Функциональные соответствия Галуа для классов дискретных функций и свойство Эрроу для симметричных классов решающих правил

Н. Л. Поляков (Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации, Москва)

Соответствия Галуа для классов дискретных функций, порожденные отношением сохранения между функциями f на множестве A и множествами H функций $f : Q \to A$ для произвольного множества Q, есть удобный инструмент для изучения ряда абстрактных и прикладных задач. В работе на языке функциональных соответствий Галуа сформулирована одна из основных задач теории коллективного выбора и предложена удобная характеризация симметричных классов решающих правил без свойства Эрроу.

Ключевые слова: соответствие Галуа, замкнутый класс, клон, свойство Эрроу.

Соответствие Галуа $(\mathrm{inv}, \mathrm{pol})$, порожденное отношением сохранения функцией $f : A^n \to A$ предиката $P \subseteq A^m$ является в настоящее время одним из основных понятий теории замкнутых классов дискретных функций. Тем не менее, в ряде исследований удобно использовать язык соответствий Галуа $(\mathrm{inv}_Q, \mathrm{pol})$, которые порождаются отношением сохранения функцией $f : A^n \to A$ множества функций $H \subseteq A^Q$ с произвольной областью определения Q. Используя этот язык и варьируя множество Q, можно прийти, с одной стороны, к понятию функциональной замкнутости, а с другой стороны, к соответствию $(\mathrm{inv}, \mathrm{pol})$. При изучении некоторых специфических задач возникает необходимость рассмотрения «промежуточных» значений Q. Например, в теории коллективного выбора (social choice theory) естественным образом возникает отношение сохранения *правилом агрегирования* f множества *индивидуальных предпочтений*, моделируемых r-функциями выбора на множестве альтернатив A (см. [1–2]). Это приводит к соответствиям $(\mathrm{inv}_{[A]^r}, \mathrm{pol})$, где $[A]^r$ обозначает множество всех r-элементных подмножеств множества A.

Функциональные соответствия Галуа для классов дискретных функций

Пусть даны непустые множества A и Q. Множество всех всех функций (любой арности) на множестве A обозначается $\mathcal{O}(A)$.

Для любого натурального числа n функция $f : A^n \to A$ *сохраняет* множество $H \subseteq A^Q$, если для любых $h_1, h_2, \ldots, h_n \in H$ функция $f^Q(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, заданная условием

$$(\forall q \in Q)\, f^Q(h_1, h_2, \ldots, h_n)(q) = f(h_1(q), h_2(q), \ldots, h_n(q)),$$

принадлежит множеству H.

Для любой функции $f \in \mathcal{O}(A)$ и множества $H \in \mathcal{P}(A^Q)$ положим:

$$\mathrm{inv}_Q\, f = \{H \subseteq A^Q : f \text{ сохраняет } H\};$$
$$\mathrm{pol}\, H = \{f \in \mathcal{O}(A) : f \text{ сохраняет } H\}.$$

Для любых множеств $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ и $\mathbb{H} \subseteq \mathcal{P}(A^Q)$ положим

$$\mathrm{inv}_Q\, \mathcal{F} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{inv}_Q\, f \text{ и } \mathrm{pol}\, \mathbb{H} = \bigcap_{H \in \mathbb{H}} \mathrm{pol}\, H.$$

Предложение 1. *Пара* $(\mathrm{inv}_Q, \mathrm{pol})$ *есть антимонотонное соответствие Галуа между булевыми решетками* $\mathcal{P}(\mathcal{O}(A))$ *и* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A^Q))$. *Каждое Галуа-замкнутое множество* $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}(A))$ *замкнуто относительно суперпозиции и содержит все селекторные функции, то есть является клоном.*

Основные свойства множеств $\mathrm{inv}_Q\, f$ перечислены в следующем предложении. Для любых множеств P и множества $H \subseteq A^Q$ *распространением* множества H на множество P назовем множество

$$H \downharpoonright P = \{g \in A^{P \cup Q} : g \upharpoonright Q \in H\}.$$

Предложение 2. *Пусть дано непустое множество* P, *множества* $\mathcal{F} \subseteq A^Q$, $G, H \subseteq A^Q$ *и функция* $\sigma\colon P \to Q$. *Тогда,*

(1) *если* $G, H \in \mathrm{inv}_Q\, \mathcal{F}$, *то* $G \cap H \in \mathrm{inv}_Q\, \mathcal{F}$,

(2) *если* $H \in \mathrm{inv}_Q\, \mathcal{F}$, *то* $H \downharpoonright P \in \mathrm{inv}_{Q \cup P}\, \mathcal{F}$,

(3) *если* $H \in \mathrm{inv}_Q\, \mathcal{F}$, *то* $H \cdot \sigma = \{h \cdot \sigma : h \in H\} \in \mathrm{inv}_P\, \mathcal{F}$.

