Прямо-двойственный метод решения задачи энтропийно-линейного программирования

А. В. Чернов

Задачи энтропийно-линейного программирования часто возникают в различных приложениях (транспортные задачи, исследования химических реакций и др.). Такие задачи формулируются обычно как задачи максимизации энтропии (или минимизации минус энтропии) с аффинными ограничениями и линейными ограничениями-неравенствами. В работе исследуется метод решения такой задачи, в основе которого лежит решение двойственной задачи с восстановлением решения прямой задачи: каждой точке в двойственном пространстве, вычисляемой методом, ставится в соответствие определенная точка в прямом. Для указанного метода получена верхняя оценка числа итераций, необходимого для достижения решения с заданной точностью. Изложенный метод применим также к более широкому классу сильно выпуклых функционалов с аналогичным допустимым множеством.

Ключевые слова: энтропийно-линейное программирование, быстрый градиентный метод, двойственная задача, прямо-двойственный метод.

Введение

Данная статья посвящена исследованию метода решения задачи энтропийно-линейного программирования (ЭЛП), в котором двойственная задача решается с помощью быстрого градиентного метода (БГМ) [1]. Получены оценки скорости его сходимости и приведены результаты численных экспериментов.

Предлагаемый метод является прямо-двойственным, т.е. при решении строятся одновременно последовательности точек в двойственном и прямом пространствах. Условием окончания работы метода является выполнение определенного количества итераций (которое оценивается заранее) с последующей проверкой зазора двойственности в найденных точках (разница между значением прямой функции и двойственной функции не должна превышать требуемую величину) и условия, когда суммарная невязка ограничений не превышает заданного значения.

Задача ЭЛП часто возникает при исследовании равновесных распределений в транспортных задачах. Классическим примером формулирования задачи ЭЛП является парадокс Эренфестов [2, 3], где выделяется задача ЭЛП, как задача поиска равновесного распределения на допустимом множестве с линейными ограничениями типа равенства. В указанных работах рассматриваются только ограничения типа равенства, т.е. их допустимое множество является аффинным. Однако, существует также и потребность в решении задач, когда допустимое множество имеет более сложный вид и содержит помимо ограничений-равенств также и ограничениями неравенства вида $Cx \leq b$. Отличительной особенностью данных задач является их размерность, которая может достигать 1000000 и более (например, задача поиска равновесного распределения транспортных потоков в г. Москва). Формулировки таких задач можно найти, например, в [4, 5, 6].

В работе [7] предложено решение задачи ЭЛП с аффинными ограничениями с помощью регуляризации по Тихонову построенной двойственной функции и последующего решения двойственной задачи с восстановлением решения прямой задачи.

В данной работе рассматривается задача ЭЛП с допустимым множеством, которое определяется как ограничениями типа равенства так и ограничениями типа неравенства.

Последующая часть статьи имеет следующая имеет следующую структуру:

- постановка задачи;
- формулировка и доказательство вспомогательных утверждений;
- описание алгоритма поиска решения задачи, формулировка и доказательство основных утверджений;
- результаты численных экспериментов и сравнение предлагаемого метода с тем, что предложен в [7].

Постановка задачи

Рассмотрим на n-мерном вероятностном симплексе $S_n(1) = \left\{x \in R^n_{++} : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$ задачу ЭЛП (1).

$$\begin{gathered} f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i/\xi_i \to \min_{x \in G}; \\ G = \{x \in S_n(1) : C_1 x - b_1 \le 0; C_2 x - b_2 = 0\}. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\xi_i (i = 1, .., n)$ – параметры задачи, $C_1 \in R^{n \times m_1}$, $b_1 \in R^{m_1}$, $C_2 \in R^{n \times m_2}$, $b_2 \in R^{m_2}$.

Отметим, что задача (1) выпуклая, причем функция $f(x)$ сильно выпукла на R^n_{++}, что означает существование единственного решения.

