Оценка параметров бирегулярных двудольных графов

Е. А. Шульгина

В данной работе доказана нижняя оценка числа вершин (t,s)-бирегулярных графов обхвата 6 при $2 < t < s$. Придуман алгоритм построения (t,s)-бирегулярных графов. Доказано, что при определенных значениях t и заданных значениях s алгоритм «(t,s)-построения» строит граф обхвата 6.

Ключевые слова: бирегулярный граф, двудольный граф, обхват, LDPC-код.

Введение

В настоящее время набирают популярность различные типы канального кодирования в исследованиях области передачи информации. В процессе передачи информации по каналам связи часто возникают ошибки. Обнаружение и исправление ошибок - главные задачи в работе с данными. Для борьбы с ошибками существуют несколько способов:

- обнаружение ошибок в блоках, в таком случае возможен запрос повторной передачи поврежденных блоков

- исправление ошибок в блоках, в этом случае происходит обнаружение и исправление ошибок [6]

Коды обнаружения и исправления ошибок тесно связаны друг с другом. Коды исправления ошибок в работе с данными делятся на блоковые и сверточные коды [4]. Блоковые коды делят информацию на куски определенной длины и работают с каждым куском отдельно, в то время, как сверточные работают с данными непрерывно.

Важный тип блокового кода - линейный код. На практике в основном используются линейные коды. Так как нелинейные тяжелее исследовать [4].

Код с малой плотностью проверок на четность (LDPC-код, низко плотностный код) - частный случай линейного кода с проверкой четности с разреженной проверочной матрицей [1]. LDPC-коды используются в различных аспектах современных систем передачи данных. Идет постоянная работа над улучшением методов кодирования и декодирования информации [3]. LDPC-код графически описывается графом Таннера. Двудольный граф, в котором узлы одного типа, называемые символьными узлами, соответствуют символам кодового слова и узлы второго типа - проверочные узлы, соответствуют проверочным уравнениям блокового кода, называется графом Таннера [7]. Многие практические задачи, связанные с математикой и информатикой, могут быть представлены графами [2, 3]. Обхват графа - это длина его наименьшего цикла. Если в графе присутствуют циклы маленького размера, то при декодировании появляются зависимые оценки, которые плохо влияют на само преобразование кода. В связи с этим интересны графы с более высоким обхватом. Значительный вклад в развитие регулярных (а так же двудольных) графов внес Мур, который вывел нижние оценки для (r,n)-клеток при заданных параметрах (клетка - регулярный граф степени r и обхвата n с минимальным возможным числом вершин) [8].

Основные понятия и формулировка результатов

Мы будем изучать двудольные графы с равными степенями вершин в каждой доле.

Даны числа: s, t - целые, натуральные, $t < s$. Пусть n - число вершин в одной доле со степенью t, m - число вершин в другой доле со степенью s. Назовем такой граф (t,s)-бирегулярным.

$t = 1$, $s > 1$ - графы, у которых любая связная компонента - «звезда» с s лучами. Существуют при $n = sm$ для некоторого $m \geqslant 1$.

$t = 2$, $s > 2$ – это графы, которые получаются из регулярных не двудольных графов степени s подразбиением каждого ребра на 2. Так же у исходного графа могут быть кратные ребра, которые в новом графе превращаются в ребра из цикла длины 4. Если в обычном графе вершин k и степень s, то в получившемся двудольном графе $n = \dfrac{ks}{2}$, $m = k$. Обхват - $2s$.

Здесь и далее рассматриваются t, s - натуральные, $s > 3$, $t \geqslant 3$, $t < s$.

Был придуман способ представления (t, s)-бирегулярных графов. Заданы числа: t, s, n. m найдем из формулы: $nt + ms = 2nt$ [1]. Для каждой вершины доли-m (доля с числом вершин m) выпишем в строку все вершины, с которыми эта вершина соединена. В результате получим m строк по s столбцов.

