Нижняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью

И. Е. Иванов

Ранее автором было доказано, что автоматы с магазинной памятью сохраняют периодические последовательности, и была приведена экспоненциальная от характеристик автомата оценка сверху на максимальную длину периода. Далее для случая, когда алфавит магазина состоит из одного символа, автору удалось понизить общую оценку до квадратичной. В данной работе показано, что в случае, когда в магазине автомата имеется хотя бы два символа, то существенно понизить верхнюю оценку нельзя, так как удалось построить примеры автоматов, которые генерируют последовальности с экспоненциальной длиной периода.

Ключевые слова: автомат с магазинной памятью, детерминированная функция, периодические последовательности.

Введение

Автомат с магазинной памятью возник в математике в связи с развитием теории формальных языков. Он является распознователем для контекстно-свободных грамматик. Важность магазинов (известных также под названием стеков) в процессах обработки языков была осознана в начале 1950-х годов. Эттингер[1] и Шютценберже [2] первыми формализовали понятие автомата с магазинной памятью. Эквиваленность автоматов с магазинной памятью и контекстно-свободных грамматик была показана Хомским[3] и Эви[4].

Очень скоро стало понятно, что класс контектно-свободных языков устроен сложнее класса регулярных. В работах [5, 6] появились примеры алгоритмически неразрешаемых проблем, а именно:

- Не существует алгоритма, позволяющего установить равенство двух контестно-свободных языков.

- Не существует алгоритма проверки, что один контектно-свободный язык лежит в другом.

- Не существует алгоритма проверки, что пересечение двух контекстно-свободных языков является пустым.

- Не существует алгоритма проверки контекстно-свободного языка на регулярность.

Заметим, что все эти проблемы разрешимы в классе регулярных языков. Исследования их свойствов довольно скоро сформировали теорию автоматов как отдельное направление дискретной математики. Возникли уже самостоятельные задачи описания автоматов как функциональных систем. Были доказаны такие фундаментальные свойства автоматов как преобразователей, как сохранение периодических последовательностей и как следствие отсутствие конечных полных систем (относительно суперпозиции)[7]. Д.Н. Бабиным было доказано, что что арность множества автоматных функций равна двум (аналог 13-ой проблемы Гильберта для автоматных функций) [8]. Детально периодические свойства конечных автоматов изучил А.А. Летуновский, полностью описав периоды выходных последовательностей, которые может генерировать произвольный автомат из замыкания конечной системы автоматов [9, 10].

Оказалось, что многие техники работы с конечными автоматами и регулярными языками для автоматов с магазинной памятью не работают. В частности, было показано, что классы языков, разпозноваемых детерминированными автоматами с магазинной памятью, не равен классу всех контекстно-свободных языков, а является его собственным подмножеством [11, 2]. Тем не менее некоторые продвижения в изучении автоматов с магазинной памятью как функциональных систем есть. В [12] было доказано, что автоматы с магазинной памятью сохраняют периодические последовательности. В [13] была дана оценка на длину выходной последовательность в зависимости от периода входной и характеристик автомата. Оказалось, что в случае, когда магазин представляет собой счетчик (то есть алфавит магазина содержит только один символ), можно существенно понизить оценку на период выходной последовательности [14]. Интересны и другие подходы по изучению периодичных свойств функций и языков. Довольно яркий пример — изучение частотных языков [15, 16].

В данной работе будет показано, что в общем случае существенно понизить оценку, данную в [13], не удается. Работа включает в себя 5 разделов. В разделе 2 формулируются основные определения и обозначения, используемые далее. В следующем разделе приводятся формулировки главной теоремы. Основные примеры и построения приводятся в разделе 4. В конце работы приведено заключение и список используемой литературы.

Определения

Инициальным детерминированным автоматом с магазиной памятью будем называть "девятку"

$$P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\},$$

где A — входной алфавит, Q — конечное множество состояний, B — выходной алфавит, Γ — алфавит памяти (алфавит ленты магазина), $\varphi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to Q$ — функция переходов, $\psi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to B$ — функция выхода, $\eta : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to \Gamma^*$ — функция памяти, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\gamma_0 \in \Gamma^*$ — начальная запись в магазине.

