в среду путем инъекции с границы раздела (например, с поверхности заряженной стенки). Третья компонента также имеет свою эффективную плотность, подвижность, коэффициент рекомбинации с ионами противоположного знака и свои параметры поверхностных реакций.

В рамках перечисленных трех моделей можно удовлетворительно описать практически все имеющиеся в литературе экспериментальные данные.

## 1. Модель униполярно заряженной среды

Как уже отмечалось, это наиболее используемая в литературе модель. Среда содержит только один сорт заряженных частиц. Физический механизм, приводящий к возникновению такой среды, связан с электрохимическим процессом на заряженном электроде, в результате которого на его поверхности образуются ионы того же знака, что и электрод, при этом за счет электростатического отталкивания происходит инъекция заряженных частиц в среду. В модель входят два задаваемых параметра — подвижность ионов и значение объемной концентрации ионов на поверхности электрода. Сведения о величине подвижности ионов можно получить, например, из непосредственного измерения скорости движения заряженного слоя через межэлектродный промежуток при импульсном включении напряжения [?]. Концентрация ионов на поверхности электрода экспериментально не определяется.

Система уравнений, соответствующая этой модели, имеет вид:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{E} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad q = en \quad (2)$$

$$\mathbf{j} = q(\mathbf{u} + b\mathbf{E}) - D\nabla q \quad (3)$$

$$\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi q, \quad \mathbf{E} = -\nabla F. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $\eta$  — скорость, давление, плотность и динамическая вязкость несущей среды,  $n$ ,  $e$ ,  $b$ ,  $D$  — концентрация, заряд, подвижность и коэффициент диффузии ионов,  $q$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $F$  — плотности объемного заряда и электрического тока, напряженность поля и электрический потенциал,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость. Считается, что имеет место соотношение Эйнштейна  $D = kTb/e$ . Нужно отметить, что диффузионное

слагаемое в (??) становится существенным только в очень узких приэлектродных слоях [?, ?, ?], поэтому обычно диффузией в задачах о движении униполярно заряженных сред пренебрегается.

Уравнения (??)–(??) записаны в приближении ЭГД [?], когда для электромагнитного поля выполнено условие  $E \gg uB/c$  ( $E$ ,  $B$ ,  $u$  — модули характерных значений напряженности электрического поля, магнитной индукции и скорости,  $c$  — скорость света) и при воздействии поля на среду преобладающими являются кулоновские силы.

При решении конкретных задач используются обычные граничные условия для гидродинамических параметров, кроме того, задается значение плотности объемного заряда  $q_w$  на инжектирующем электроде и электрический потенциал  $F_w$  на границах области течения. В сильных приложенных полях, когда индуцированным в силу уравнений (??) электрическим полем можно пренебречь по сравнению с внешним полем, вместо потенциала задается величина напряженности поля на инжектирующем электроде. Значения потенциала или поля на границах можно получить из эксперимента, а сведения об измерении граничной величины заряда  $q_w$  в литературе отсутствуют. Эта величина фактически является неизвестным параметром модели и может быть найдена в результате решения обратной задачи из сравнения расчетных и экспериментально наблюдаемых характеристик ЭГД течения. Например, из решения задачи об устойчивости слоя слабопроводящей жидкости между двумя электродами при наличии приложенного поля можно получить пороговое значение  $q_w$ , при котором неподвижный слой теряет устойчивость и возникают конвективные ячейки в виде цилиндрических валов или ячеек Бенара [?, ?]. На основе униполярной модели исследован широкий класс электрогидродинамических течений: возникновение конвективных ячеек между плоскими или соосными цилиндрическими электродами с увеличением приложенного напряжения [?, ?, ?]; вихревые течения от электрода в виде лезвия и иглы в каналах различной конфигурации [?]; течения в окрестности двух проволочных электродов и т. д.

Отметим, что в рамках униполярной модели, примененной для исследования течений сжимаемых сред, обнаружен новый тип ранее неизвестных разрывных решений в газовой динамике — ударные волны, на фронте которых образуется поверхностный электрический заряд [?, ?]. Из исследования структуры электрогазодинамических ударных волн получено уравнение для определения величины этого заряда, которая зависит от скорости ударной волны, напряженности электрического поля за ее фронтом и коэффициента подвижности ионов. Соотношение, замыка-

ющее систему уравнений на фронте электрогазодинамического разрыва, имеет вид

$$u_{n2} + bE_{n2} = 0,$$

где индексом 2 обозначены значения за фронтом разрыва нормальных к фронту составляющих скорости  $u_n$  и напряженности поля  $E_n$ .