Следующие два предложения показывают связь функциональных соответствий Галуа и соответствия $(\mathrm{inv}, \mathrm{pol})$. Для каждого натурального числа n каждую n-ку $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ элементов множества A можно отождествить с функцией $h : \mathrm{E}_n \to A$ (где $\mathrm{E}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$), определенную равенствами $h(i) = a_i$ для всех $i < n$. Таким образом любой предикат $R \subseteq A^n$ отождествляется с некоторым множеством функций $h : \mathrm{E}_n \to A$.

Предложение 3. *Для любого множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$, натурального числа n и предиката $R \subseteq A^n$ следующие утверждения равносильны:*
(1) $R \in \mathrm{inv}\, \mathcal{F}$.
(2) $R \in \mathrm{inv}_{\mathrm{E}_n} \mathcal{F}$ *(при указанном отождествлении).*

Для каждого множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ положим

$$\mathcal{F}^Q = \{f^Q : f \in \mathcal{F}\}.$$

Предложение 4. *Для любых множеств $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ и $H \subseteq A^Q$ следующие утверждения равносильны:*
(1) $H \in \mathrm{inv}_Q \mathcal{F}$,
(2) *H есть одноместный предикат из множества* $\mathrm{inv}\, \mathcal{F}^Q$.

Наконец, сформулируем связь функциональных соответствий Галуа и функциональной замкнутости.

Предложение 5. *Пусть дано множество $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ и натуральное число n. Пусть $\mathcal{F}^*$ есть клон, порожденный множеством $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^*_n$ есть множество всех n-местных функций из $\mathcal{F}^*$. Тогда $\mathcal{F}^*_n$ принадлежит множеству* $\mathrm{inv}_{A^n} \mathcal{F}$.

Свойство Эрроу для симметричных множеств решающих правил

Одна из моделей теории коллективного выбора состоит в следующем (см. [3]). Пусть даны конечные множества Q (условий) и A (решений). Решающим правилом называется любая функция $f \in A^Q$. Обычно рассмотрения ограничиваются некоторым множеством допустимых решающих правил $H_0 \subseteq A^Q$. В работах [1–2] изучается случай, в котором множество допустимых решающих правил есть множество всех r-функций выбора на множестве A (соответственно, $Q = [A]^r$). В более общей ситуации естественно рассматривать множество «функций выбора», которые определены на некотором классе подмножеств множества A, обогащенных какой-либо дополнительной структурой, например, на мультимножествах или на линейных упорядочениях множества A (существуют и другие естественные примеры).

Множество $H \subseteq H_0$ называется (слабо) *симметричным*, если для каждой перестановки σ множества A существует такая перестановка σ^* множества Q, что вместе с каждой функцией h множество H содержит функции h^+_σ и h^-_σ, определенные равенствами

$$h^+_\sigma(q) = \sigma h((\sigma^*)^{-1}q) \text{ и } h^-_\sigma(q) = \sigma^{-1}h(\sigma^* q)$$

для всех $q \in Q$.

(Простым) *правилом агрегирования* называется любая консервативная функция $f \in \mathcal{O}(A)$ (функция $f \in \mathcal{O}(A)$ называется *консервативной*, если она сохраняет любой одноместный предикат, иначе говоря, удовлетворяет условию $(\forall \mathbf{a} \in \operatorname{dom} f)\, f(\mathbf{a}) \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$).

Множество $H \subseteq H_0$ обладает (простым) *свойством Эрроу*, если для каждого натурального числа n каждая n-местное правило агрегирования $f \in \operatorname{pol} H$ совпадает с некоторой селекторной функцией на множестве $\{(h_1(q), h_2(q), \ldots, h_1(q)) : q \in Q, h_1, h_2, \ldots, h_n \in H\}$.

В работе [2] получена полная классификация симметричных множеств r-функций выбора на конечном множестве A, обладающих свойством Эрроу. В общем случае исчерпывающая классификация, по всей видимости, невозможна, однако можно сформулировать условие, которое сильно ограничивает класс симметричных множеств решающих правил без свойства Эрроу и, по существу, сводит вопрос об их полной классификации к простым комбинаторным свойствам множества H_0.

