О быстродействии сетей из нейронов Мак-Каллока-Питтса

В. С. Половников, А. А. Часовских, Е. Ф. Павлов
(МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

Известно, что нейронные схемы реализуют кусочно-постоянные функции. Для соответствия нейронным сетям модели Мак-Каллока-Питтса следует разрешить использование только «цельных нейронов». В этом случае выход нейронной схемы будет принимать значение из множества $\{0, 1\}$, а функция реализуемая схемой — индикаторной. В работе доказана представимость произвольной индикаторной функции нейронными сетями с не более чем тремя слоями. Сформулирован критерий представимости функций индикаторов двуслойными нейронными сетями.

Ключевые слова: нейронная сеть, нейронная схема, нелинейная глубина, модель Мак-Каллока-Питтса.

1. Введение

В работах [**?**, **?**, **?**, **?**] было введено понятие нейронной схемы Мак-Каллока-Питтса как схемы из функциональных элементов [**?**, **?**] следующих четырех типов:

1) Константа c, $c \in \mathbb{R}$ (рис. 1а)
2) Сумматор Σ_n с произвольным количеством входов $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $\Sigma_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Sigma_n(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \ldots + a_n$ (рис. 1б)
3) Усилитель f_γ, $\gamma \in \mathbb{R}$, $f_\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\gamma(a) = \gamma a$ (рис. 1в)
4) Функция Хевисайда θ, $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \geqslant 0 \\ 0, & \text{если } a < 0 \end{cases}$ (рис. 1г)

Из этих элементов можно составить нейрон модели Мак-Каллока-Питтса, пусть у него n входов с весами $a_1, \ldots, a_n$ и порог c (рис. 2).

Следовательно, произвольную нейронную сеть модели Мак-Каллока-Питтса [**?**] можно представить нейронной схемой. Однако обратное

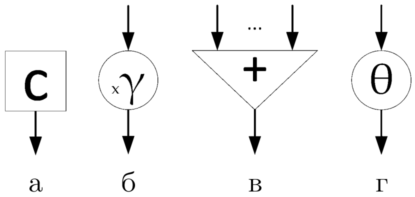

Рис. 1.

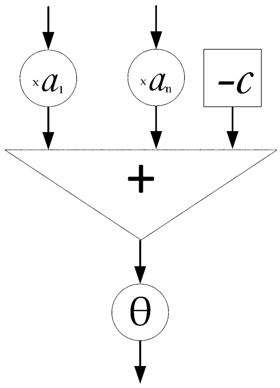

Рис. 2.

вообще говоря не верно, так как нейронная сеть модели Мак-Каллока-Питтса должна состоять из «цельных нейронов». Очевидно существуют нейронные схемы не соответствующие никакой нейронной сети хотя бы потому, что выход нейронной сети — выход какого-то нейрона. А так как в модели нейрона Мак-Каллока-Питтса функцией активации является θ-функция Хевисайда, то функция, реализуемая нейронной сетью будет принимать значения из множества $\{0, 1\}$.

Напомним основные определения.

Определение 1. (Эквивалентность точек относительно набора гиперплоскостей) Пусть $l_1, \ldots, l_k$ — гиперплоскости, задаваемые уравнениями

$$l_i : \bar{x} \cdot \bar{a}_i = c_i,\ \bar{a}_i \in \mathbb{R}^n,\ c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, k.$$

$\bar{x} \sim \bar{y}$ относительно $l_1, \ldots, l_k \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, k\}\ sgn(\bar{x} \cdot \bar{a}_i - c_i) = sgn(\bar{y} \cdot \bar{a}_i - c_i)$

$$\text{Где } sgn(b) = \begin{cases} -1, & b < 0 \\ 0, & b = 0 \\ 1, & b > 0 \end{cases}$$

Пространство $\mathbb{R}^n$ разбивается на классы эквивалентности $R_1, \ldots, R_s$. Каждому классу R можно сопоставить вектор с компонентами из множества $\{-1, 0, 1\}$, называемый сигнатурой класса R:

$$\sigma(R) = (\sigma_i)_{i=1}^k, \text{ где } \sigma_i = sgn(\bar{x} \cdot \bar{a}_i - c_i) \text{ постоянное значение для } \bar{x} \in R.$$

Определение 2. (Кусочно-постоянная функция) Пусть $R_1, \ldots, R_s$ — все классы эквивалентности на которые гиперплоскости $l_1, \ldots, l_k$ разбивают $\mathbb{R}^n$.