## 2. Модель среды с двумя сортами разноименно заряженных ионов

Двухионная модель дает возможность более адекватно описать физический механизм взаимодействия среды с электрическим полем по сравнению с моделью униполярной среды, поскольку изучаемые в ЭГД вещества реально содержат в виде малых примесей заряженные частицы разных знаков. Модель строится следующим образом [?]. Все примесные ионы разбиваются на два сорта положительно и отрицательно заряженных частиц с некоторыми эффективными концентрациями  $n_1$ , с зарядом частицы  $e_1 > 0$  и подвижностью  $b_1$ , и  $n_2$ , с зарядом  $e_2 < 0$  и подвижностью  $b_2$ . Коэффициенты диффузии  $D_1$ ,  $D_2$ , также входящие в модель, связаны с подвижностями ионов соотношениями Эйнштейна.

Считается, что заряженные частицы в среде могут появляться как за счет объемных, так и поверхностных электрохимических процессов.

В объеме среды протекают реакции диссоциации нейтральных молекул примеси электролитной природы на положительные и отрицательные ионы с некоторой эффективной скоростью  $w(E, T, \dots)$  и рекомбинации ионов в двухчастичном столкновении с коэффициентом  $a$ . При этом скорость диссоциации может зависеть как от термодинамических параметров, так и от напряженности электрического поля. Для оценки величины коэффициента рекомбинации используется формула Ланжевена. В высокотемпературных газовых смесях источником заряженных частиц (в рамках описываемой модели положительных ионов одного сорта и электронов) служат химические реакции типа реакций ассоциативной ионизации, а также ионизация под влиянием электрического поля, если смесь содержит электронно возбужденные молекулы (как, например, в продуктах горения [?]).

На поверхности раздела происходят рекомбинация ионов с образованием нейтральных молекул и обратный процесс ионизации. Для описания поверхностных явлений в модели используются соотношения, полученные из баланса потоков ионов на границу, при этом объемный поток

составляют диффузия и дрейф ионов в электрическом поле. Для записи потока, обусловленного поверхностным процессом, необходимо вводить в модель минимум два параметра для каждого сорта ионов на всех границах [?].

Математическая формулировка модели содержит уравнения движения (??) среды в целом, уравнения Пуассона для поля и потенциала (??) и два уравнения неразрывности для ионов

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{U}_i = w(E) - an_1 n_2, \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

$$n_i \mathbf{U}_i = n_i \mathbf{u} + \operatorname{sign}(e_i) n_i b_i \mathbf{E} - D_i \nabla n_i \quad (6)$$

$$q = \sum e_i n_i, \quad \mathbf{J}_s = \sum e_i n_i \mathbf{U}_i + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7)$$

Здесь учитывается объемный электрохимический процесс и перенос ионов за счет диффузии, который, как уже отмечалось, обычно бывает существенным вблизи границ раздела, где могут возникать слои с большими градиентами концентраций ионов. В выражении для плотности полного электрического тока  $\mathbf{J}_s$  необходимо учитывать ток смещения, который может вносить существенный вклад в измеряемый ток в нестационарных процессах [?, ?, ?]. В многокомпонентных жидких смесях, относящихся к сильным электролитам, молекулы примеси при растворении диссоциируют практически полностью и в уравнениях (??) объемный источник не учитывается. В слабом электролите объемный источник ионов конечен.

Граничные условия для уравнений (??), полученные из баланса потоков ионов на границу, записываются в виде [?]

$$n_i \mathbf{U}_i \cdot \nu = A_i^k(E, n_m, \dots) - K_i^k n_i. \quad (8)$$

Здесь  $\nu$  — внешняя нормаль к границе раздела,  $A_i^k$ ,  $K_i^k$  — эффективные параметры поверхностных электрохимических процессов, характеризующих, соответственно, потоки ионов за счет ионизации и рекомбинации на границе раздела. Эти величины зависят от свойств поверхности, состава жидкости и пр., в частности, параметр  $A_i^k$  может зависеть от поля.