Введем следующие обозначения для упрощения дальнейших выкладок:

$$C = [C_1; C_2] \in R^{n \times (m_1 + m_2)}; \quad b = [b_1; b_2] \in R^{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

Используя введеные обозначения, несложно выписать двойственную задачу (3), где простым множеством является симплекс $S_n(1)$.

$$\psi(y) \to \max_{y\in Q}, \text{ где } Q = R_+^{m_1} \times R^{m_2};$$
$$\psi(y) = \min_{x\in S_n(1)} \{f(x) + \langle y, Cx - b\rangle\} = f(x(y)) + \langle y, Cx(y) - b)\rangle =$$
$$-\langle y, b\rangle - \ln\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \exp\left(-\left[C^T y\right]_i\right)\right]. \tag{3}$$

При этом функция $x(y)$, полученная при построении двойственной задачи, вычисляется по формуле

$$x_i(y) = \frac{\xi_i \exp\left(-[C^T y]_i\right)}{\sum\limits_{j=0}^{n} \xi_j \exp\left(-[C^T y]_j\right)}. \tag{4}$$

Построенная задача эквивалентна задаче минимизации (5) для функции $\phi(y) \equiv -\psi(y)$, которая и будет рассматриваться далее.

$$\phi(y) = \langle y, b\rangle + \ln\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \exp\left(-\left[C^T y\right]_i\right)\right] \to \min_{y\in Q}, \tag{5}$$
$$\text{где } Q = R_+^{m_1} \times R^{m_2}$$

Отметим, что функция $\phi(y)$ является сильно выпуклой на любом выпуклом подмножестве из

$$Q \setminus \left\{y \in Q : (C^T y)_i = (C^T y)_j \forall (i, j)\right\},$$

поэтому решение задачи (5) существует и единственно.

Пусть $D = D(x) = ||d_{i,j}(x)||$ – диагональная матрица размерности $n \times n$, на диагонали которой стоят компоненты вектора x, т.е. $d_{i,i}(x) = x_i$ и $d_{i,j}(x) = 0$ при $i \neq j$. Несложно показать, что градиент и гессиан функции $\phi(y)$ вычисляются по формулам (6).

$$\nabla\phi(y) = b - Cx(y); \qquad \phi''(y) = CD(x(y))C^T - Cx(y)(Cx(y))^T. \tag{6}$$

Введем также следующую функцию-срезку

$$z_+ = \begin{cases} z, & \text{если } z \geq 0; \\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases}$$

Определение 1. *Под $(\varepsilon_f, \varepsilon_g)$-решением задачи ЭЛП (1) будем понимать такую точку $x_t \in R^n$, что $|f(x_t) - f^*| < \varepsilon_f$ и $\Delta(x_t, G) < \varepsilon_g$, где f^* – точное решение задачи, а $\Delta(x, G) = ||(C_1x - b_1)_+|| + ||C_2x - b_2||$ - невязка точки x для множества G.*

Здесь и далее под нормой понимается евклидова норма, $||z|| = \sqrt{z^T z}, z \in R^n$.

Вспомогательные результаты

Лемма 1 ([8]). *Имеет место следующее неравенство*

$$||\nabla\phi(y_1) - \nabla\phi(y_2)|| \leq L||y_1 - y_2||,$$

где $L = \max\limits_{1 \leq i \leq n} ||[C]^{\langle i \rangle}||_2^2$, $[C]^{\langle i \rangle}$ - i-ый столбец матрицы C.

Далее будет рассматриваться решение задачи ЭЛП с помощью модификации быстрого градиентного метода (БГМ) [1]. Известно, что данный метод характеризуется следующими последовательностями ($k = 0, 1, 2...$):

1) последовательности чисел α_i, A_k, τ_k:

$$\alpha_0 \in (0, 1]; \quad A_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i; \quad \alpha_k^2 \leq A_k; \quad \tau_k = \frac{\alpha_{k+1}}{A_{k+1}}. \qquad (7)$$

2) последовательности точек в двойственном пространстве $\tilde{y}_k$, $\breve{y}_k$, y_k и соответствующая им последовательность точек в прямом пространстве x_k, определяемая на основе уравне-

ния (4)

$$\begin{aligned}
&\tilde{y}_k = \arg\min_{y\in Q}\left\{\tfrac{L}{2}||y-y_k||_2^2+\phi(y_k)+\langle\nabla\phi(y_k),y-y_k\rangle\right\};\\
&\breve{y}_k = \arg\min_{y\in Q}\left\{\tfrac{L}{2}||y-y_0||_2^2+\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\left(\phi(y_i)+\langle\nabla\phi(y_i),y-y_i\rangle\right)\right\};\\
&y_{k+1}=\tau_k\breve{y}_k+(1-\tau_k)\tilde{y}_k;\quad x_k=\sum_{i=0}^{k}\tfrac{\alpha_i}{A_k}x(y_i).
\end{aligned}\tag{8}$$

