О возможных значениях максимума относительного влияния переменных для пороговых функций

И. В. Грибушин

В работе исследуются относительные влияния переменных булевой функции. Найдены значения нижней и верхней границы максимума относительного влияния для пороговых функций от n переменных в зависимости от n. Они равны $1/n$ и $(2^{n-1}-1)/(2^{n-1}+n-2)$. Приводится разбиение всех пороговых функций четырёхмерного пространства на классы в зависимости от максимального относительного влияния переменных.

Ключевые слова: пороговые функции, влияние переменных булевой функции, относительное влияние переменных булевой функции, τ-регулярные булевы функции.

Введение

Рассмотрим булеву функцию $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ от n переменных.

Обозначение 1. $[n] := \{1,...,n\}, [k,n] := \{k,...,n\}$.

Определение 1 (см. [5]). *Характеристической функцией множества $S \subseteq [n]$ называется:*

$$\chi_S := \prod_{i\in S} x_i, \quad \chi_{\varnothing} := 1.$$

Определение 2 (см. [5]). *Пусть x равномерно распределено на пространстве $\{-1,1\}^n$. Коэффициентом Фурье функции f относительно $S \subseteq [n]$ называется:*

$$\hat{f}(S) := \hat{f}_S := \mathbf{E} f(x)\chi_S(x).$$

Из равенства Парсеваля выводится следующее утверждение.

Утверждение 1 (см. [5]).

$$\sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}(S)^2 = 1.$$

Обозначение 2. *Если $x = (x_1, ..., x_i, ..., x_n)$, то*

$$x^{\oplus i} := (x_1, ..., -x_i, ..., x_n).$$

Обозначение 3. *Если $x = (x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n)$, $i < j$, то*

$$x^{i\leftrightarrow j} := (x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n).$$

Определение 3 (см. [1]). *Влиянием i-ой переменной на функцию f называется:*

$$Inf_i = \mathbf{Pr}_{x\in\{-1,1\}^n}[f(x) \neq f(x^{\oplus i})].$$

Определение 4. *Функции f и $\tilde{f}$ называются эквивалентными, если они имеют одинаковые множества влияний переменных:*

$$\{Inf_i(f)|i \in [n]\} = \{Inf_i(\tilde{f})|i \in [n]\}.$$

Замечание 1. *Следующие 3 Операции сохраняют эквивалентность в смысле Определения* (4)*:*

1) $f \sim \tilde{f} = -f$

2) $f \sim \tilde{f} = f(x^{\oplus i})$

3) $f \sim \tilde{f} = f(x^{i\leftrightarrow j})$

Замечание 2. *Принимая во внимание Операцию 3, можно считать, что переменные любой функции f упорядочены по убыванию своих влияний:*

$$Inf_1 \geq Inf_2 \geq \ldots \geq Inf_n.$$

Замечание 3 (см. [3])**.**

$$Inf_i(f) := \sum_{i \in S \subseteq [n]} \hat{f}(S)^2.$$

Утверждение 2 (см. [3])**.** *Для любой монотонной булевой функции f имеет место:*

$$Inf_i = \hat{f}_i.$$

Определение 5 (см. [1])**.** *Полным влиянием функции f называется:*

$$Inf(f) := \sum_{i=1}^{n} Inf_i(f).$$

Замечание 4 (см. [3])**.**

$$Inf(f) = \sum_{\varnothing \neq S \subseteq [n]} |S| \hat{f}_S^2.$$

Определение 6. *Относительным влиянием i-ой переменной на функцию f называется:*

$$\tau_i = \frac{Inf_i(f)}{Inf(f)}.$$

Определение 7 (см. [2])**.** *f называется τ-регулярной для некоторого $\tau > 0$, если $\forall i \in [n]$:*

$$Inf_i(f) \leq \tau Inf(f).$$

Определение 8. *Пусть $p : \{-1,1\}^n \to \mathbf{R}$ - линейный многочлен, $f = sign(p)$, тогда функция $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ называется пороговой.*