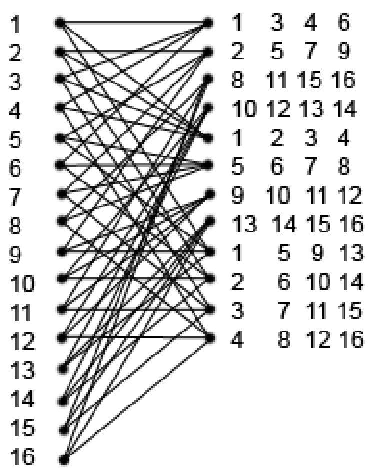

Рис. 1: Пример. n=16, m=12, t=3, s=4

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *Для любого (t,s)-бирегулярного графа обхвата не меньше 6 количество вершин n не меньше* s^2.

Алгоритм «(t,s) построения».

Данный алгоритм строит (t,s)-бирегулярный граф. Пусть n = s^2. Известно, что $m = \dfrac{ts^2}{s} = ts$.

Разобьем долю-m на t блоков. Первый блок заполним как угодно вершинами от одного до n по s вершин в каждую строку.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{bmatrix}$$

Второй блок будет транспонированный первый блок. То есть строки первого блока будут столбцами второго блока.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s} & a_{2s} & \dots & a_{ss} \end{bmatrix}$$

Строки третьего блока будут диагоналями второго блока, начиная с главной, затем, диагональ под главной + правый верхний элемент, дальше следующая диагональ + два правых допустимых элемента с 1ой и 2ой строк и т.д.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{ss} \\ a_{12} & a_{23} & \dots & a_{s1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s} & a_{21} & \dots & a_{ss-1} \end{bmatrix}$$

Четвертый блок строится таким же методом, что и третий блок, только диагонали берутся с третьего блока. И т.д.

Утверждение 2. *Для любого s>3 алгоритм «(3,s) построения» строит (3,s)-бирегулярный граф обхвата 6 с n =* s^2.

Утверждение 3. *Для любого составного s>3 существует (t,s)-бирегулярный граф обхвата 6 с n =* s^2, *где* $t = \dfrac{s}{D} + 1$ *и D (1 < D < s) - наибольший делитель для s.*

Утверждение 4. *Теперь рассмотрим случаи, когда s - простое число. D (D = s) - наибольший делитель для s. Для простого числа s>3, $t \geqslant 3$, t < s, алгоритм «(t,s) построения» строит (t,s)-бирегулярный граф обхвата 6 с $n = s^2$.*

Доказательство утверждения 1

Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу его ребер [4]:

$$nt + ms = 2nt = 2ms$$

$=> m = \dfrac{nt}{s}$

Так как m делится на t, поделим m строк на t блоков так, чтобы каждая вершина в строке встречалась в блоке один раз (каждая вершина в доле-m повторяется t раз, такое расположение возможно). Во избежание циклов 4 необходимо, чтобы любые две вершины в строке не повторялись ни в какой другой. Значит все вершины в какой-либо строке одного блока будут в разных строках другого блока. Это возможно, если число строк в блоке будет как минимум равно числу столбцов. А так как все вершины в блоке различны, то n не меньше s^2.

Доказательство утверждения 2

Так как 1-ый и 2-ой блоки графа при данном алгоритме построения не могут иметь циклов 4, то проверим только 3-ий блок. При заполнении третьего блока не берутся две вершины с одной строки или с одного столбца предыдущих блоков. А значит граф имеет обхват не меньше 6. Покажем, что у графа обхват 6. Достаточно найти три строки, в которых 3 элемента встречаются по 2 раза: 1-ая строка 1-го блока, 2-ая строка 2-го блока, 1-ая строка 3-го блока.

Доказательство утверждения 3

Рассмотрим различные s.

Пусть s кратно 2. Наибольший делитель у числа, кратного 2 - это его половина. Значит $t = \dfrac{s}{D} + 1 = 2 + 1 = 3$, что сводится к Утв. 2. Значит все четные числа входят в этот случай.

Пусть s кратно 3, но не кратно 2. Наибольший делитель у числа, кратного 3 - это его треть. Значит $t = \dfrac{s}{D} + 1 = 3 + 1 = 4$. Построим граф с s, кратным 3, некратным 2. Построим граф алгоритмом «(4,s) построения».