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется кусочно-постоянной, если $\forall j \in \{1, \ldots, s\}$ найдется $d_j \in \mathbb{R}$, что $\forall \bar{x} \in R_j \ f(\bar{x}) = d_j$.

Определение 3. (Индикаторная функция) Кусочно-постоянную функцию, принимающую значения из множества $\{0, 1\}$, назовем индикаторной.

Определение 4. (Эквивалентность нейронных сетей модели Мак-Каллока-Питтса) Две нейронные сети назовем эквивалентными, если они реализуют одну и ту же функцию.

Таким образом, согласно [**?**, **?**], нейронная сеть модели Мак-Каллока-Питтса, являясь частным случаем нейронной схемы, будет реализовывать кусочно-постоянную функцию со значениями из множества $\{0, 1\}$, а значит некоторую индикаторную функцию.

Более того покажем, что любая индикаторная функция может быть реализована такой нейронной сетью.

2. О трехслойности нейронных сетей

Теорема 1. *Произвольная индикаторная функция может быть реализована нейронной сетью модели Мак-Каллока-Питтса с не более чем тремя слоями.*

Доказательство. Пусть дана индикаторная функция $f(\bar{x})$. По определению индикаторных функций (как частного случая кусочно-постоянных функций) для $f(\bar{x})$ существуют гиперплоскости $l_1, \ldots, l_k$, l_i: $l_i(\bar{x}) = \bar{a}_i \cdot \bar{x} - c_i$, $\bar{a}_i \in \mathbb{R}^n$. Эти гиперплоскости разбивают пространство $\mathbb{R}^n$ на классы $R_1, \ldots, R_s$, на которых $f|_{R_j}(\bar{x}) = d_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \ldots, s$.

Для каждой гиперплоскости l_i, $i = 1, \ldots, k$ на первом слое нейросети поместим 2 нейрона, реализующих функции $\theta(l_i(\bar{x}))$ и $\theta(-l_i(\bar{x}))$. Таким образом на первом слое $2k$ нейронов.

Пусть $\{R_{j_1}, \ldots, R_{j_{s'}}\} \subseteq \{R_1, \ldots, \mathbb{R}_s\}$ — подмножество классов, на котором функция $f(\bar{x})$ принимает значение 1. Для каждого R_{j_m}, $m = 1, \ldots, s'$ реализуем нейрон согласно сигнатуре класса $\sigma(R_{j_m})$ по следующей схеме:

если i-я компонента вектора сигнатуры $\sigma(R_{j_m})$ равна

- 1, то берется выход нейрона первого слоя $\theta(-l_i(\bar{x}))$ с весом -1;
- -1, то берется выход нейрона первого слоя $\theta(l_i(\bar{x}))$ с весом -1;
- 0, то берется выходы нейронов первого слоя $\theta(l_i(\bar{x}))$ и $\theta(-l_i(\bar{x}))$ с весами $\frac{1}{2}$.

Порог нейронов второго слоя принимаем равным числу нулевых элементов в векторе сигнатуры. Таким образом на выходе m-го нейрона второго слоя будет сигнал 1 тогда и только тогда, когда $\bar{x} \in R_{j_m}$.

Выходной нейрон (третий слой) будет реализовывать дизъюнкцию выходов предыдущего слоя по формуле $\theta(y_1 + \ldots + y_{s'} - 1)$, где $y_1, \ldots, y_{s'}$ — выходы нейронов второго слоя.

Полученная нейронная сеть имеет три слоя, и реализует кусочно-постоянную функцию, которая принимает значение 1 только на классах $R_{j_1}, \ldots, R_{j'_s}$, в остальных случаях принимает значение 0. То есть реализует в точности данную индикаторную функцию $f(\bar{x})$.