Замечание 5. *Так как для любой пороговой функции f существует эквивалентная ей монотонная пороговая функция* (см. [4])*, значит, множество значений τ на монотонных функциях равно множеству значений τ на пороговых функциях.*

Из Определения (7) имеем:

$$\max_{i\in[n]} Inf_i(f) \le \tau Inf(f) \Rightarrow \max_{i\in[n]} \frac{Inf_i(f)}{Inf(f)} \le \tau.$$

Так как для любой τ-регулярной функции имеет смысл рассматривать только наименьшее значение τ, получаем:

$$\boxed{\tau = \max_{i\in[n]} \frac{Inf_i(f)}{Inf(f)}} \tag{1}$$

Получили, что $\tau(f)$ является максимальным относительным влиянием среди всех относительных влияний переменных функции f.

Замечание 6. *Из формулы* (1) *следует, что* $\frac{1}{n} \le \tau(f) \le 1$*, где* n *— количество существенных переменных у функции* f.

Границы максимума относительного влияния переменных для пороговых функций

Утверждение 3. *Для любой монотонной функции* f*, существенно зависящей от* $n \ge 2$ *переменных, и для любого* i *выполнено:*

$$\frac{1}{2^{n-1}} \le Inf_i(f) \le \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}.$$

Доказательство. Из Определения (3) следует, что

$$Inf_i(f) = \mathbf{Pr}_{x\in\{-1,1\}^n}[f(x) \ne f(x^{\oplus i})] = \mathbf{Pr}_{x_i=1}[f(x) \ne f(x^{\oplus i})]$$

Если Inf_i принимает значение 0, то функция не зависит от x_i. Если Inf_i принимает значение 1, то функция зависит только от x_i. Так как f существенно зависит от всех своих n переменных, получаем:

$$\mathbf{Pr}_{x_i=1}[f(x) \ne f(x^{\oplus i})] > 0 \Rightarrow Inf_i(f) =$$
$$= \mathbf{Pr}_{x_i=1}[f(x) \ne f(x^{\oplus i})] \ge \frac{1}{2^{n-1}};$$
$$\mathbf{Pr}_{x_i=1}[f(x) \ne f(x^{\oplus i})] < 1 \Rightarrow Inf_i(f) =$$
$$= \mathbf{Pr}_{x_i=1}[f(x) \ne f(x^{\oplus i})] \le \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}.$$

□

Теорема 1. *Относительное влияние переменных любой пороговой функции, существенно зависящей от $n \geq 2$ переменных, не превосходит* $(2^{n-1}-1)/(2^{n-1}+n-2)$.

Доказательство. Из формулы (1) имеем

$$\tau = \max_{i \in [n]} \frac{Inf_i(f)}{Inf(f)}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что максимум достигается при $i = 1$, тогда формула примет вид:

$$\tau = \frac{Inf_1(f)}{Inf(f)} = \frac{Inf_1}{Inf_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} Inf_i}.$$

Воспользовавшись утверждением (3), получаем

$$\tau = \frac{Inf_1}{Inf_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} Inf_i} \leq \frac{Inf_1}{Inf_1 + \frac{n-1}{2^{n-1}}} \leq \frac{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}}{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} + \frac{n-1}{2^{n-1}}} = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+n-2}.$$

□

Следствие 1. *Относительное влияние переменных любой пороговой функции, существенно зависящей от $n \geq 2$ переменных, лежит на отрезке* $\left[\frac{1}{n}, \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+n-2}\right]$.

