Об аналитическом представлении числа булевских решений линейного уравнения многих переменных с целыми коэффициентами

М. В. Носов (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

В статье представлены исследования задачи представления числа булевских решений линейного уравнения многих переменных с целыми коэффициентами, как функции от двоичного разложения этих коэффициентов.

Ключевые слова: уравнение в целых числах, двоичное разложение.

Линейное уравнение с булевскими переменными заменой части переменных, с отрицательными коэффициентами на противоположные, сводится к линейному уравнению с положительными коэффициентами. Поэтому изначально полагается, что уравнение имеет вид

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = a_0,$$
$$a_1 \ldots a_m, a_0 \subset Z,$$
$$a_j \geqslant 0, j = 0, 1, \ldots, m,$$
$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, m.$$

Имеет место двоичное разложение каждого коэффициента

$$a_j = q_{j1}2^{n-1} + \ldots + q_{jn-1}2 + q_{jn},$$
$$q_{jk} \in \{0, 1\}, j = 0, 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, n.$$

Задача состоит в представлении числа решений уравнения $K(a_1, \ldots, a_m, a_0)$, как функции от переменных q_{jk}, $j = 0, 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$. Представим число решений формулой и произведем ее преобразование

$$K(a_1,\dots,a_m,a_0)=\int_0^1\left(\sum_{\beta,\beta\subseteq\{1,\dots,m\}}\exp\left(2\pi\left(\sum_{j,j\in\beta}a_j-a_0\right)it\right)\right)dt=$$

$$=\int_0^1\sum_{\left(\substack{\beta,\\ \beta\subseteq\{1,\dots,m\}}\right)}\exp\left(2\pi\left(\sum_{j,j\in\beta}\left(\sum_{l=1}^n q_{jl}2^{n-l}\right)-\sum_{l=1}^n q_{0l}2^{n-l}\right)it\right)dt=$$

$$=\int_0^1\sum_{\left(\substack{\beta,\\ \beta\subseteq\{1,\dots,m\}}\right)}\prod_{j,j\in\beta}\left(\prod_{l=1}^n e^{2\pi q_{jl}2^{n-l}it}\right)\left(\prod_{l=1}^n e^{-2\pi q_{0l}2^{n-l}it}\right)dt=$$

$$=\int_0^1\sum_{\left(\substack{\beta,\\ \beta\subseteq\{1,\dots,m\}}\right)}\prod_{j,j\in\beta}\left(\prod_{l=1}^n\left(1+q_{jl}\left(e^{2\pi 2^{n-l}it}-1\right)\right)\right)\times$$

$$\times\prod_{l=1}^n\left(1+q_{0l}\left(e^{-2\pi 2^{n-l}it}-1\right)\right)dt=$$

$$=\int_0^1\sum_{\left(\substack{\beta,\\ \beta\subseteq\{1,\dots,m\}}\right)}\sum_{\left(\substack{\varepsilon,\\ \varepsilon\subseteq\{1,\dots,n\}}\right)}\sum_{\delta\subset\beta\times\{1,\dots,n\}}\prod_{(j,l)\in\delta}\left(e^{2\pi 2^{n-l}it}-1\right)\times$$

$$\times\prod_{l\in\varepsilon}\left(e^{-2\pi 2^{n-l}it}-1\right)\cdot\left(\prod_{(j,l)\in\delta}q_{jl}\cdot\prod_{l\in\varepsilon}q_{0l}\right)dt=$$

$$=\int_0^1\sum_{\left(\substack{\alpha,\alpha\subseteq\{1,\dots,n\}\\ \gamma,\gamma\subset\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}}\right)}2^{m-|\gamma\|}\left(\prod_{(j,l)\in\gamma}\left(e^{2\pi 2^{n-l}it}-1\right)\cdot\prod_{l\in\alpha}\left(e^{-2\pi 2^{n-l}it}-1\right)\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{(j,l)\in\gamma}q_{jl}\cdot\prod_{l\in\alpha}q_{0l}\right)dt=$$

$$=\int_0^1\sum_{\left(\substack{\alpha,\alpha\subseteq\{1,\dots,n\}\\ \gamma,\gamma\subset\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}}\right)}2^{m-|\gamma\|}\sum_{\left(\substack{\delta,\delta\subseteq\gamma\\ \varepsilon,\varepsilon\subseteq\alpha}\right)}\exp\left(2\pi\left(\sum_{(j,l)\in\delta}2^{n-l}-\sum_{l\in\varepsilon}2^{n-l}\right)it\right)\times$$

$$\times(-1)^{|\gamma|+|\delta|+|\alpha|+|\varepsilon|}\left(\prod_{(j,l)\in\gamma}q_{jl}\cdot\prod_{l\in\alpha}q_{0l}\right)dt$$