Плотность объемного заряда  $q$ , определяющая кулоновскую массовую силу в уравнении (??), в этой модели уже не характеризуется граничным значением на электроде и находится из распределений ионов, на которые теперь влияет значительно большее число параметров.

В рамках этой модели исследованы важные практические задачи об электрохимической электризации (образовании объемного нескомпенсированного заряда) углеводородных жидкостей при их течении в плоских и цилиндрических каналах в отсутствие приложенных полей [?, ?, ?, ?]. В таких средах заряд возникает в окрестности стенок канала вследствие различия в скоростях поверхностных электрохимических реакций для ионов разных знаков и сносится потоком вниз по течению. В результате из канала вытекает заряженная жидкость, которая при больших объемах перекачки может создавать в собирающих емкостях электрические поля с напряженностью, достаточной для возникновения искры во взрывоопасной атмосфере паров углеводородов. Нескомпенсированный заряд начинает накапливаться в текущей жидкости сразу после входа в канал. Затем на некотором расстоянии  $L$  от входа величина заряда выходит на насыщение и далее вниз по потоку не меняется. При этом в поперечных сечениях канала устанавливаются распределения концентраций заряженных частиц и поля, для которых нормальные к стенкам объемные потоки ионов (??) уравниваются их потоками от поверхностных источников. Длина релаксации  $L$  измеряется в эксперименте. Полученные данные по  $L$  можно использовать [?] для решения обратной задачи об оценке эффективных параметров поверхностных реакций, используемых в теоретической модели.

В экспериментальных работах, выполненных в последние годы в связи с проблемами микрогидродинамики, обнаружено повышенное по сравнению с расчетным гидравлическое сопротивление при прокачке жидкостей с электролитными примесями через плоские микроканалы микронной толщины (электровязкий эффект) [?]. Причину этого связывают с наличием электрически заряженных пристенных слоев, возникающих вблизи границы раздела при течении слабопроводящих жидкостей. При теоретическом объяснении обнаруженного явления за основу принимается следующая картина [?]. Имеются заданный внешний перепад давления, создающий расход жидкого бинарного электролита через узкий плоский микроканал, и индуцированное течением продольное (направленное вдоль канала) электрическое поле, обуславливающее продольный ток проводимости в канале. Это продольное поле определяется принимаемым условием, что в каждом сечении канала равен нулю полный продольный электрический ток, который складывается из конвективного тока переноса вдоль канала объемного электрического заряда пристенного слоя и противоположного ему тока проводимости, распределенного по всему сечению. Продольное поле и объемный заряд создают в пристенном слое кулоновские силы, которые могут тормозить поток.

Проведенные в [?] расчеты показывают, что при некоторых условиях в тонком слое вблизи поверхности стенки образуется возвратное течение, приводящее к увеличению гидравлического сопротивления канала.

Электризация за счет поверхностных процессов позволяет использовать микроканал с жидкостью для работы в режиме насоса при заданном внешнем продольном электрическом поле. Особенность такого типа ЭГД-насоса состоит в том, что объемный электрический заряд, обуславливающий величину ускоряющей среду кулоновской силы, не зависит от приложенного продольного поля и образуется в канале вследствие разности электрохимических потенциалов среды и материала стенок канала. Такого типа насосы широко используются в биологических исследованиях, в медицинских диагностических микроустройствах, в фармацевтике [?, ?, ?, ?].

Модель среды с двумя сортами ионов позволяет описать еще один тип электризации, а именно электродиффузионную электризацию среды в отсутствие внешних полей. Механизм этой электризации обусловлен большим различием в подвижностях разноименно заряженных частиц. Такая ситуация характерна для частично ионизованных газовых смесей, в которых подвижность электронов на три порядка превосходит подвижность ионов [?, ?].