Доказательство. Следствие напрямую выводится из Замечания (6) и Теоремы (1). □

Разбиение пороговых функций четырёхмерного пространства на классы в зависимости от максимального относительного влияния переменных

Найдём все возможные значения τ для пороговых функций, зависящих от не более, чем 3 переменных. Принимая во внимание Замечание (5), будем рассматривать только монотонные пороговые функции. Вычислим разложение Фурье для функций вида $\delta_A(x)$:

Обозначение 4. *Пусть $A \subseteq \{-1,1\}^n$ – множество точек на булевом кубе, тогда:*

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } x \in A; \\ -1, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $A = \{(1,1,1)\}$, тогда из Определения (2) получаем:

$$\hat{f}(\emptyset) = -\frac{3}{4} \qquad \hat{f}(x_1x_2) = \hat{f}(x_2x_3) = \hat{f}(x_1x_3) = \frac{1}{4}$$
$$\hat{f}(x_1) = \hat{f}(x_2) = \hat{f}(x_3) = \frac{1}{4} \qquad \hat{f}(x_1x_2x_3) = \frac{1}{4}$$

Значит, $\delta_{111}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3-$ $-3)$. Теперь посчитаем разложение Фурье для остальных пороговых функций от 3 переменных:

$$\delta_\emptyset = -1$$
$$\delta_{1-11}(x_1,x_2,x_3) = \delta_{111}(x_1,-x_2,x_3) =$$
$$= \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_1x_2x_3 - 3)$$
$$\delta_{111\vee1-11} = \delta_{111} + \delta_{1-11} + 1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + x_1x_3 - 1)$$
$$\delta_{111\vee1-11\vee11-1\vee-111\vee1-1-1} = x_1$$
$$\delta_{111\vee1-11\vee11-1} = x_1 - \delta_{1-1-1} - 1 =$$
$$= \frac{1}{4}(3x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_1x_2x_3 - 1)$$
$$\delta_{111\vee1-11\vee11-1\vee-111} = \delta_{111\vee1-11\vee11-1} + \delta_{-111} + 1 =$$
$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2x_3)$$

Для удобства дальнейших рассуждений введём обозначения:

Обозначение 5.

$$\delta_0 := -1 \qquad \delta_2 := \delta_{111\vee 1-11} \qquad \delta_4 := \delta_{111\vee 1-11\vee 11-1\vee -111}$$
$$\delta_1 := \delta_{111} \qquad \delta_3 := \delta_{111\vee 1-11\vee 11-1} \qquad \delta_5 := x_1$$

Замечание 7. *Так как Операция 1 сохраняет эквивалентность, можно исследовать только пороговые функции, которые принимают значение* 1 *не более* 2^{n-1} *раз.*

То есть достаточно рассмотреть функции: $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ и $\delta_5 = x_1$. Функция x_1 зависит только от 1 переменной ($Inf_1 = Inf$), а $\delta_0 \equiv -1$ ($Inf = 0$), тогда из Определения (7) получаем $\tau(x_1) = 1$ и $\tau(\delta_0) = 0$. Функции δ_1 и δ_4 в разложении дают симметрические многочлены от 3 переменных, поэтому влияния всех переменных одинаковы $Inf_1 = Inf_2 = Inf_3$, следовательно, $\tau(\delta_1) = \tau(\delta_4) = \frac{1}{3}$. Функция δ_2 в разложении даёт симметрический многочлен от 2 переменных (x_1 и x_3), поэтому $Inf_1 = Inf_3$ и $Inf_2 = 0$, тогда $\tau(\delta_2) = \frac{1}{2}$. Посчитаем $\tau(\delta_3)$:

$$Inf_1(\delta_3) = \frac{1}{16}(9+1+1+1) = \frac{3}{4};$$
$$Inf_2(\delta_3) = Inf_3(\delta_3) = \frac{1}{16}(1+1+1+1) = \frac{1}{4};$$
$$Inf(\delta_3) = \frac{5}{4}; \quad \tau(\delta_3) = \frac{3}{4} : \frac{5}{4} = \frac{3}{5}.$$

Утверждение 4. *Таким образом, мы получили все возможные значения* τ *для пороговых функций от 3 переменных:* 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ *и* 1.