3) последовательности функций l_k, Ψ_k, а также их минимумы: l_k^*, Ψ_k^*:

$$\begin{gathered}
l_k(y)=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\left(\phi(y_i)+\langle\nabla\phi(y_i),y-y_i\rangle\right);\quad l_k^*=\min_{y\in Q}l_k(y);\\
\Psi_k(y)=\tfrac{L}{2}||y-y_0||_2^2+l_k;\quad \Psi_k^*=\min_{y\in Q}\Psi_k(y).
\end{gathered}\tag{9}$$

В указанных выше обозначениях верны леммы, сформулированные далее.

Лемма 2. *Если множество Q представимо в виде*

$$Q=R_+^{m_1}\times R^{m_2},$$

то последовательности точек $\tilde{y}_k$, $\breve{y}_k$, y_k можно записать в виде (10).

$$\begin{aligned}
&\tilde{y}_k^j=\begin{cases}(y_k-\frac{1}{L}\nabla\phi(y_k))_+^j & \textit{при } j\le m_1;\\ (y_k-\frac{1}{L}\nabla\phi(y_k))^j & \textit{при } j>m_1;\end{cases}\\
&\breve{y}_k^j=\begin{cases}(y_0-\frac{1}{L}\sum\limits_{i=0}^{k}\alpha_i\nabla\phi(y_i))_+^j & \textit{при } j\le m_1;\\ (y_0-\frac{1}{L}\sum\limits_{i=0}^{k}\alpha_i\nabla\phi(y_i))^j & \textit{при } j>m_1.\end{cases}
\end{aligned}\tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим доказательство только для $\tilde{y}_k$. Доказательство для $\tilde{y}_k$ получается совершенно аналогично тривиальной модификацией доказательства для $\breve{y}_k$, приводимого далее.

Задача поиска $\arg\min$ на множестве Q для $\breve{y}_k$ эквивалентна задаче

$$\breve{y}_k = \arg\min_{y\in Q}\left\{\frac{L}{2}\langle y, y\rangle + \langle -Ly_0 + \sum_{i=0}^{k}\alpha_i\nabla\phi(y_i), y\rangle\right\}.$$

Очевидно, что полученная функция является сильно выпуклой с константой сильной выпуклости L, а условия Куна-Такера принимают вид

$$\begin{array}{l} y - (y_0 - \frac{1}{L}\sum\limits_{i=0}^{k}\alpha_i\nabla\phi(y_i) + \nu) = 0; \\ \nu_j y^j = 0; \quad \nu_j \geq 0 \text{ при } j \in [1, m_1]; \\ \nu_j \equiv 0 \text{ при } j > m_1. \end{array}$$

Отсюда находим искомое выражение для $\breve{y}_k$:

$$\breve{y}_k^j = \begin{cases} (y_0 - \frac{1}{L}\sum\limits_{i=0}^{k}\alpha_i\nabla\phi(y_i))_+^j \text{ при } j \leq m_1; \\ (y_0 - \frac{1}{L}\sum\limits_{i=0}^{k}\alpha_i\nabla\phi(y_i))^j \text{ при } j > m_1. \end{cases}$$

$\square$

Лемма 3 ([8])**.** *Пусть $\phi(y)$ - выпуклая функция на выпуклом множестве Q, градиент которой удовлетворяет условию Липшица с константой L, функция $\Psi(y)$ определяется (9), а последовательность $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (7), тогда выполнется*

$$A_k\phi(\tilde{y}_k) \leq \Psi_k^* = \min_{y\in Q}\Psi_k(y).$$

Лемма 4 ([9])**.** *Если последовательность точек y_k, определяемая (8), сходится к некоторой точке y^*, то эта последовательность будет лежать в шаре*

$$U_r(y^*) = \left\{y \in R_+^{m_1}\times R^{m_2} : ||y - y^*|| \leq r\right\},$$

где $r = O(||y_0 - y^*||)$.

Замечание. Отметим, что в экспериментах $||y_k - y^*|| \leq c||y_0 - y^*||$, причем $c \leq 10$, а во многих случаях не превосходит $c \leq 3$.

