Сравнение операторов замыкания в классе линейно-автоматных функций

А. А. Часовских (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

Изучены особенности операторов K, S и A-замыкания в классе линейно-автоматных функций над полем из двух элементов.

Ключевые слова: конечный автомат, линейно-автоматная функция, операции композиции, операции суперпозиции, замкнутые классы, максимальные подклассы.

Известно [3], что в классе P всех конечных автоматов любое подмножество, не являющееся полным по операциям композиции, расширяется до K-предполного класса. В работе [1] в P найден класс, который не расширяется до предполного по операциям суперпозиции. Тем самым, найдено новое существенное отличие двух операторов замыкания в классе конечных автоматов. В настоящей работе поводится сравнение этих операторов замыкания, а также оператора аппроксимационного замыкания в классе линейных автоматов [5–9].

Множество всех многочленов переменной ξ с коэффициентами из двухэлементного поля E_2, $E_2 = \{0, 1\}$, мы обозначаем через $E_2[\xi]$. Наибольший общий делитель двух многочленов u_1 и u_2 из $E_2[\xi]$ обозначаем, как принято, (u_1, u_2). Число неприводимых многочленов в $E_2[\xi]$ счетно [4]. Пусть $p_i(\xi)$, $i = 1, 2, \ldots,$ — все различные неприводимые многочлены, причем $p_1(\xi) = \xi$.

Согласно [8], кольцо степенных рядов переменной ξ с коэффициентами из поля E_2 обозначаем через R_2. Подкольцо PR_2 кольца R_2, состоящее из рядов, коэффициенты которых образуют периодические (с предпериодом) последовательности, изоморфно кольцу отношений многочленов из $E_2[\xi]$, знаменатели которых в несократимом виде не делятся на ξ. Мы будем использовать понятие линейно-автоматной функции над полем из двух элементов E_2, введенное в [5]. Линейно-автоматная функция (л.-а. функция) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — это отображение из R_2^n в R_2, для которого найдутся такие μ_i, $\mu_i \in PR_2$, $i = 0, 1, \ldots, n$, что для любых α_i, $\alpha_i \in R_2$, $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено равенство:

$$f\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i + \mu_0. \quad (1)$$

Множество $\{\mu_i \quad | \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$ при этом обозначаем через $U(f)$.

Будем говорить, что дроби μ_i л.-а. функции f, заданной соотношением (**??**), соответствует переменная x_i. Переменная x л.-а. функции называется существенной, если для соответствующей ей дроби μ, выполнено: $\mu \neq 0$ и называется непосредственной, если $\mu(0) = 1$.

На множестве L_2 всех л.-а. функций будем рассматривать три оператора замыкания, которые определены в работе [3]:

1) Оператор S-замыкания по операциям суперпозиции. В этом случае для множества M, $M \subseteq L_2$, через $S(M)$ будем обозначать множество всех линейно-автоматных функций, которые можно получить из функций множества M применением (многократным) операций суперпозиции.
2) Оператор K-замыкания по операциям композиции. Операции композиции получаем путем добавления к суперпозициям операции обратной связи. При этом для множества M, $M \subseteq L_2$, через $K(M)$ будем обозначать множество всех линейно-автоматных функций, получаемых из функций множества M применением (многократным) операций композиции.
3) Оператор A-замыкания. Понятие A-замыкания было введено в работе [2]. Для множества M, $M \subseteq L_2$, через $A(M)$ будем обозначать множество всех л.-а. функций f, таких, что для любого натурального τ, $\tau \in \mathbb{N}$, в $S(M)$ найдется функция, совпадающая с f на словах длины τ.

Пусть метасимвол ρ принимает значения S, K или A. В соответствии с [3], множество M, $M \subseteq L_2$, называется ρ-замкнутым классом, если $\rho(M) = M$. ρ-замкнутый класс M называется ρ-предполным, если $M \neq L_2$, но для любого f, $f \in L_2 \setminus M$, выполнено:

$$\rho\left(M \cup \{f\}\right) = L_2.$$

В работе [8] найдены все S-предполные классы в классе линейно-автоматных функций:

T_a, $a \in E_2$, — множество всех л.-а. функций f таких, что из (**??**) для любых $\alpha_i(\xi)$, $\alpha_i(\xi) \in R_2$, $\alpha_i(0) = a$, $i = 1, 2, \ldots, n$, выполнено: $f\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)(0) = a$;

V_1 — множество всех л.-а. функций, имеющих не более одной непосредственной переменной;

$V_{\text{Н}}$ — множество всех л.-а. функций, имеющих нечетное число непосредственных переменных;

$M(\xi)$ — множество всех таких f, $f \in L_2$, что $\forall \mu$, $\mu \in U(f)$, выполнено: $\mu(\xi) - \mu(0) \in \xi^2 \cdot PR_2$;

$M(0)$ — множество всех таких f, $f \in L_2$, что $\forall \mu$, $\mu \in U(f)$, $\mu = \frac{u}{v}$, $u, v \in E_2[\xi]$, выполнено: $\deg u \leqslant \deg v$;

$M(p_i)$ — множество всех таких f, $f \in L_2$, что $\forall \mu$, $\mu \in U(f)$, если $\mu = \frac{u}{v}$ и $(u, v) = 1$, то $(v, p_i) = 1$, $i = 2, 3, \ldots$.