Физическая картина электродиффузионной электризации следующая. При движении ионизованного газа в канале с проводящими стенками более подвижные электроны быстрее достигают поглощающей стенки и их концентрация становится меньше ионной. В среде образуется положительный объемный заряд. Последний индуцирует электрическое поле, направленное к стенке. Поле еще больше увеличивает разницу концентраций ионов и электронов, отталкивая электроны и увеличивая поток ионов к стенке. В условиях, когда объемный источник в правых частях (??) отсутствует, концентрации ионов и электронов вблизи стенки меняются монотонно. Наличие объемного источника ионизации приводит к увеличению объемного заряда, при этом имеет место немонотонный характер изменения концентрации ионов с заметным превышением равновесного уровня в пристеночной области. Увеличение заряда можно объяснить сильной неравновесностью реакции ионизации в окрестности стенки. Вклад в рост концентрации ионов в пристеночной области вносит также индуцированное поле, увеличивающее поток ионов по направлению к стенке.

В результате разделения зарядов за счет объемных электродиффузионных процессов между пространством, заполненным ионизованным газом, и стенкой возникает разность потенциалов  $F_{ed}$ , величина кото-



рой по отношению к стенкам составляет несколько тепловых потенциалов. По аналогии с электрокинетическим дзета-потенциалом в жидкостях величину  $F_{ed}$  можно назвать электродиффузионным потенциалом границы раздела проводящей стенки с частично ионизованным газом. Решение задачи показывает, что основным параметром, влияющим на величину электродиффузионного потенциала  $F_{ed}$ , является проводимость газа. Расчеты [?] показывают, что начиная с некоторого значения проводимости, величина  $F_{ed}$  практически перестает меняться с увеличением проводимости и выходит на предельное значение.

В рамках модели среды с двумя сортами ионов можно исследовать третий вид электризации, не связанный с поверхностными и диффузионными процессами, а именно электрокинетическую электризацию среды в сильных неоднородных электрических полях [?, ?, ?, ?]. Механизм такой электризации обусловлен зависимостью от поля скорости объемной диссоциации нейтральных молекул на ионы, которую можно представить в виде:

$$w(E) = w_0(T, \dots) \exp(2\gamma E^{0.5}), \quad \gamma = e^{1.5}/(\varepsilon^{0.5} kT). \quad (9)$$

Здесь  $w_0(T, \dots)$  — скорость диссоциации в отсутствие поля,  $e$  — элементарный заряд. Нескомпенсированный заряд начинает нестационарно накапливаться в области сильной неоднородности поля после включения напряжения на электродах. Неоднородность поля приводит согласно (??) к неоднородности объемного источника ионов. Возникает дисбаланс потоков ионов, входящих в элемент объема и выходящих из него. Стационарное состояние устанавливается после того, как образующийся заряд изменит поле в соответствии с (??) и дисбаланс потоков исчезнет [?]. Распределение объемного заряда с учетом (??) в окрестности сферического катода численно изучено в [?]. Сферический катод за счет геометрии создает сильно неоднородное поле вблизи поверхности сферы. Непосредственно у поверхности имеется узкий слой положительного заряда. Это обычный дебаевский слой, который образуется в среде у границы раздела при наличии внешнего поля, притягивающего к границе положительные ионы. Далее располагается достаточно протяженная зона отрицательного заряда, образовавшаяся в результате действия указанного выше механизма. Зона всегда имеет знак заряда, одинаковый со знаком электрода. Здесь действует кулоновская сила, отталкивающая отрицательно заряженный слой от электрода. В рамках рассмотренного механизма можно, таким образом, объяснить наблюдаемые в эксперименте струйные течения от иглы или от лезвия, не используя при этом представления об инъекции ионов с поверхности.

Электрокинетический и электродиффузионный механизмы образования объемного заряда позволили объяснить [?, ?, ?] причину расхождений теоретических и экспериментальных данных об электрическом токе, регистрируемом в диагностических устройствах (типа электрического зонда или ионизационного детектора пламени), применяемых для исследования процессов ионизации в плотных высокотемпературных смесях молекулярных газов, образующихся, например, при горении углеводородов. Оказалось, что хорошее согласие с экспериментом получается, если допустить, что сильное электрическое поле, создаваемое электродами диагностических устройств, вызывает дополнительную ионизацию электронно-возбужденных молекул, которые всегда присутствуют в продуктах горения. Таким образом, получено экспериментальное доказательство непосредственного влияния сильных электрических полей на процесс ионизации в плотных высокотемпературных молекулярных газовых смесях. Ранее ионизация газовых молекул электрическим полем наблюдалась только в бесстолкновительных пучковых экспериментах в вакуумных камерах [?].