Основные результаты

Используя обозначения и леммы определенные ранее, решение задачи (1) можно получить с помощью следующего представления БГМ

Алгоритм 1: Быстрый градиентный метод

Input: Последовательность $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$, точка y_0
Output: Последовательности точек $\tilde{y}_k$, x_k
repeat
Вычисляем

$$\tilde{y}_k^j = \begin{cases} (y_k - \frac{1}{L}\nabla\phi(y_k))_+^j \text{ при } j \leq m_1; \\ (y_k - \frac{1}{L}\nabla\phi(y_k))^j \text{ при } j > m_1; \end{cases}$$

$$\breve{y}_k^j = \begin{cases} (y_0 - \frac{1}{L}\sum\limits_{i=0}^{k}\alpha_i\nabla\phi(y_i))_+^j \text{ при } j \leq m_1; \\ (y_0 - \frac{1}{L}\sum\limits_{i=0}^{k}\alpha_i\nabla\phi(y_i))^j \text{ при } j > m_1; \end{cases}$$

$$y_{k+1} = \tau_k\tilde{y}_k + (1-\tau_k)\breve{y}_k; \quad x_k = \sum_{i=0}^{k}\frac{\alpha_i}{A_k}x(y_i).$$

until $f(x_k) + \phi(y_k) > \varepsilon_f$ *или* $\Delta(x_k, G) > \varepsilon_g$;

Отметим, что выход из алгоритма осуществляется при выполнении условий

$$f(x_k) + \phi(y_k) = f(x_k) - \psi(y_k) \leq \varepsilon_f.$$

Величина $f(x_k) - \psi(y_k)$ упоминалась ранее как зазор двойственности в точке (x_k, y_k).

Приводимая ниже теорема уже была сформулирована ранее и доказана для ограниченных множеств [1] и для множеств, совпадающих со всем пространством. В работе [9] оценки, полученные в работе [1], распространяются на случай неограниченных допустимых множеств определяемых ограничениями-равенствами. Эти результаты можно распространить и на ограничения-неравенства, что и утверждается в теореме 1.

Теорема 1. *Предположим, что решение задачи существует и лежит в некотором шаре (в двойственном пространстве) радиуса R ($||y^*|| \leq R$), который также содержит и все остальные точки последовательности y_k. Тогда*

$$\Delta(x_k, G) \leq \frac{2LR}{A_k}; \quad |f(x^*) - f(x_k)| \leq \frac{2LR^2}{A_k}; \quad f(x_k) + \phi(\tilde{y}_k) \leq \frac{2LR^2}{A_k}. \tag{11}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $||y_k - y_0|| \leq 2R$ и $||y_k - y_*|| \leq 2R$. Таким образом, исходная задача поиска минимума двойственной функции $\phi(y)$ на множестве Q эквивалентна задаче поиска минимума на ограниченном замкнутом множестве $\tilde{Q} = Q \bigcap U_{2R}(y_0)$. Значит, с учетом леммы 3, можно записать:

$$A_k \phi(\tilde{y}_k) \leq \Psi_k^* = \min_{y \in \tilde{Q}} \Psi_k = \min_{y \in \tilde{Q}} \left\{ l_k(y) + \frac{L}{2} ||y - y_0||_2^2 \right\} \leq$$

$$\leq \min_{y \in \tilde{Q}} \left\{ l_k(y) + \max_{y \in \tilde{Q}} \frac{L}{2} ||y - y_0||_2^2 \right\} \leq l_k^* + 2LR^2.$$

Следовательно, выполняется

$$\phi(\tilde{y}_k) - \frac{l_k^*}{A_k} \leq \frac{2LR^2}{A_k}.$$

Из определения функции ϕ ($\phi = \max_{x \in S_n(1)} \{\langle y, b - Cx \rangle - f(x)\} = \langle y, b - Cx(y) \rangle - f(x(y))$) в силу (6) несложно получить, что для некоторой точки $y' \in Q$ выполняется

$$\phi(y') + \langle \nabla \phi(y'), y - y' \rangle = -f(x(y')) + \langle b - Cx(y'), y \rangle.$$