Утверждение 5 (Метод двух пересекающихся отрезков)**.** *Пусть точки A,B,C,D лежат в вершинах куба. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O.* $f(A) = f(B) = 1$ *и* $f(C) = f(D) = -1$. *Тогда функция* f *не может быть пороговой.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть функция f пороговая и задаётся неравенством $\sum k_i x_i > \theta$. Введём функцию $p = \sum k_i x_i - \theta$ на всех точках куба (уже не только булева), то на отрезке AB $p > 0$, так как значение f на его концах положительно, а на отрезке CD $p < 0$, тогда в точке O получили противоречие, значит, f не может быть пороговой. □

Обозначение 6. *Пусть $N_{-1}(f)$ — мощность множества, на котором $f = -1$.*

Утверждение 6. *Пусть M — подмножество точек булева куба размерности n, функция f принимает значения равные -1 на M, в остальных точках куба $f = 1$. Функция g равна -1 на множестве $M \cap \{x_{n+1} = -1\}$ в булевом кубе размерности $n+1$(добавили новую переменную x_{n+1}), в остальных точках $g = 1$. Тогда*

$$Inf_i(g) = \frac{1}{2} Inf_i(f), i \in [n]; \quad Inf_{n+1}(g) = \frac{N_{-1}(f)}{2^n} = \frac{|M|}{2^n}.$$

Доказательство. Заметим, что $g = -\frac{1}{2}(f-1)(x_{n+1}-1)+1$, так как $g = 1$ в точках, в которых $f = 1$ или $x_{n+1} = 1$, и $g = -1$ в точках, в которых $f = -1$ и $x_{n+1} = -1$. Значит, для любого $i \in [n]$ выполнено: $Inf_i(g) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 Inf_i(f) = \frac{1}{2} Inf_i(f)$. Пусть c_j — коэффициенты при одночленах функции f, а c_0 — свободный член, тогда $Inf_{n+1}(g) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left(\sum c_j^2 + (c_0-1)^2\right) = \frac{1}{4}\|f-1\|_2^2 = \frac{1}{4}\mathbf{E}(f-1)^2$. Но $\mathbf{E}(f-1)^2 = \frac{2^2 N_{-1}}{2^n}$, поэтому $Inf_{n+1}(g) = \frac{N_{-1}(f)}{2^n}$. □

Рассмотрим все пороговые функции четырёхмерного пространства и посчитаем для них возможные значения τ. Воспользовавшись Замечаниями (5) и (7), будем считать τ для монотонных функций, которые принимают значение -1 не более 8 раз. Сначала рассмотрим только те функции, которые содержат два нижних слоя минус единиц. Начнём с функции f_1 и будем добавлять новые точки с отрицательными значениями по одной. (На всех рисунках жирным выделены рёбра с вершинами, на которых функция принимает значение -1.)

Так как f_1 симметрична относительно всех своих переменных, она является пороговой и $Inf_1(f_1) = Inf_2(f_1) = Inf_3(f_1) = Inf_4(f_1) = \frac{1}{4} Inf(f_1)$. Значит, $\tau(f_1) = \frac{1}{4}$.

Добавим одну точку со значением -1, получим функцию $f_2 = sign(p_2)$, где $p_2 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 1$, следовательно, она является пороговой. f_2 симметрична по парам переменных (x_1, x_2) и (x_3, x_4).

$$f_2 = 1 - \frac{(1-x_1)(1-x_2)}{2} -$$
$$- \frac{(1-x_3)(1-x_4)((1+x_1)(1-x_2) + (1-x_1)(1+x_2))}{8}$$

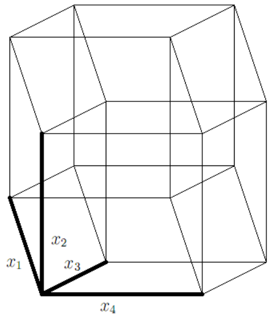

Рис. 1: Функция f_1

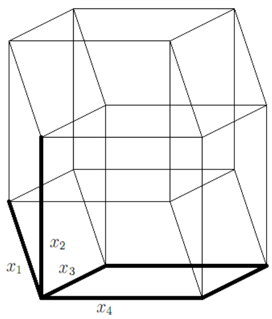

Рис. 2: Функция f_2

$$f_2 = \frac{(1 - x_1x_2)(x_3 + x_4 - x_3x_4) - x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1}{4}$$

$$Inf_1(f_2) = Inf_2(f_2) = \frac{1}{2}, \quad Inf_3(f_2) = Inf_4(f_2) = \frac{1}{4},$$

$$Inf(f_2) = \frac{3}{2}, \quad \tau(f_2) = \frac{1}{3}.$$

Добавив ещё одну точку, получим функцию f_3 или f_4.