### 3. Модель среды с тремя сортами ионов

В этой модели вводится еще один сорт ионов с положительным или отрицательным зарядом, которые инжектируются стенкой и участвуют в объемном рекомбинационном процессе с ионами, изначально присутствующими в жидкости. Усложнение модели, связанное с введением набора параметров для поверхностного процесса с участием третьей ионной компоненты, дополнительных подвижности и коэффициента рекомбинации, вызвано потребностью в описании некоторых экспериментальных явлений, которые не получили объяснения в рамках первых двух моделей. В этой модели вместо уравнений (??) записывается система с измененными объемными источниками ионов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} + \operatorname{div}(n_1 \mathbf{U}_1) &= w - \alpha n_1 n_2, \\ \frac{\partial n_2}{\partial t} + \operatorname{div}(n_2 \mathbf{U}_2) &= w - \alpha n_1 n_2 - \beta n_2 n_3, \\ \frac{\partial n_3}{\partial t} + \operatorname{div}(n_3 \mathbf{U}_3) &= -\beta n_2 n_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь для определенности принято, что  $e_3 > 0$ ,  $\beta$  — коэффициент рекомбинации инжектированных ионов с ионами жидкости.

На основе этой модели в [?] была интерпретирована во всем диапазоне приложенных напряжений так называемая кривая Никурадзе, то есть вольт-амперная характеристика электролитической ячейки с плоскими электродами — достаточно простого устройства, при помощи которого измеряют проводимость среды. Теоретически рассчитанная зависимость плотности тока от приложенного напряжения имеет три характерных участка: 1 — линейный омический участок (здесь ток определяется ионами жидкости, изначально существовавшими в среде в результате объемной диссоциации примесей), 2 — участок насыщения (объемный источник не успевает поставлять ионы, которые уходят на электроды в сильном поле) и участок 3, где ток при увеличении напряжения нелинейно растет (основной вклад в ток вносят инжектированные ионы). По углу наклона линейного участка 1 определяют проводимость жидкости.

В рамках третьей модели удалось объяснить обнаруженную в эксперименте сложную биполярную структуру приэлектродного слоя на плоском электроде. Путем зондовых измерений распределения потенциала в окрестности электрода было установлено, что существует локальный экстремум напряженности поля, расположенный вне обычного дебаевского слоя. В соответствии с уравнением Пуассона по обе стороны этого экстремума должен меняться знак нескомпенсированного объемного заряда жидкости. Исследования, проведенные в [?], дали возможность построить следующую картину распределений плотности объемного заряда вблизи электрода в зависимости от величины отношения коэффициентов рекомбинации инжектированных ионов и ионов жидкости.

Вблизи электрода (в данном случае это анод) располагается слой положительного заряда, образованный в основном инжектированными анодом положительными ионами. Эти ионы под действием поля отталкиваются от электрода и рекомбинируют с отрицательными ионами жидкости, которых здесь из-за притяжения к аноду избыток по сравнению с инжектированными положительными ионами. В результате образуется структура, когда область положительного заряда сменяется слоем, заряженным отрицательно. Вдали от электрода жидкость становится квазинейтральной. В расчетах получено достаточно хорошее количественное совпадение размеров заряженных зон с экспериментом. Проведенный анализ показывает, что появление биполярной структуры определяется конкуренцией нескольких процессов: интенсивностью инъекции, миграцией инжектированных ионов под действием поля и их рекомбинацией с природными ионами противоположного знака. При этом такая структура может существовать только в достаточно узком диапазоне соотношений

между подвижностями ионов и между коэффициентами их рекомбинации.

В рамках этой же модели была доказана возможность существования в жидкостях самоподдерживающихся пульсаций тока при постоянном приложенном поле (аналог тричелевских колебаний тока в коронных газовых разрядах) [?, ?]. Установлено, что при наличии порога по напряженности поля для инжекции ионов в жидкости при определенных условиях могут возникать колебания тока и по межэлектродному пространству распространяются волны конечной амплитуды плотности заряда и напряженности поля.