Заметим, что сложность полученной сети (общее количество нейонов на всех слоях) равна $2k + s' + 1$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Любая нейронная сеть модели Мак-Каллока-Питтса может быть перестроена в эквивалентную ей не более чем трехслойную сеть.*

Несложно заметить, что индикаторная функция представима однослойной нейронной сетью тогда и только тогда, когда она является пороговой, так как однослойная нейронная сеть суть один нейрон. Рассмотрим более подробно вопрос, когда индикаторную функцию можно представить двуслойной нейронной сетью.

3. Критерий двуслойности

Теорема 2. *Для представимости индикаторной функции $f(\bar{x})$ не более чем двуслойной нейронной сетью Мак-Каллока-Питтса необходимо и достаточно, чтобы существовала кусочно-постоянная нейронной функция $g(\bar{x})$, задаваемая нейронной схемой нелинейной глубины 1 такая, что $g(\bar{x}) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = 1$.*

Доказательство. Необходимость. Для однослойной нейронной сети утверждение очевидно, достаточно взять $g(\bar{x}) = f(\bar{x}) - \frac{1}{2}$.

Функцию, реализуемую двуслойной нейронной сетью, в общем виде можно задать следующей формулой:

$$f(\bar{x}) = \theta\left(\sum_{j=1}^{k} b_j \theta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i - c_j\right) - d\right). \tag{1}$$

Пусть на первом слое k нейронов (занумеруем индексом j): j-й нейрон зависит от i-го входа с коэффициентом a_i^j. Если связь отсутствует, положим $a_i^j = 0$. Порог j-го нейрона равен c_j. На втором слое один (выходной) нейрон с порогом d, зависящий от j-го нейрона первого слоя с коэффициентом b_j, $j = 1, \ldots, k$. В качестве $g(\bar{x})$ возьмем функцию, подаваемую на вход самой внешней θ-функции. То есть

$$g(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{k} b_j \theta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i - c_j\right) - d,\ f(\bar{x}) = \theta(g(\bar{x})). \tag{2}$$

Так как $g(\bar{x})$ задается подсхемой нейронной схемы, то она является нейронной функцией и удовлетворяет условию теоремы.

Достаточность. Пусть кусочно-постоянная нейронная функция $g(\bar{x})$ представима нейронной схемой нелинейной глубины 1. Тогда она может быть в общем виде записана формулой (**??**). А так как выполнено $g(\bar{x}) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = 1$, то верно $f(\bar{x}) = \theta(g(\bar{x}))$ и выполнено (**??**). Следовательно, $f(\bar{x})$ задается нейронной сетью модели Мак-Каллока-Питтса нелинейной глубины 2. Теорема доказана.

Используя критерий однослойности нейронных схем, доказанный в [**?**] можно переформулировать теорему в следующем виде:

Следствие 2. *Для представимости индикаторной функции $f(\bar{x})$ не более чем двуслойной нейронной сетью Мак-Каллока-Питтса необходимо и достаточно, чтобы нашлась кусочно-постоянная нейронной функция $g(\bar{x})$, у которой существуют переходы через любую гиперплоскость и выполнено $g(\bar{x}) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = 1$.*

Список литературы

[1] Половников В. С. О некоторых характеристиках нейронных схем // Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика. — М., 2004. — № 5. — С. 65–67.

[2] Половников В. С. О некоторых характеристиках нейронных схем // Интеллектуальные системы. — М., 2004. — Т. 8, вып. 1–4. — С. 121–145.

[3] Половников В. С. Критерий нелинейной однослойности нейронных схем // Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика. — М., 2006. — № 6. — С. 3–5.

[4] Половников В. С. О нелинейной сложности нейронных схем Мак-Каллока-Питтса // Интеллектуальные системы. — М., 2007. — Т. 11, вып. 1–4. — С. 261–275.

[5] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во МГУ, 1982.

[6] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: МГУ, 1984.

[7] McCulloch W. S., Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // Bulletin of Mathematical Biophysics. — 1943. — Vol. 5. — P. 115–133.