На рисунке 3 показано, как метод пересекающихся отрезков применяется к доказательству того, что функция f_3 не пороговая.

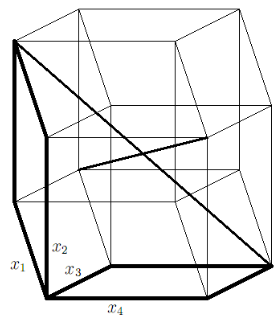

Рис. 3: Функция f_3

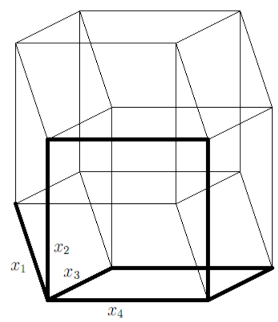

Рис. 4: Функция f_4

Функция $f_4 = sign(p_4)$, где $p_4 = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 1$, поэтому является пороговой. f_4 симметрична по паре переменных (x_2, x_3).

$$f_4 = 1 - \frac{(1-x_1)(1-x_2)}{2} - \frac{(1+x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)}{8} - \\ - \frac{(1-x_1)(1+x_2)(1-x_3)}{4}$$

$$f_4 = \frac{1+5x_1+3x_2-x_1x_2}{8} + \frac{x_3(3-x_1+x_2-3x_1x_2)}{8} + \\ + \frac{x_4(1-x_3)(1+x_1-x_2-x_1x_2)}{8}$$

$$Inf_1(f_4) = \frac{5}{8}, \quad Inf_2(f_4) = Inf_3(f_4) = \frac{3}{8},$$

$$Inf_4(f_4) = \frac{1}{8}, \quad Inf(f_4) = \frac{3}{2}, \quad \tau(f_4) = \frac{5}{12}.$$

Добавим последнюю (восьмую) точку к функциям f_3 и f_4. Получим функции: f_5, f_6, f_7 и f_8.

Воспользовавшись методом пересекающихся отрезков, получим, что функции f_5 и f_6 не являются пороговыми.

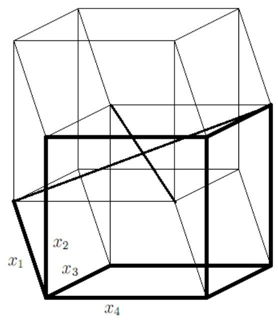

Рис. 5: Функция f_5

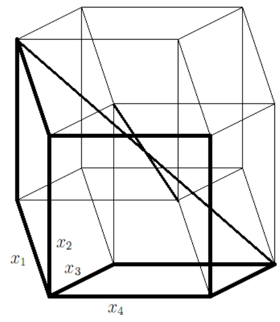

Рис. 6: Функция f_6

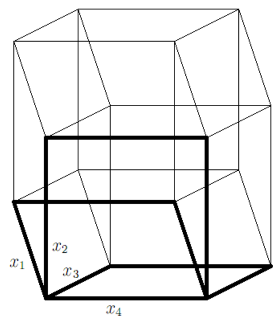

Рис. 7: Функция f_7

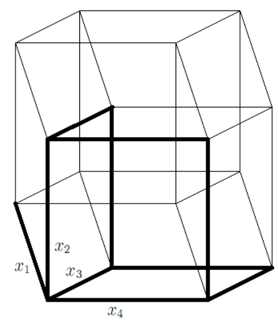

Рис. 8: Функция f_8

Функция f_7 не зависит от x_4, значит, не является функцией 4 переменных.