Поэтому, можно записать

$$\tfrac{1}{A_k} l_k^* = \min_{y \in \tilde{Q}} \sum_{i=0}^{k} \tfrac{\alpha_i}{A_k} \left(\phi(y_i) + \langle \nabla \phi(y_i), y - y_i \rangle \right) =$$
$$= \min_{y \in \tilde{Q}} \sum_{i=0}^{k} \tfrac{\alpha_i}{A_k} \left(-f(x(y_i)) + \langle b - Cx(y_i), y \rangle \right) \le$$
$$\le -f(x_k) + \min_{y \in \tilde{Q}} \langle b - Cx_k, y \rangle \stackrel{def}{=} \tilde{f}(x_k).$$

Значит, на каждом шаге k выполняется неравенство

$$\phi(\tilde{y}_k) - \tilde{f}(x_k) \le \phi(\tilde{y}_k) - \frac{1}{A_k} l_k^* \le \frac{2LR^2}{A_k}.$$

Отметим, что

$$\max_{y \in \tilde{Q}} \langle Cx_k - b, y \rangle = \max_{u \in U_{2R}^{m_1}(0) \bigcap R_+^{m_1}} \langle C_1 x_k - b_1, u \rangle +$$

$$+ \max_{v \in U_{2R}^{m_2}(0)} \langle C_2 x_k - b_2, v \rangle = 2R ||C_2 x_k - b_2|| + 2R ||(C_1 x_k - b_1)_+||.$$

Поэтому

$$\phi(\tilde{y_k}) + f(x_k) + 2R ||C_2 x_k - b_2|| + 2R ||(C_1 x_k - b_1)_+|| \le \frac{2LR^2}{A_k}.$$

В силу $\langle b - Cx^*, y^* \rangle = 0$ и теоремы двойственности ($-f(x^*) = \tilde{f}(x^*) \le \phi(y)$) находим, что

$$f(x_k) - f(x^*) \le f(x_k) + \phi(y^*) \le f(x_k) + \phi(\tilde{y}_k) \le \frac{2LR^2}{A_k}.$$

С другой стороны

$$-f(x^*) = \langle y^*, Cx^* - b\rangle - f(x^*) = \phi(y^*) \geq$$

$$\geq \langle y^*, Cx_k - b\rangle - f(x_k) \Rightarrow f(x^*) - f(x_k) \leq -\langle y^*, Cx_k - b\rangle \leq$$

$$\leq R||C_2x_k - b_2|| + R||(C_1x_k - b_1)_+|| \Rightarrow\Rightarrow -R||C_2x_k - b_2||-$$

$$-R||(C_1x_k - b_1)_+|| \leq f(x_k) - f(x^*) \leq f(x_k) + \phi(y_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x_k) + \phi(y_k) + R||C_2x_k - b_2|| + R||(C_1x_k - b_1)_+||.$$

Таким образом, получаем, что на k-м шаге будут выполняться условия

$$||C_2x_k - b_2|| + ||(C_1x_k - b_1)_+|| \leq \frac{2LR}{A_k}; \quad |f(x^*) - f(x_k)| \leq \frac{2LR^2}{A_k};$$

$$|f(x_k) + \phi(y_k)| \leq \frac{2LR^2}{A_k}.$$

□

Следствие 1. *Пусть $\alpha_i = (i+1)/2$ (для такой последовательности выполняются соотношения (7)) и $y_0 = 0$, тогда количество итераций N, которое достаточно выполнить для достижения заданной точности $(\varepsilon_f, \varepsilon_g)$, будет определяться*

$$N = \max\left\{\sqrt{\frac{8LR}{\varepsilon_g}}, \sqrt{\frac{8LR^2}{\varepsilon_f}}\right\}. \tag{12}$$

Доказательство. Т.к. $y_0 = 0$, то в силу леммы 4 следует, что $||y_k - y^*|| = O(||y^*||)$. Тогда все точки y_k, найденные предлагаемым методом, будут лешать в шаре радиуса R ($R = O(||y^*||)$). Из теоремы 1 следует, что для того чтобы найденная точка (x_N, y_N) была $(\varepsilon_f, \varepsilon_g)$-решением, достаточно выполнения в этой точке условия

$$\frac{2LR}{A_N} \leq \varepsilon_g \text{ и } \frac{2LR^2}{A_N} \leq \varepsilon_f.$$

С другой стороны, т.к. $\alpha_i = (i+1)/2$, то

$$A_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = N/2 + N(N+1)/4 \geq N^2/4.$$