Введем функцию

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x=0,\\ 0, & \text{если } x\neq 0.\end{cases}$$

Тогда

$$K(a_1,\ldots,a_m,a_0) = \sum_{\binom{\alpha,\alpha\subseteq\{1,\ldots,n\}}{\gamma,\gamma\subset\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}} 2^{m-|\gamma\|}\cdot(-1)^{|\gamma|+|\alpha|}\times$$

$$\times\sum_{\binom{\delta,\delta\subseteq\gamma}{\varepsilon,\varepsilon\subseteq\alpha}}(-1)^{|\delta|+|\varepsilon|}\chi\left(\sum_{(j,l)\in\delta}2^{n-l}-\sum_{l\in\varepsilon}2^{n-l}\right)\left(\prod_{(j,l)\in\gamma}q_{jl}\cdot\prod_{l\in\alpha}q_{0l}\right)$$

Пусть

$$b_{\gamma\alpha} = 2^{m-|\gamma\|}\cdot(-1)^{|\gamma|+|\alpha|}\sum_{\binom{\delta,\delta\subseteq\gamma}{\varepsilon,\varepsilon\subseteq\alpha}}(-1)^{|\delta|+|\varepsilon|}\chi\left(\sum_{(j,l)\in\delta}2^{n-l}-\sum_{l\in\varepsilon}2^{n-l}\right),$$

тогда

$$d_{\gamma\alpha} = (-1)^{|\gamma|+|\alpha|}\frac{b_{\gamma\alpha}}{2^{m-|\gamma\|}} = \sum_{\binom{\delta,\delta\subseteq\gamma}{\varepsilon,\varepsilon\subseteq\alpha}}(-1)^{|\delta|+|\varepsilon|}\chi\left(\sum_{(j,l)\in\delta}2^{n-l}-\sum_{l\in\varepsilon}2^{n-l}\right)$$

Если $|\gamma\cup\alpha| = h$, то получаем рекуррентное соотношение

$$d_{\gamma\alpha} = (-1)^{|\gamma|+|\alpha|}\chi\left(\sum_{(j,l)\in\gamma}2^{n-l}-\sum_{l\in\alpha}2^{n-l}\right)+$$

$$+\sum_{\binom{\gamma_1\subseteq\gamma,\alpha_1\subseteq\alpha}{|\gamma_1\cup\alpha_1|=h-1}} d_{\gamma_1\alpha_1} - \sum_{\binom{\gamma_2\subseteq\gamma,\alpha_2\subseteq\alpha}{|\gamma_2\cup\alpha_2|=h-2}} d_{\gamma_2\alpha_2}+\ldots$$

Замечание. Пусть $L(a_1,\ldots,a_m,a_0)$ — характеристическая функция решения уравнения, то есть равна 1, если решение есть и 0, в противном случае. Тогда

$$L(a_1,\ldots,a_m,a_0) = 1-\int_0^1 e^{2\pi K(a_1,\ldots,a_m,a_0)it}dt. \tag{1}$$

Пусть, несколько видоизменяя обозначения,

$$K(a_1,\ldots,a_m,a_0) = \sum_{\beta,\beta\subseteq E} b_\beta \prod_{j,j\in\beta} q_j, \tag{2}$$

где E — множество значений индексов переменных, $P(E)$ — множество подмножеств E. Тогда

$$L(a_1, \dots, a_m, a_0) = 1 - \int_0^1 \prod_{\beta, \beta \subseteq E} \left(1 + \left(e^{2\pi b_\beta it} - 1\right) \left(\prod_{j, j \in \beta} q_j\right)\right) dt =$$

$$= \sum_{\gamma, \gamma \subseteq E} \left(\sum_{\left(\substack{\delta, \delta \in P(E) \\ \cup_{i, i \in \delta} \beta_i = \gamma}\right)} \sum_{\alpha, \alpha \in \delta} (-1)^{|\delta| + |\alpha| + 1} \chi \left(\sum_{p, p \in \alpha} b_p \right) \right) \prod_{j, j \in \gamma} q_j. \quad (3)$$

В общем случае, $L(\cdot)$ — характеристическая функция существования некоторого объекта, зависящего от булевских переменных, а $K(\cdot)$ — функция равная 0, если объекта не существует, и равная ненулевому целому, если существует. Если функция $K(\cdot)$ может быть представлена формулой (2), то функция $L(\cdot)$ представляется формулой (1) и, следовательно, формулой (3).