О вычислимости функций коллективами из двух автоматов

Н. Ю. Волков (Москва), В. В. Ушакова (Ташкент)

В работе исследуется возможность вычисления малыми коллективами автоматов арифметических функций на целочисленной прямой. Будем говорить, что коллектив автоматов (W_1, W_2) находится в a-расстановке ($a \geqslant 0$), если автомат W_2 находится на a делений правее автомата W_1. Будем говорить, что коллектив автоматов (W_1, W_2) вычисляет целочисленную функцию $f(x)$, если для любого целого неотрицательного x, стартуя из x-расстановки, коллектив останавливается в $f(x)$-расстановке. В зависимости от ограничений на подвижность автоматов коллектива определяются сильная вычислимость функций коллективом автоматов, слабая вычислимость и просто вычислимость. В работе полностью описан класс целочисленных функций, вычислимых коллективами из двух автоматов. Этот класс представляет собой композиции «периодических» функций и функций вида $f(x) = x + c$. Показано, что классы всех функций, вычислимых коллективами из двух автоматов, слабо вычислимых коллективами из двух автоматов и сильно вычислимых коллективами из двух автоматов — совпадают. Также показано, что класс функций, вычислимых коллективами из трех автоматов — значительно шире.

Ключевые слова: коллектив автоматов, лабиринт, вычислимость, целочисленные функции.

Обозначим множества натуральных и целых чисел как $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, соответственно. Положим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество целых точек на прямой будем также обозначать символом $\mathbb{Z}$, рассматривая это множество как геометрический объект, а именно, как лабиринт, в котором могут перемещаться автоматы. Точку на этой прямой будем идентифицировать при помощи ее координаты x. Назовем r-окрестностью точки x_0 множество целых точек $D_{x_0,r} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \ |x - x_0| \leqslant r\}$.

Под автоматом будем понимать инициальный конечный автомат вида $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, где A — входной, B — выходной, Q — внутренний алфавиты автомата $\mathcal{A}$, $\varphi : Q \times A \to Q$ и $\psi : Q \times A \to B$ — функции переходов и выходов $\mathcal{A}$, соответственно, $q_0 \in Q$ — его начальное состояние. Алфавит A определяет возможности $\mathcal{A}$ «видеть» происходящее вокруг, а алфавит B — его возможности перемещаться. Алфавит Q и функции φ и ψ задают внутреннюю логику автомата.

Выходным алфавитом автомата $\mathcal{A}$, перемещающегося в лабиринте $\mathbb{Z}$, является множество $B = D_{0,V}$, где параметр $V \in \mathbb{N}$ называется *скоростью автомата* $\mathcal{A}$. Входной алфавит $\mathcal{A}$ зависит от параметра $R \in \mathbb{N}$ $(R \geqslant V)$, называемого *обзором автомата* $\mathcal{A}$ и способа взаимодействия $\mathcal{A}$ с другими автоматами. В данной работе рассматривается поведение *коллектива автоматов* $K = (W_1, \ldots, W_m)(R, V)$ $(m \geqslant 2)$ в лабиринте $\mathbb{Z}$.

Пусть автомат $\mathcal{A}$ со скоростью V и обзором R находится в точке x_0. Множество $D_{x_0,R}$ называется *зоной обзора* $\mathcal{A}$. Фиксируем произвольные расположения всех автоматов коллектива K в лабиринте $\mathbb{Z}$. Состояние зоны обзора автомата W_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ определяется расположением других автоматов коллектива в зоне обзора W_j, а также состояниями автоматов, попавших в зону обзора W_j. Входным алфавитом автомата W_j будет множество всех возможных состояний его конечной зоны обзора.

В каждый такт времени каждый автомат W_j получает на вход символ, кодирующий состояние его зоны обзора. В соответствии со своими функциями переходов и выходов, W_j вырабатывает свой выходной символ b и меняет свое состояние. При этом, если W_j в такт t находился в точке $x(t)$ и выдал выходной символ $b(t)$, это означает, что он переходит в точку $x(t+1) = x(t) + b(t)$, где и будет находиться в такт $(t+1)$.