Обозначим

— символом $\mathbb{B}_0$ множество всех множеств вида

$$\{h \in A^Q : h(q) \in B\}, \text{ где } q \in Q \text{ и } B \subseteq A;$$

— символом $\mathbb{B}_1$ множество всех множеств вида

$$\{h \in A^Q : h(p) = a \vee h(q) = b\}, \text{ где } p, q \in Q \text{ и } a, b \in A;$$

— символом $\mathbb{B}_2(R)$ множество всех множеств вида

$$\{h \in A^Q : h(q) = \sigma h(p)\},$$

где $R \subseteq A^{<\omega} \times A^{<\omega}$, $p, q \in Q$, $\sigma \in S_A$ и $(\mathbf{b}, \sigma\mathbf{b}) \in R$ для всех $\mathbf{b} \in A^{<\omega}$.

Далее, для любого множества B обозначим символом $L_4(B)$ клон с носителем B, порожденный всеми трехместными консервативными функциями f, которые удовлетворяют тождествам

$$f(x,x,y) = f(x,y,x) = f(y,x,x) = y.$$

Наконец, обозначим символом $\mathbb{B}_3$ множество всех множеств вида

$$\mathrm{inv}_P(L_4(B)) \downharpoonleft Q, \text{ где } P \subseteq Q \text{ и } B \in [A]^2.$$

Бинарное отношение $R \subseteq A^{<\omega} \times A^{<\omega}$ назовем *стабильным*, если
(1) $\mathbf{a}\, R\, \mathbf{b} \to \mathbf{a} = \sigma\mathbf{b}$ для некоторой перестановки σ множества A;
(2) $\mathbf{a}\, R\, \mathbf{b} \to \sigma\mathbf{a}\tau\, R\, \sigma\mathbf{b}\tau$ для любой перестановки σ множества A, натурального числа k и функции $\tau\colon \{0,1,\ldots,k-1\} \to \mathrm{dom}\,\mathbf{a}$.

Для каждого множества $H \subseteq A^Q$ и натурального r положим $r(H) = \max\limits_{q \in Q} |\{h(q) : h \in H\}|$, $Q_{H,r} = \{q \in Q : |\{h(q) : h \in H\}| \leqslant r\}$ и $H_r = H \upharpoonright Q_{H,r}$.

Теорема 1. *Пусть даны непустые конечные множества A и Q и симметричное множество $H \subseteq A^Q$ без свойства Эрроу. Тогда существует стабильное бинарное отношение $R \subseteq A^{<\omega} \times A^{<\omega}$, для которого выполнено одно из следующих условий:*
(1) $H = \bigcap \mathbb{B}$ *для некоторого* $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_0 \cup \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2(R)$*;*
(2) $H = \bigcap \mathbb{B}$ *для некоторого* $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_0 \cup \mathbb{B}_3$*;*
(3) $H = \bigcap \mathbb{B} \cap \mathrm{inv}_Q\, L_4(A)$ *для некоторого* $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_0 \cup \mathbb{B}_2(R)$*;*
(4) *существует натуральное число r $(1 < r < r(H))$, для которого $H = \bigcap \mathbb{B} \cap (H_r \downharpoonleft Q)$ для некоторого $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_0 \cup \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2(R)$, причем любая n-местная консервативная функция $f \in \mathrm{pol}\, H$ совпадает с некоторой проекцией на множестве $A^n_{\leqslant r} = \{\mathbf{a} \in A^n : |\mathrm{ran}\,\mathbf{a}| \leqslant r\}$ (и, следовательно, H_r обладает свойством Эрроу).*

Автор выражает сердечную благодарность академику Валерию Борисовичу Кудрявцеву за поддержку и доброжелательное внимание к работе.

Список литературы

[1] Shelah S. On the Arrow property // Advances in Applied Mathematics. — 2005. — No. 34. — P. 217–251.

[2] Поляков Н. Л., Шамолин М. В. Об одном обобщении теоремы Эрроу // Доклады Российской Академии наук. — 2014. — Т. 456, № 2. — С. 143–145.

[3] Поляков Н. Л. О приложении теории функциональных систем к некоторым проблемам теории коллективного выбора // Материалы международной научной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения». — Минск, 2015. — С. 131–133.