Функция $f_8 = sign(p_4)$, где $p_8 = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, следовательно, является пороговой. f_8 симметрична по тройке переменных (x_2, x_3, x_4).

$$f_8 = x_1 + \frac{((1-x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4)}{8} -$$

$$-\frac{(1+x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4))}{8}$$

$$f_8 = \frac{3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4}{4}$$

$$Inf_1(f_8) = \frac{3}{4}, \quad Inf_2(f_8) = Inf_3(f_8) = Inf_4(f_8) = \frac{1}{4},$$

$$Inf(f_8) = \frac{3}{2}, \quad \tau(f_8) = \frac{1}{2}.$$

Теперь рассмотрим функции, которые не содержат двух слоёв минус единиц. Все они являются пороговыми, так как получены из трёхмерных пороговых функций расширением пространства на одну размерность.

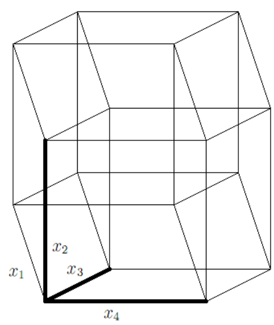

Рис. 9: Функция g_1

$$g_1^3 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4 - x_2x_3x_4)$$

$$Inf_2(g_1^3) = Inf_3(g_1^3) = Inf_4(g_1^3) = \frac{1}{2}, \quad N_{-1}(g_1^3) = 4$$

$$Inf_2(g_1) = Inf_3(g_1) = Inf_4(g_1) = \frac{1}{4}, \quad Inf_1(g_1) = \frac{1}{2},$$

$$Inf(g_1) = \frac{5}{4}, \quad \tau(g_1) = \frac{2}{5}.$$

$$g_2^3 = x_2 - \frac{(1+x_2)(1-x_3)(1-x_4)}{4} = \frac{3x_2 + x_3 + x_4 + x_2x_3 +}{4}$$

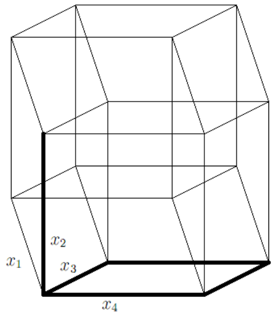

Рис. 10: Функция g_2

$$+\frac{x_2x_4 - x_3x_4 - x_2x_3x_4 - 1}{4}$$

$$Inf(g_2^3) = \left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}, \quad N_{-1}(g_2^3) = 5, \quad Inf(g_2) = \left\{\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right\},$$

$$Inf(g_2) = \frac{5}{4}, \quad \tau(g_2) = \frac{1}{2}.$$

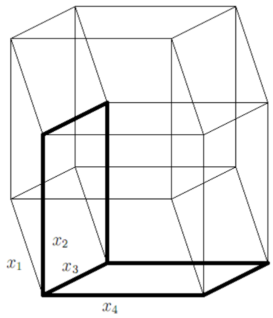

Рис. 11: Функция g_3

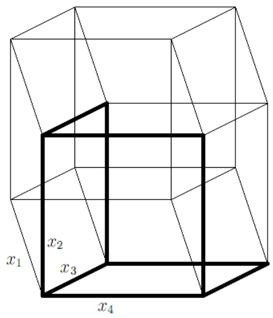

Рис. 12: Функция g_4

Функция g_3 не зависит от x_3, значит, не является функцией 4 переменных.

Функция g_4^3 симметрична по всем трём переменным, поэтому

$$Inf(g_4^3) = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}, \quad N_{-1}(g_4^3) = 7$$

$$Inf(g_4) = \left\{\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right\}, \quad Inf(g_4) = \frac{5}{4}, \quad \tau(g_4) = \frac{7}{10}.$$

