О некоторых свойствах пересечений предполных классов многозначной логики

А. С. Нагорный (МГУ им. М. В. Ломоносова, МФТИ, Москва)

Пусть $k > 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Обозначим через P_k множество всех конечноместных функций на E_k. Вследствие теоремы А. В. Кузнецова при любом k в P_k имеется конечное число предполных классов. Все они были описаны в 1965 г. И. Розенбергом в терминах сохранения некоторых предикатов. В данной работе доказан ряд утверждений о вложении некоторых пересечений предполных классов в некоторый (другой) предполный класс. Такие утверждения помогают построить для предполных классов так называемую решетку пересечений, являющуюся, в определенном смысле, «остовом» континуальной (при $k > 2$) решетки замкнутых классов в P_k, в целях получения конечной классификации замкнутых классов. При $k = 3$ решетка пересечений предполных в P_k классов построена автором ранее, тогда как при всех $k > 3$ проблема пока остается открытой.

Ключевые слова: многозначная логика, предполные классы, замкнутые классы, решетка, решетка пересечений.

Пусть $k \geqslant 3$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Обозначим через P_k множество всех конечноместных функций на E_k. Элементы множества P_k будем называть k-значными функциями или функциями k-значной логики. Определения операции суперпозиции, замкнутого класса, предполного (максимального) класса, предиката и других основных понятий можно найти, например, в [1].

Вследствие теоремы А. В. Кузнецова при любом k в P_k имеется конечное число предполных классов. Все они были описаны И. Розенбергом [2] в терминах сохранения некоторых предикатов.

Нас будут интересовать включения

$$\mathbf{K}_{i_1} \cap \mathbf{K}_{i_2} \cap \ldots \cap \mathbf{K}_{i_s} \subseteq \mathbf{K}_j, \qquad (*)$$

где все $\mathbf{K}_{i_m}$ и $\mathbf{K}_j$ суть предполные в P_k классы.

Вложение вида $(*)$ назовем *тупиковым*, если после удаления любого $\mathbf{K}_{i_m}$ из левой части оно становится ложным. Аналогично можно определить тупиковые равенства пересечений предполных классов какому-то другому (не предполному!) замкнутому классу.

Предполный класс k-значных функций, сохраняющих одноместный центральный предикат с центром $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r\}$, будем обозначать T_Δ или $T_{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_r}$.

Теорема 1. *При всех* Δ *и* E*, удовлетворяющих условиям* $\Delta, E \subset E_k$ *и* $\Delta \cap E \neq \varnothing$*, справедливо вложение*

$$T_\Delta \cap T_E \subseteq T_{\Delta \cap E}.$$

Для целых s и t положим $\overline{s,t} = \begin{cases} s, s+1, \ldots, t, & \text{если } s \leqslant t; \\ s, s-1, \ldots, t, & \text{иначе.} \end{cases}$

Обозначим через $M_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}$ класс k-значных функций, монотонных относительно линейного порядка $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \ldots \prec \alpha_k$, а через $U_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_l}$ — класс k-значных функций, сохраняющих нетривиальное $(1 < l < k)$ разбиение $E_k = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_l$.

Предполный класс k-значных функций, сохраняющих минимальный (по числу наборов) двухместный центральный предикат с центром $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r\} \subset E_k$, будем обозначать $C_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_r}$.

Теорема 2. *Справедливо вложение*

$$M_{\overline{0,k-1}} \cap U_{\{0\},\{\overline{1,k-1}\}} \cap C_0 \subseteq M_{\overline{1,k-1},0}.$$

Замечание 1. Легко проверить, что данное вложение является тупиковым.

Пусть $\widetilde{s,t}$ есть произвольная перестановка элементов множества $\{\overline{s,t}\}$.

Теорема 3. *В* P_k *справедливы следующие вложения*

$$\begin{array}{ll} 1) & M_{\overline{0,k-1}} \cap M_{0,k-1,\widetilde{1,k-2}} \subseteq U_{\{0\},\{\overline{1,k-1}\}}, \quad k \geqslant 3; \\ 2) & M_{\overline{0,k-1}} \cap M_{0\{\overline{2,k-1}\}1} \subseteq U_{\{0\},\{\overline{1,k-1}\}}, \quad k \geqslant 4; \\ 3) & \bigcap\limits_{\sigma=1}^{k-1} M_{0\{E_k \setminus \{0,\sigma\}\}\sigma} \subseteq U_{\{0\},\{\overline{1,k-1}\}}, \quad k \geqslant 4. \end{array}$$

Будем использовать характеристическую функцию числа $a \in E_k$:

$$j_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = a; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Замечание 2. Вложение 3) является тупиковым. Чтобы убедиться в этом, для произвольного $a \in E_k \setminus \{0\}$ определим функцию $f_a(x) \in P_k^1$ следующим образом:

$$f_a(x) = x - aj_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = a; \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $\sigma \in \{\overline{1, k-1}\}$. Нетрудно видеть, что функция $f_a(x)$ принадлежит всем классам вида $M_{0\{E_k \setminus \{0,\sigma\}\}\sigma}$, кроме $M_{0\{E_k \setminus \{0,a\}\}a}$. В то же время, очевидно, $f_a(x) \notin U_{\{0\},\{\overline{1,k-1}\}}$.