В качестве граничного условия для инжектируемых ионов и потенциала на электродах брались соотношения

$$\begin{aligned} n_3 U_3 &= A_3 E - K_3 n_3, & F &= F_w = \text{const} > 0, & y &= 0; \\ A_3 &= 0, & E < E_c, & & A_3 = \text{const}, & E \geq E_c; \\ n_3 U_3 &= K_3 n_3, & F &= 0, & y &= h. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $E_c$  — пороговое значение поля на электроде (в данном случае — на аноде). Считалось, что поток инжектируемых со стенки ионов линейно зависит от напряженности поля. Условия (??) выписаны для одномерной нестационарной задачи о протекании тока в неподвижной жидкости между двумя плоскими электродами с расстоянием  $h$  один от другого при постоянной заданной разности потенциалов.

Нестационарный пульсирующий процесс протекания тока между электродами возникает в случае, когда напряженность приложенного поля на аноде  $E_w > E_c$ , но различие между этими величинами невелико. После включения напряжения на электродах в жидкости идет нестационарный процесс изменения плотности полного тока за счет перераспределения концентраций природных ионов и распространения инжектированных ионов на весь межэлектродный промежуток. Затем возникает пульсирующий периодический режим изменения полного тока и суммарного объемного заряда.

Механизм появления самоподдерживающихся пульсаций при наличии пороговой инжекции следующий. Инжекция ионов приводит к образованию в узком слое вблизи анода положительного объемного заряда, который уменьшает поле на поверхности электрода до значения, меньшего порогового. Вследствие этого инжекция прекращается, а слой заряда под действием кулоновских сил начинает двигаться с дрейфовой скоростью  $b_3 E$  по направлению к катоду. При удалении слоя заряда от анода на поверхности последнего начинает расти напряженность поля. Когда

поле на аноде достигает порогового значения, включается инжекция. Затем вблизи анода образуется новый слой положительного заряда и описанная картина повторяется вновь. Наличие движущихся слоев положительного объемного заряда вызывает появление волн напряженности поля, причем эти волны распространяются от анода к катоду по сильно неоднородному полю. Наряду с волнами концентрации положительных инжектированных ионов возникают в противофазе волны концентрации положительных примесных ионов жидкости. Возмущения концентрации отрицательных ионов быстро затухают при удалении от анода.

Модель с тремя сортами заряженных частиц применялась в [?] для исследования активного метода уменьшения электризации жидкостей при их течении в каналах при помощи электродов, инжектирующих в среду заряд противоположного знака. В [?] показано, что в зависимости от проводимости жидкости индуцированное поле может достигать на стенках канала величин, достаточных для возникновения инжекции заряда. Возможна также автоэлектронная эмиссия с поверхности электрода. Электроны, попадая в жидкость, прилипают к электроотрицательным молекулам, образуя отрицательные ионы, уменьшающие накопившийся положительный заряд. О присутствии в среде отрицательных ионов свидетельствуют эксперименты [?] по исследованию течений слабопроводящих углеводородных жидкостей в узких каналах сложной формы, где наблюдалось при определенных условиях свечение жидкости и регистрировалось рентгеновское излучение. Механизм свечения может быть связан с дезактивацией высоковозбужденных отрицательных ионов, образовавшихся в реакциях прилипания эмитированных электронов к молекулам жидкости с большой энергией электронного сродства.

Краткий анализ обсуждаемых выше математических моделей взаимодействия слабопроводящих сред с электрическими полями приведен в [?].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-01-00157.

## Список литературы

- [1] Гогосов В. В., Полянский В. А. Электродинамика: задачи и приложения, основные уравнения, разрывные решения // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. — М.: ВИНТИ, 1976. — Т. 10. — С. 5–85.