Будем говорить, что некий автомат *остановился* в такт времени t, если, начиная с этого такта, его выходной символ тождественно равен 0 и его состояние не меняется (то есть автомат прекратил передвижение в лабиринте). Будем говорить, что автомат *неподвижен*, если, его выходной символ тождественно равен 0 и его состояние не меняется. Будем говорить, что коллектив автоматов K остановился в такт t, если к этому такту остановились все его автоматы.

Расположение коллектива автоматов $K = (W_1, \ldots, W_m)(R, V)$ в лабиринте $\mathbb{Z}$, при котором все автоматы, кроме W_2, находятся в одной и той же точке x_0, а W_2 находится в точке $x_0 + a$ (где $a \in \mathbb{N}_0$), назовем *a-расстановкой с центром* x_0. Пусть дана целочисленная одноместная функция $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Будем говорить, что коллектив автоматов K *вычисляет функцию* f, если, стартуя в лабиринте $\mathbb{Z}$ из любой

a-расстановки, коллектив K в некоторый такт времени остановится в $f(a)$-расстановке.

Класс всех целочисленных одноместных функций, вычислимых в $\mathbb{Z}$ коллективами из m автоматов, имеющих обзор R и скорость V, обозначим как $F_m^{R,V}$. Очевидно вложение $F_2^{R,V} \subseteq F_3^{R,V} \ldots \subseteq F$, где F — множество всех вычислимых целочисленных функций от одной переменной. Также очевидно, что класс функций $F_m^{R,V}$ замкнут относительно суперпозиции.

Получены следующие результаты.

Утверждение 1. *$\forall\, m, R_1, R_2, V_1, V_2$ верно $F_m^{R_1,V_1} = F_m^{R_2,V_2}$.*

Это утверждение позволяет нам ниже заменить обозначение $F_m^{R_1,V_1}$ на более простое обозначение того же класса функций F_m.

Назовем функцию $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ периодической с периодом T и предпериодом T_0, если $\forall\, k \in \mathbb{N}, \forall\, x > T_0$, верно $f(x) = f(x + k \cdot T)$. Согласно этому определению, константа является частным случаем периодической функции.

Теорема 1. *Класс F_2 описывается следующим образом:*
1) F_2 содержит все функции вида $f(x) = x + c$;
2) F_2 содержит все периодические функции;
3) F_2 не содержит никаких функций, кроме указанных выше в п. 1) и 2).

Утверждение 2. *$F_2 \neq F_3$.*

Утверждение 3. *$F_4 = F_5 = \ldots = F$, где F — множество всех вычислимых целочисленных функций от одной переменной.*

Таким образом, задача полного исследования последовательности функций F_2, F_3, F_4 ... сводится к нахождению класса F_3.

Подобные же результаты получены для различных вариаций определения вычислимых функций. Так, например, будем говорить, что коллектив автоматов K *сильно вычисляет функцию* f, если, автомат W_1 неподвижен, при этом, коллектив K, стартуя в лабиринте $\mathbb{Z}$ из любой a-расстановки, в некоторый такт времени остановится в $f(a)$-расстановке. Класс всех целочисленных одноместных функций, сильно вычислимых в $\mathbb{Z}$ коллективами из m автоматов, имеющих обзор R и скорость V, обозначим как $F_m'^{R,V}$.

Утверждение 4. *$\forall\, m, R, V$ верно $F_m'^{R,V} = F_m$.*

Авторы работы выражают признательность академику В. Б. Кудрявцеву за постановку задачи коллективного взаимодействия автоматов в лабиринтах и постоянное внимание к этой тематике.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[2] Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. — 2003. — Т. 15. Вып. 3.

[3] Волков Н. Ю. Об автоматной модели преследования // Дискретная математика. — 2007. — Т. 19. Вып. 2. — С. 131–160.