Теорема 4. *При любом $k \geqslant 3$ справедливо вложение*

$$\bigcap_{\sigma=1}^{k-1} C_\sigma \subseteq U_{\{0\},\{\overline{1,k-1}\}}.$$

Замечание 3. Легко видеть, что вложение, фигурирующее в формулировке Теоремы 4, является тупиковым. Для этого достаточно рассмотреть ту же функцию $f_a(x)$ и убедиться, что $f_a(x) \in C_\sigma$ при всех $\sigma \in E_k \setminus \{0, a\}$, тогда как $f_a(x) \notin U_{\{0\},\{\overline{1,k-1}\}}$.

Пусть $A^k = \{0, 1, \ldots, k-1, x\}$ (с точностью до конгруэнтных функций).

Теорема 5.

$$\bigcap_{\sigma=0}^{k-1} U_{\{\sigma\},E_k \setminus \{\sigma\}} = A^k.$$

Замечание 4. Очевидно, A^k вложено в любой предполный класс, содержащий все константы.

Следствие 1.

$$\bigcap_{\sigma=0}^{k-1} C_\sigma = A^k.$$

Замечание 5. Равенства, записанные в формулировках теоремы 5 и следствия из нее, являются тупиковыми. Для того чтобы в этом убедиться, при каждом $a \in E_k$ рассмотрим функцию $h_a(x) \in P_k^1$, которую мы определим следующим образом:

$$h_a(x) = x + j_a(x) = \begin{cases} a+1, & \text{если } x = a; \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

С одной стороны, $h_a(x) \in U_{\{\sigma+1\},E_k \setminus \{\sigma+1\}} \cap C_\sigma$ при всех $\sigma \in E_k \setminus \{a\}$, с другой стороны $h_a(x) \notin A^k$.

Теорема 6. *Для любых непустых множеств Δ и E, удовлетворяющих условиям $\Delta \cap E = \varnothing$ и $\Delta \cup E \subset E_k$, справедливо вложение*

$$C_\Delta \cap T_E \subseteq T_{\Delta \cup E}.$$

Теорема 7. *Пусть $\varnothing \neq E \subset E_k$. Тогда*

$$M_{\overline{0,k-1}} \cap T_E \subseteq T_{\overline{0,b}} \cap T_{\overline{a,k-1}} \cap T_{\overline{a,b}}, \qquad a = \min_{\sigma \in E}\{\sigma\},\ b = \max_{\sigma \in E}\{\sigma\}.$$

Теорема 8. *Пусть $k \geqslant 3$. Для любого нетривиального разбиения $D = \{\Gamma, \Delta, E\}$ множества E_k выполнено*

$$M_{\Gamma,\Delta,E} \cap C_\Delta \cap T_{\Gamma \cup E} \subseteq U_{\Gamma,\Delta \cup E} \cap U_{\Gamma \cup \Delta, E}$$

(здесь $M_{\Gamma,\Delta,E}$ обозначает произвольный класс функций, монотонных относительно любого линейного порядка на E_k, согласно которому $\gamma \prec \delta \prec \varepsilon$ при всех $\gamma \in \Gamma$, $\delta \in \Delta$, $\varepsilon \in E$).

Теорема 9. *Пусть $D = \{\Delta, E\}$ — нетривиальное разбиение множества E_k. Если $\varnothing \neq E' \subseteq E$, то*

$$U_{\Delta,E} \cap T_{E'} \subseteq T_E.$$

В заключение отметим, что ранее автором были получены аналогичные результаты (то есть, свойства, имеющие вид вложений $(*)$) для пересечений предполных классов монотонных (относительно ограниченных частичных порядков) функций [3], а также найдены пересечения предполных классов, вложенные в классы функций, сохраняющих некоторые двухместные центральные предикаты [4, 5].

Установление свойств пересечений предполных классов в виде вложений $(*)$ помогает, в частности, построить для предполных классов так называемую решетку пересечений, являющуюся, в определенном смысле, «остовом» континуальной (при $k \geqslant 3$) решетки замкнутых классов в P_k, в целях получения конечной классификации замкнутых классов.

При $k = 3$ решетка пересечений предполных в P_k классов построена автором в [6] (она содержит 1505 узлов, включая класс P_3), тогда как при всех $k > 3$ проблема пока остается открытой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00593–а).

Список литературы

[1] Марченков С. С. Функциональные системы с операцией суперпозиции. — М.: Физматлит, 2004.

[2] Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpravy Československe Akad. Věd. — N. 80. — Praha: Řada Math. Přir. Věd., 1970. — P. 3–93.

[3] Нагорный А. С. О пересечениях классов монотонных функций многозначной логики // XI международный семинар «Дискретная математика и ее приложения», (Москва, 18–23 июня 2012 г.) — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ. — С. 207–209.

[4] Нагорный А. С. О некоторых пересечениях предполных классов многозначной логики, вложенных в классы C_0 и $C_{0,1,\ldots,k-3}$ // Материалы Международного научного семинара «Дискретная математика и ее применение в экономико-математическом моделировании и информационных технологиях» (Запорожье, 11–13 октября 2012 г.) — С. 51–52.

[5] Нагорный А. С. О некоторых пересечениях предполных классов многозначной логики // Научная конференция «Тихоновские чтения», тезисы докладов (Москва, 29–31 октября 2012 г.) — М.: МАКС Пресс, 2012. — С. 46–47.

[6] Нагорный А. С. О пересечениях и объединениях предполных классов многозначной логики. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. М.: МАКС Пресс, 2013.