- [2] Pankratieva I. L., Polyansky V. A. On discharge phenomena in nonpolar liquids // *J. of Electrostatics*. — 2001. — V. 51–52. — P. 476–480.
- [3] Pérez A. T., Castellanos A. Role of charge diffusion in finite-amplitude electroconvection // *Physical Review A*. — 1989. — V. 40. No. 10.
- [4] Fernandes D. V., Lee H.-D., Park S., Suh Y. K. Electrohydrodynamic instability of dielectric liquid between concentric circular cylinders subjected to unipolar charge injection // *J. of Mechanical Science and Technology*. — 2013. — V. 27 (2). — P. 461–467.
- [5] Панкратьева И. Л., Полянский В. А. Исследование механизмов возникновения неустойчивости в слабопроводящих средах в электрических полях // *Изв. РАН. МЖГ*. — 2015. — № 6. — С. 63–70.
- [6] Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле // *Изв. РАН. МЖГ*. — 1969. — № 2. — С. 31–45.
- [7] Vázquez P. A., Castellanos A. Numerical simulation of EHD flows using Discontinuous Galerkin Finite Element methods // *Computers and Fluids*. — 2013. — P. 270–278.
- [8] Traoré P., Wu J. On the limitation of imposed velocity field strategy for Coulomb-driven electroconvection flow simulations // *J. Fluid Mech.* — 2013. — V. 727. — R3-1–R3-12.
- [9] Wu J., Traoré Ph., Vázquez P. A., Pérez A. T. Onset of convection in a finite two-dimensional container due to unipolar injection of ions // *Physical Review E*. — 2013. — V. 88. 053018. — 1–9.
- [10] Faizullin R. T., Pankratieva I. L., Polyansky V. A., Sakharov V. I. On some electrohydrodynamic phenomena due to charge injection into a flow of a low-conductivity liquid // *Conf. Record of 12 Int. Conf. on Conduction and Breakdown in Dielectric Liquids*. — Roma, Italy, 1996. — P. 547–549.
- [11] Gogosov V. V., Polyansky V. A. Shock waves in electrohydrodynamics // *Progress in Aerospace Sciences*. — Pergamon Press, 1983. — V. 20. — P. 125–216.
- [12] Гогосов В. В., Полянский В. А. Разрывы в электрогидродинамике // *ПММ*. — 1971. — Т. 35. № 5. — С. 761–772.
- [13] Панкратьева И. Л., Полянский В. А. Моделирование электрогидродинамических течений в слабопроводящих жидкостях // *ПМТФ*. — 1995. — Т. 36. № 4. — С. 36–44.

- [14] Панкратьева И. Л., Полянский В. А. Об ионизации электронно-возбужденных молекул сильным электрическим полем // Доклады РАН. — 2011. — Т. 437. № 5. — С. 617–620.
- [15] Варганян А. А., Гогосов В. В., Полянский В. А., Полянский К. В., Шапошникова Г. А. Моделирование нестационарных процессов в каналах ЭГД-насосов // Известия РАН. МЖГ. — 1994. — № 3. — С. 30–41.
- [16] Панкратьева И. Л., Полянский В. А. Волны плотности объемного заряда в слабопроводящих жидкостях // Доклады РАН. — 1999. — Т. 365. № 4. — С. 471–474.
- [17] Polyansky V. A., Pankratieva I. L. Electric current oscillations in low-conducting liquids // J. of Electrostatics. — 1999. — V. 48. — P. 27–41.
- [18] Touchard G. Flow electrification of liquids // J. of Electrostatics. — 2001. — V. 51–52. — P. 440–447.
- [19] Bograchev D. A., Martemianov S., Paillat T. Modelling of electrification in steady state and transient regimes // J. of Electrostatics. — 2012. — V. 70. Issue 6. — P. 517–523.
- [20] Панкратьева И. Л., Полянский В. А. Электризация слабопроводящих жидкостей вблизи стенки // Известия РАН. МЖГ. — 2006. — № 2. — С. 3–16.
- [21] Прибылов В. Н. Экспериментальное исследование тока электризации диэлектрических жидкостей в цилиндрической трубке // Коллоидный журнал. — 1996. — Т. 58. № 4. — С. 524–527.
- [22] Van H., Lin B., Song Z. Effect of electrical double layer on electric conductivity and pressure drop in a pressure-driven microchannel flow // Biomicrofluidics. — 2010. — March; 4 (1): 014104.
- [23] Полянский В. А., Панкратьева И. Л. Об электровязком эффекте при электризации жидкостей в микроканалах // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. — 2011. — № 4 (5). — С. 2430–2432.
- [24] Daiguji H., Yang P., Szeri A. J., Majumdar A. Electrochemomechanical Energy Conversion in Nanofluidic Channels // Nano Lett. — 2004. — V. 4. No. 12. — P. 2315–2331.
- [25] Karnik R., Fan R., Yue M., Li D., Yang P., Majumdar A. Electrostatic Control of Ions and Molecules in Nanofluidic Transistors // Nano Letters. — 2005. — V. 5. No. 5. — P. 943–948.