Поэтому

$$\frac{2LR}{A_N} \leq 8LR/N^2.$$

Из найденных неравенств тривиально выводится утверждение следствия. □

Несложно видеть, что алгоритм 1 требует для вычисления k-ого шага наличия информации обо всех предыдущих шагах и, исходя из этих данных, вычисления соответствующих точек в прямом и двойственном пространствах. Однако, данное требование устраняется, если в алгоритм 1 ввести дополнительную переменную, которая будет хранить сумму предыдущих градиентов с соответствующими коэффициентами, а также выразить значение переменной x исключительно через её значение на предыдущем шаге и значение переменной y на текущем шаге. Тогда шаги алгоритма 1 могут быть записаны в следующем виде:

$$\tilde{y}_k^j = \begin{cases} (y_k - \frac{1}{L}\nabla\phi(y_k))_+^j & \text{при } j \leq m_1; \\ (y_k - \frac{1}{L}\nabla\phi(y_k))^j & \text{при } j > m_1; \end{cases}$$
$$\breve{y}_k^j = \begin{cases} (y_0 - \frac{1}{L}u_k)_+^j & \text{при } j \leq m_1; \\ (y_0 - \frac{1}{L}u_k)^j & \text{при } j > m_1; \end{cases}$$
$$y_{k+1} = \tau_k \tilde{y}_k + (1-\tau_k)\breve{y}_k; \quad u_{k+1} = u_k + \alpha_k \nabla\phi(y_{k+1});$$
$$x_{k+1} = (x_k \cdot A_k + \alpha_{k+1} \cdot x(y_{k+1}))/A_k.$$

Причем здесь $u_0 = \nabla\phi(y_0)$, $x_0 = x(y_0)$.

Численные эксперименты

Заметим, что следствие 1, являющееся тривиальным следствием теоремы 1, дает возможность выполнить N итераций, определяемых формулой (12), без проверки условия завершения работы алгоритма и только после этого единожды проверить выполнено ли требуемое условие на окончание алгоритма (зазор двойственности и невязка). Однако, для этого требуется начальное знание об области (радиус шара в двойственном пространстве), в котором находится решение задачи, что не всегда известно на практике. Предлагаемый в статье алгоритм позволяет осуществить постепенный поиск такого шара, иными словами алгоритм состоит из следующих шагов:

1) Выбираем исходный размер шара R, в котором должно находиться решение.

2) Вычисляем согласно (12) предположительное число итераций N, необходимое для достижения заданной точности при текущей оценке шара.

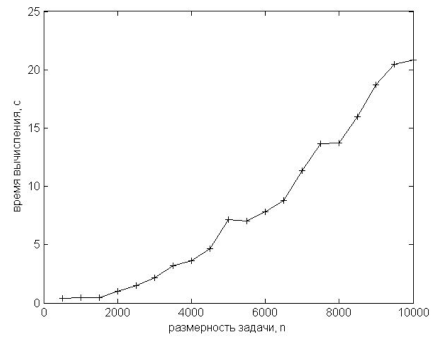
3) Выполяется предписанное число итераций N и далее шаг 4.

4) Проверяем условие выхода из цикла (зазор двойственности и ошибка ограничений меньше чем $(\varepsilon_f, \varepsilon_g)$). Если заданная точность достигнута, то возвращаем результат. В противном случае увеличиваем размер шара для поиска решения и переходим к шагу 2.

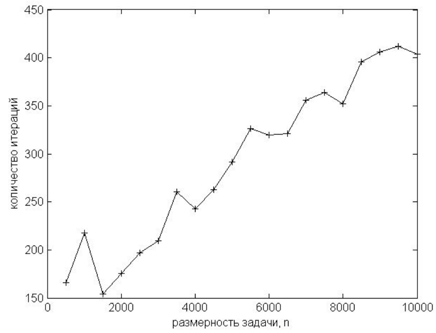
Такой алгоритм был реализован на ЭВМ ASUS N55S с процессором Intel Core i5, оперативной памятью 2Гб под управлением операционной системы MS Windows 7. Полученные результаты вычислений позволяют утверждать о довольно неплохой скорости сходимости метода, а также подтверждают его работоспособность как для ограничений типа равенства так и для ограничений-неравенств. В частности, на рисунке 1 изображены графики времени и количества итераций, которое требуется для достижения заданной точности $(\varepsilon_f, \varepsilon_g)$.