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{s1} & a_{s2} & a_{s3} & a_{s4} & \dots & a_{ss} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \dots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & \dots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{1s} & a_{2s} & a_{3s} & a_{4s} & \dots & a_{ss} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} & \dots & a_{ss} \\ a_{12} & a_{23} & a_{34} & a_{45} & \dots & a_{s1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{1s} & a_{21} & a_{32} & a_{43} & \dots & a_{ss-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{23} & a_{35} & a_{47} & \dots & a_{ss-1} \\ a_{12} & a_{24} & a_{36} & a_{48} & \dots & a_{ss} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{1s} & a_{22} & a_{34} & a_{46} & \dots & a_{ss-2} \end{bmatrix}$$

Можно заметить, что 3ий блок построен из 2го циклическим сдвигом 2-s столбцов на 1-(s-1) позиций вверх соответственно. 4ый блок построен таким же смещением 3го блока. Так как s - нечетное число, кратное 3, а 4ый столбец смещается на 3 позиции вверх в каждом блоке, мы не получим строки, содержащей два элемента с какой либо другой строки. Такая строка получится в 5ом блоке: элемент a_{41} вернулся бы на первую строку в 5ом блоке, что дает цикл 4 с вершиной a_{11}.

Пусть s кратно 5, но не кратно 2 и 3. Для числа, кратного 5, наибольший делитель - его пятая часть. $t = \dfrac{s}{D} + 1 = 5 + 1 = 6$. Строя граф, у которого s кратно 5, заметим, первая строка 2го блока с такими же двумя элементами появится в 7 блоке. 6ой столбец сдвигается на 5 позиций вверх, начиная с 3го блока, а значит элемент a_{61} вернется на то же место через 5 блоков. Поэтому t должно быть не больше 6.

Пусть s кратно p, но не кратно p-1, p-2, ... ,3,2. Для числа, кратного s, наибольший делитель - 1/p от s. $t = \dfrac{s}{D} + 1 =$ p + 1. Строя граф, у которого s кратно p, можно заметить, что (p+1)ый столбец смещается на p позиций в каждом блоке. Значит в наших (p+1) блоках не будет строки, содержащей два элемента с какой либо другой строки. Такая строка появится в (p+2) блоке, который нас не интересует.

Доказательство утверждения 4

Так как s - простое число, то при построении графа методом диагоналей, мы не найдем столбца, число смещений которого кратно s. А значит, строка с двумя элементами другой строки появится, когда столбцы сместятся s раз и новый, s+2ой блок будет таким же, как 2ой. А число блоков противоречит условию t < s.

Заключение

В статье доказана нижняя оценка числа вершин (t,s)-бирегулярных графов обхвата 6 при 2 < t < s. Придуман алгоритм построения (t,s)-бирегулярных графов. Доказано, что при определенных значениях t и заданных значениях s алгоритм «(t,s)-построения» строит граф обхвата 6. Остается нерешенным вопрос изучения и построения графов с обхватами 8 и выше.

Список литературы

[1] Gallager R.G. Low-Density Parity-Check Codes. - Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1963

[2] В.С. Половников. Особенности нейронных схем Мак-Каллока – Питтса над полем рациональных чисел // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 2. — С. 331–336.

[3] М.Э. Тожибаева. Верхняя оценка минимального расстояния квази-циклических низкоплотностных кодов // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 2. — С. 337–343.

[4] Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение / пер. с англ. В. Б. Афанасьева. — М.: Техносфера, 2006. — 320 с. — (Мир связи). — 2000 экз. — ISBN 5-94836-035-0

[5] H. Dehghani, M. Ahmadi, S. Alikhani and R. Hasni, 2012. Calculation of Girth of Tanner Graph in LDPC Codes. Trends in Applied Sciences Research, 7: 929-934

[6] М. Вернер Основы кодирования. Учебник для ВУЗов. Москва: Техносфера, 2004. - 288с. ISBN 5-94836-019-9

[7] T. Etzion, A. Trachtenberg, and A. Vardy, Which Codes have Cycle-Free Tanner Graphs?, IEEE Trans. Inf. Theory, 45:6

[8] Hoffman, A. J. and Singleton, R. R. «On Moore Graphs of Diameter 2 and 3.» IBM J. Res. Develop. 4, 497—504, 1960