- [26] Postler T., Slouka Z., Svoboda M., Pribyl M., Snita D. Parametrical studies of electroosmotic transport characteristics in submicrometer channels // *J. of Colloid and Interface Science.* — 2008. — V. 320. — P. 321–332.
- [27] Полянский В. А., Панкратьева И. Л. Особенности течений вязких электризующихся жидкостей в нано-размерных каналах // «Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей». Сб. докладов X Международной научной конференции. — СПб: СОЛО, 2012. — С. 76–78.
- [28] Ватажин А. Б., Улыбышев К. Е. Модель формирования электрического тока выноса в каналах авиационных реактивных двигателей // *Изв. РАН. МЖГ.* — 2000. — № 5. — С. 139–148.
- [29] Polyansky V. A., Pankratieva I. L. Space charge generation in flows of weakly conductive media with large difference of charged particles mobilities // *J. of Electrostatics.* — 2008. — V. 66. — P. 432–437.
- [30] Апфельбаум М. С., Полянский В. А. Об образовании объемного заряда в слабопроводящих средах // *Магнитная гидродинамика.* — 1982. — № 1. — С. 71–76.
- [31] Панкратьева И. Л., Полянский В. А. К расчету сил, действующих на слабопроводящую жидкость в электрическом поле // *ПММ.* — 1985. — Т. 49. Вып. 5. — С. 766–773.
- [32] Ryu J. C., Park H. J., Park J. K., Kang K. H. New Electrohydrodynamic Flow Caused by the Onsager Effect // *Physical Review Letters.* — 2010. — V. 104. 104502. — 1–4.
- [33] Kim W., Ryu J. C., Suh Y. K., Hyoung K. Pumping of dielectric liquids using non-uniform-field induced electrohydrodynamic flow // *Applied Physics Letters.* — 2011. — V. 99, 224102. — 1–3.
- [34] Аравин Г. С., Власов П. А., Карасевич Ю. К., Маколкин Е. В., Панкратьева И. Л., Полянский В. А. Зондовый метод диагностики в плотной нестационарной покоящейся плазме при наличии неравновесных химических процессов // *Химические реакции в неравновесной плазме.* — М.: Наука, 1983.
- [35] Власов П. А., Карасевич Ю. К., Панкратьева И. Л., Полянский В. А. Методы исследования кинетики ионизации в ударных волнах // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике. Электронный журнал.* [Эл. ресурс]. — URL: <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-12-25-001.pdf>.



- [36] Polyansky V. A., Pankratieva I. L. Ionization of electronically excited molecules in hydrocarbon combustion under the action of a strong electric field // *J. of Electrostatics*. — 2012. — V. 70. — P. 201–206.
- [37] Kuprijanov S. E. Ionization of Highly Excited Atoms and Ions of Noble Gases in an Electric Field and Near a Metallic Surface // *JETP Letters*. — 1967. — V. 5. Issue 8. — P. 197–200.
- [38] Панкратьева И. Л., Полянский В. А. Исследование механизма протекания тока в слабопроводящих жидкостях при наличии объемных и поверхностных электрохимических процессов // *Труды МИАН*. — 1998. — Т. 223. — С. 248–254.
- [39] Polyansky V. A., Pankratieva I. L. Multilayer charged structure in nonpolar dielectric liquids // *J. of Colloid and Interface Science*. — 2000. — V. 230. — P. 306–311.
- [40] Панкратьева И. Л., Полянский В. А. Образование сильных электрических полей при течении жидкости в узких каналах // *Докл. РАН*. — 2005. — Т. 403. № 5. — С. 619–622.
- [41] Монахов А. А., Полянский В. А., Панкратьева И. Л. Возникновение рентгеновского излучения при движении жидкости в тонком диэлектрическом канале // «Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей». Сб. докладов XI Международной научной конференции. — СПб: ИД «Петроградский», 2015. — С. 224–227.
- [42] Панкратьева И. Л., Полянский В. А. Математическое моделирование в электрогидродинамике // *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*. — 2016. — Т. 20, вып. 3. — С. 225–229.