Для указанных вычислений исходные параметры выбирались следующим образом:

1) требуемая относительная ошибка значения функции $\varepsilon_f^{rel} = 0.01$; требуемая относительная невязка решения $\varepsilon_g^{rel} = 0.01$;



(a) Требуемое время решения



(b) Затраченное количество итераций

Рис. 1. Продолжительность работы БГМ в зависимости от размерности задачи

2) исходная точка в двойственном пространстве $y_0 = 0$;

3) исходная оценка радиуса шара $R = 0.5$;

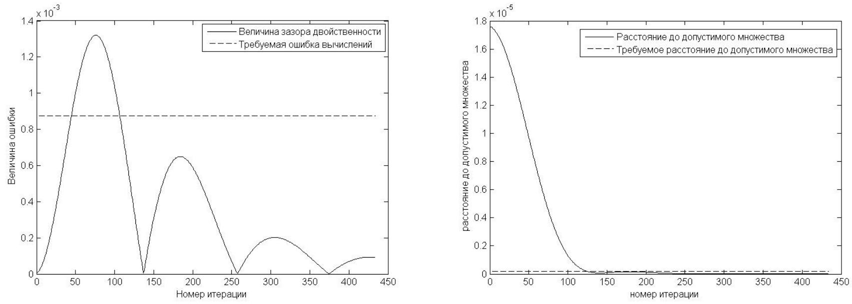
4) последовательность чисел $\alpha_i = (i+1)/2$.

При этом требуемые абсолютная ошибка значения функции и допустимое значение невязки решения вычисляются по формулам

$$\varepsilon_f = \varepsilon_f^{abs} = f(x(y_0)) \cdot \varepsilon_f^{rel}; \quad \varepsilon_g = \varepsilon_g^{abs} =$$
$$= (||(C_1 x(y_0) - b_1)_+||_2 + ||C_2 x(y_0) - b_2||_2) \cdot \varepsilon_g^{rel}.$$

На рисунке 2 проиллюстрирована сходимость метода к решению задачи, т.е. изменение зазора двойственности от итерации и невязки текущий точки. Размерность исследуемой задачи ЭЛП в данном случае была 10000, исходная точка в двойственном пространстве осталась той же ($y = 0$), относительная ошибка вычисления функции была $\varepsilon_f^{rel} = 0.0001$, а допустимая невязка решения $\varepsilon_g^{rel} = 0.01$.

На графике (b) наблюдается монотонное приближение точки к допустимому множеству (причем достаточно быстрое на первых шагах метода), а на графике (a) отражается периодическое



(a) Изменение зазора двойственности (b) Изменение невязки решения

Рис. 2. Сходимость метода

изменение зазора двойственности, причем амплитуда каждого такого цикла также монотонно убывает, при этом структуру цикла сохраняется: первоначальный резкий рост от минимального значения и последующий более пологий спуск.

Отметим, что требуемая точность задачи достигается существенно раньше, чем расчетное значение, что, прежде всего, связано с отсуствием точной оценки радиуса шара с решением задачи при оценке требуемого количества шагов.

На рисунке 3 показана зависимость количества итераций, необходимых для достижения требуемой точности (здесь исходная точка та же, размерность равна 10000, $\varepsilon_f^{rel} = \varepsilon_g^{rel}$ и меняются от 0.0005 до 0.01 с шагом 0.0005).

На рисунке 4 отражено изменение значений прямой и двойственной функции по итерациям. Здесь размерность задачи равна 10000, исходная точка в двойственном пространстве ($y = 0$), относительная ошибка вычисления функции была $\varepsilon_f^{rel} = 0.01$, а допустимая невязка решения $\varepsilon_g^{rel} = 0.01$. Отметим монотонность изменения двойственной функций и "затухающие колебания"значений прямой функции (что также можно увидеть и на рисунке 2). Немотонность $f(x_k)$ объясняется тем, что $x_k \notin G$ в процессе решения.