В работе [5] для L_2 найдены все A-предполные классы: T_0, T_1, V_1, $V_{\text{Н}}$, $M(\xi)$.

А множество всех K-предполных в L_2 классов помимо всех A-предполных также содержит следующие классы:

M_0 — множество всех л.-а. функций f таких, что для любого μ, $\mu \in U(f)$, степень числителя дроби $\mu(\xi) - \mu(0)$ меньше степени ее знаменателя;

M_i — множество всех л.-а. функций f таких, что для любого μ, $\mu \in U(f)$, числитель несократимой дроби, равной $\mu(\xi) - \mu(0)$, делится на $p_i(\xi)$, $i = 2, 3, \ldots$;

$R_0^{\text{С}}$ — множество всех функций f из L_2, имеющих не более одной существенной переменной и $U(f) \subset M(0)$, а также л.-а. функций f, имеющих не менее двух существенных переменных, таких, что $\forall \mu$, $\mu \in U(f)$, степень числителя дроби μ строго меньше степени знаменателя;

$R_i^{\text{С}}$ — множество всех функций f из L_2, имеющих не более одной существенной переменной и $U(f) \subset M(p_i)$, а также л.-а. функций f, имеющих не менее двух существенных переменных, таких, что $\forall \mu$, $\mu \in U(f)$, числитель несократимой дроби, равной μ, делится на p_i, $i = 2, 3, \ldots$;

$R_0^{\text{Н}}$ — множество всех л.-а. функций таких, что $\forall \mu$, $\mu \in U(f)$, если μ соответствует единственной непосредственной переменной л.-а. функции f, то степень числителя дроби μ не больше степени знаменателя, в противном случае степень числителя дроби μ строго меньше степени знаменателя;

$R_i^{\text{Н}}$ — множество всех л.-а. функций таких, что $\forall \mu$, $\mu \in U(f)$, представленной несократимой дробью $\frac{u}{v}$, если μ соответствует единственной непосредственной переменной л.-а. функции f, то $(v, p_i) = 1$, в противном случае p_i делит u, $i = 2, 3, \ldots$.

Таким образом, для множеств J_S, J_K и J_A, состоящих, соответственно, из всех S-предполных, K-предполных и A-предполных классов, имеют место равенства:

$$J_S = \{T_a, V_1, V_{\text{н}}, M(\xi), M(0), M(p_i) | a \in E_2, i = 2, 3, \dots\},$$
$$J_K = \left\{T_a, V_1, V_{\text{н}}, M(\xi), M_0, M_i, R_0^{\text{с}}, R_i^{\text{с}}, R_0^{\text{н}}, R_i^{\text{н}} | a \in E_2, i = 2, 3, \dots\right\},$$
$$J_A = \{T_a, V_1, V_{\text{н}}, M(\xi), | a \in E_2, i = 2, 3, \dots\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Каждый A-предполный класс в L_2 является S-предполным и K-предполным. В L_2 каждый K-предполный класс содержится в некотором S-предполном классе и любой S-предполный класс из $J_S \setminus J_A$ содержит ровно 3 K-предполных класса из $J_K \setminus J_A$.*

Из определений классов л.-а. функций, составляющих множества J_A, J_S и J_K, следуют включения

$$M_0 \cup R_0^{\text{с}} \cup R_0^{\text{н}} \subset M(0),$$
$$M_i \cup R_i^{\text{с}} \cup R_i^{\text{н}} \subset M(p_i), \quad i = 2, 3, \dots,$$

используя которые, получаем доказательство теоремы 1.

Используя результаты работ [6], [7] и [8], нетрудно показать справедливость следующих утверждений.

Теорема 2. *Пусть $\rho \in \{A, K\}$. Множество, состоящее из всех ρ-замкнутых классов, содержащих сумматор и константные л.-а. функции, счетно. Множество, состоящее из всех S-замкнутых классов, содержащих сумматор и константные л.-а. функции, континуально.*

Теорема 3. *В классе L_2 любое подмножество, не являющееся S-полным, расширяется до S-педполного класса.*

Список литературы

[1] Бабин Д. Н. Автоматы с суперпозициями, пример не расширяемости до предполного класса // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 87–93.

[2] Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания A-полноты для о.-д. функций // Мат. заметки. — 1972. — Вып. 6. — С. 687–697.

[3] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[4] Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. В 2 т. Т. 1. — М.: Мир, 1988. Пер. изд.: Lidl R., Niederreiter H. Finite fields. — Cambridge University Press, 1984.

[5] Часовских А. А. О полноте в классе линейных автоматов // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1991. — Вып. 3. — С. 140–166.

[6] Часовских А. А. Замкнутые классы линейно-автоматных функций // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 2004. — Вып. 13. — С. 113–136.

[7] Часовских А. А. Об A-выразимости в классе линейно автоматных функций // Математические вопросы кибернетики. — М.: Физматлит, 2008. — Вып. 17. — С. 105–136.

[8] Часовских А. А. Линейно-автоматные функции с операциями суперпозиции // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. — 2013. — № 8. — С. 3–13.

[9] Часовских А. А. Критериальные системы в классах линейно-автоматных функций над конечными полями // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 195–207.