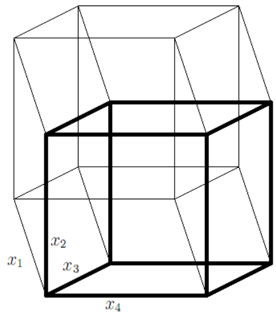

Рис. 13: Функция g_5

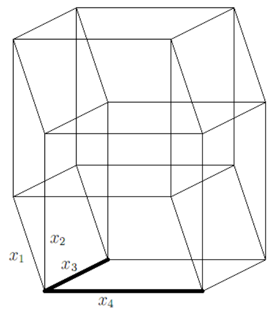

Рис. 14: Функция g_6

Функция $g_5 = x_1$ не зависит от x_2, x_3, x_4.

$$g_6^2 = \frac{x_1 + x_2 + x_1 x_2 - 1}{2}$$

$$Inf(g_6^2) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \quad N_{-1}(g_6^2) = 3$$

$$Inf(g_6^3) = \left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}, \quad N_{-1}(g_6^3) = 3$$

$$Inf(g_6) = \left\{\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right\}, \quad Inf(g_6) = 1, \quad \tau(g_6) = \frac{3}{8}.$$

Функция g_7 не зависит от x_2 и x_4, а g_8 от x_4. Функция g_9 симметрична по всем своим переменным, поэтому $\tau(g_9) = \frac{1}{4}$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

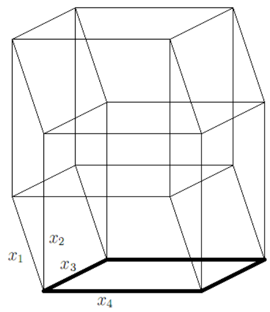

Рис. 15: Функция g_7

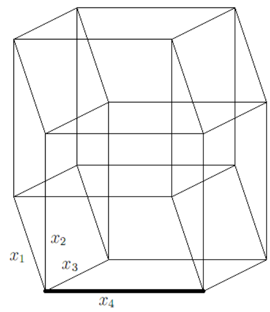

Рис. 16: Функция g_8

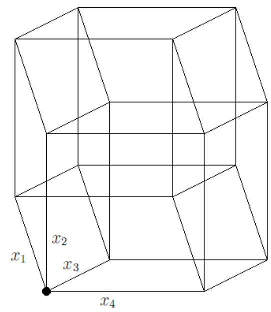

Рис. 17: Функция g_9

Теорема 2. *Множество возможных значений τ для пороговых функций, существенно зависящих от 4 переменных равно:*

$$\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}\right\}.$$

В таблице на рисунке 18 приведено разбиение всех 1882 пороговых функций четырёхмерного пространства на классы в зависимости от их значения τ.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. А. Ирматову за внимание к работе и полезные обсуждения.

τ	количество функций в классе	обозначение функций	количество функций в подклассах
0	2	δ_0	2
$\frac{1}{4}$	64	f_1	32
		g_9	32
$\frac{1}{3}$	288	21 δ_1	64
		δ_4	32
		f_2	192
$\frac{3}{8}$	192	g_6	192
$\frac{2}{5}$	128	g_1	128
$\frac{5}{12}$	384	f_4	384
$\frac{1}{2}$	496	δ_2	48
		f_8	64
		g_2	384
$\frac{3}{5}$	192	δ_3	192
$\frac{7}{10}$	128	g_4	128
1	8	δ_5	8

Рис. 18: Разбиение пороговых функций четырёхмерного пространства

Список литературы

[1] Ben-Or, N. Linial. Collective coin flipping. *Randomness and computation,* Academic Press, 1990, 5:91–115.

[2] I. Diakonikolas, P. Harsha, A. Klivans, R. Meka, P. Raghavendra, R. Servedio, Li-Yang Tan. Bounding the average sensitivity and noise sensitivity of polynomial threshold functions. In *Proceedings of the 42nd ACM symposium on Theory of computing,* ACM, 2010, 533–542.

[3] J. Kahn, G. Kalai, N. Linial. The Influence of Variables on Boolean Functions. In *Proceedings of the 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS),* 1988, 68–80.

[4] S. Muroga. Threshold logic and its applications. New York, Wiley-Interscience, 1971.

[5] R. O'Donnell. Analysis of Boolean functions. Cambridge, Cambridge University Press, 2014.