В статье [7] был предложен метод решения задачи ЭЛП с аффинными ограничениями $Ax = b, b \in R^m$ с помощью регу-

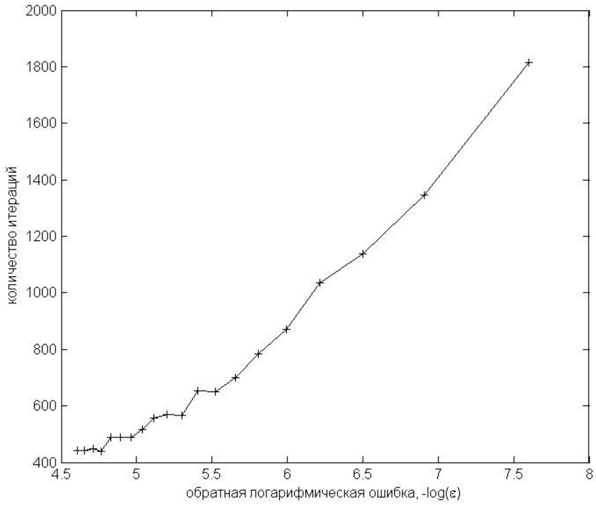


Рис. 3. Зависимость количества итераций для решения задачи от требуемой точности

ляризации по Тихонову двойственной функции. Численные эксперименты показали, что предложенный в данной статье метод работает в среднем в 100 раз быстрее. В частности, на типовых примерах при одних и тех же условиях и ограничениях текущий метод работал 2 секунды, а метод с регуляризацией 3-4 минуты.

Сравнению предлагаемого метода с другими планируется посвятить отдельную публикацию, однако уже сейчас можно отметить, что метод одинаково хорошо работает, как для задач в которых присутствуют только ограничения-равенства (т.е. двойственная задача является задачей безусловной оптимизации) так и с ограничениями-неравенствами, что подтверждается результатами численных экспериментов, в отличие от многих других методов, которые для задачи условной минимизации требуют специальной модификации.

Автор выражает благодарность Бирюкову А.Г., Гасникову А.В. и Двуреченскому П.Е. за ряд ценных замечаний.

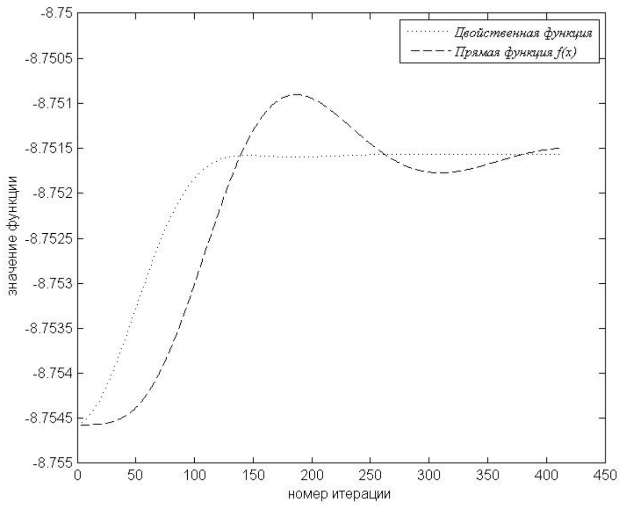


Рис. 4. График изменения значений прямой и двойственной функции

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ 14-01-00722-а

Список литературы

[1] Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. // М.: МЦНМО, 2010.

[2] Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. // М.: Мир, 1965.

[3] Гасников А.В., Гасникова Е.В., М.А. Мендель М.А., Чепурченко К.В. Эволюционные выводы энтропийной модели расчета матрицы корреспонденций. // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. arXiv:1508.01077

[4] Fang S.-C., Rajasekera J.R., Tsao H.-S.J. Entropy optimization and mathematical programming. // Kluwer's International Series, 1997.

[5] Попков Ю.С. Теория макросистем: Равновесные модели // М.: УРСС, 2013.

[6] Гасников А.В., Гасникова Е.В., Двуреченский П.Е., Ершов Е.И., Лагуновская А.А. Поиск стохастических равновесий в транспортных моделях равновесного распределения потоков // Труды МФТИ. 2015. Т. 7. № 4. С. 114–128. arXiv:1505.07492.

[7] Гасников А.В., Гасникова Е.В., Нестеров Е.С., Чернов А.В. Об эффективных численных методах решения задач энтропийно-линейного программирования // ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56. № 4. С. 17–28. arXiv:1410.7719.

[8] Nesterov Yu.E. Smooth minimization of non-smooth function. // Math. Program Ser. A. 2005. V. 103. No , P. 127-152.

[9] Аникин А.С., Гасников А.В., Тюрин А.И., Чернов А.В. Двойственные подходы к задачам минимизации сильно выпуклых функционалов простой структуры при аффинных ограничениях. // ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56. arXiv:1602.01686.