Функционирование P можно определить с помощью системы канонических уравнений, которые задают в каждый момент времени t состояние автомата q(t), записанное в магазине слово $\gamma(t)$, и выход автомата $b(t)$ при подаче на вход $a(t)$:

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ \gamma(0) = \gamma_0, \\ z(t) = LS(\gamma(t)), \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)), \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)), \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)) \end{cases}$$

где $LS : \Gamma^* \to \Gamma \cup \{\lambda\}$ возвращает последний символ при подаче непустого слова и $LS(\lambda) = \lambda$, а $S : \Gamma^* \to \Gamma^*$— стирает последний символ входного слова и $S(\lambda) = \lambda$.

Инициальный автомат с магазинной памятью опеделяет детерминированную функцию $f : A^* \to B^*$. Обозначим $\mathcal{M}(A, B)$ множество детерминированных функций, порождаемых автоматами с магазинной памятью. Отметим, что $\mathcal{M}(A, B)$ содержит множество ограниченно-детерминированных функций.

Обозначим $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max\limits_{(q,z)\in Q\times\Gamma\cup\{\lambda\}} |\eta(q, z)|$ и будем говорить, что $P \in \mathcal{M}(n, m, k)$. Здесь n — число состояний, m — арность магазина, k — максимальное возможная длина записи в магазин за один такт.

Будем говорить, что $P_0 = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$, — инициальный автомат с магазинной памятью без входа, если он удовлетворяет системе канонических уравнений:

$$
\begin{cases}
q(0) = q_0, \\
\gamma(0) = \gamma_0, \\
z(t) = LS(\gamma(t)), \\
q(t + 1) = \varphi(q(t), z(t)), \\
\gamma(t + 1) = S(\gamma(t))\eta(q(t), z(t)), \\
b(t) = \psi(q(t), z(t))
\end{cases}
\tag{3}
$$

В тех же обозначениях $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max\limits_{(q,z)\in Q\times\Gamma\cup\{\lambda\}} |\eta(q, z)|$ и будем говорить, что автомат с магазинной памятью без входа $P_0 \in \mathcal{M}_0(n, m, k)$.

В работе [13] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f : A^* \to B^*$ и $f \in \mathcal{M}(A, B)$. Тогда f преобразует периодические сверхслова в периодические.*

Для автомата с магазинной памятью без входа обозначим $L(P)$ длину периода периодической последовательности, которую он генерирует. Нас будет интересовать максимальная длина периода в классе автоматов $\mathcal{M}_0(n, m, k)$, а именно:

$$L(n, m, k) = \max_{P\in\mathcal{M}_0(n,m,k)} L(P).$$

В работе [13] была дана оценка на функцию $L(n, m, k)$.

Теорема 2. *Пусть $P = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$— автономный автомат с магазинной памятью. Тогда длина периода периодической последовательность, которую P генерирует не больше, чем $\sum\limits_{i=0}^{n(m+1)} k^i$, где $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max\limits_{(q,z)\in Q\times\Gamma\cup\{\lambda\}} |\eta(q, z)|$, то есть*

$$L(n, m, k) \le \sum_{i=0}^{n(m+1)} k^i.$$

Оказывается, что при $|\Gamma| > 1$ существенно эту оценку нельзя понизить. В следующем разделе будут приведены примеры автономных автоматов с магазинной памятью, которые генерируют последовательность с периодом, экспоненциально зависящим от характеристик автомата.

Для оценки длины периода автономного автомата с магазинной памятью удобно пользоваться следующими функциями: $\omega(q, \gamma) : Q \times \Gamma^* \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и $\pi(q, \gamma) : Q \times \Gamma^* \to Q$, которые формально определим следующим образом. Пусть автомат находится в состоянии q, а в магазине лежит слово γ. Если существует такое минимальное положительное количество тактов τ работы автомата, что магазин становится пустым, а автомат переходит в состояние q', то положим, что $\omega(q, z) = \tau$, а $\pi(q, z) = q'$ иначе $\omega(q, z) = \infty$, а значение $\pi(q, z)$ не определено.

Основные результаты

Теорема 3. *При $m > 1$, $k > 1$ и $n \to \infty$*

$$L(n, m, k) \gtrsim \log_m \left(\frac{n}{e \log_m n}\right) \frac{k+1}{k-1} (e(k-1))^{\frac{1}{e}\frac{n}{\ln n}\ln m}.$$

Доказательство основной теоремы

Оценка снизу, приведенная в теореме, будет доказана путем построения примера. Финальное построение описано в примере 4. Остальные примеры приведены для объяснения идей, заложенных в нем.

Пример 1.

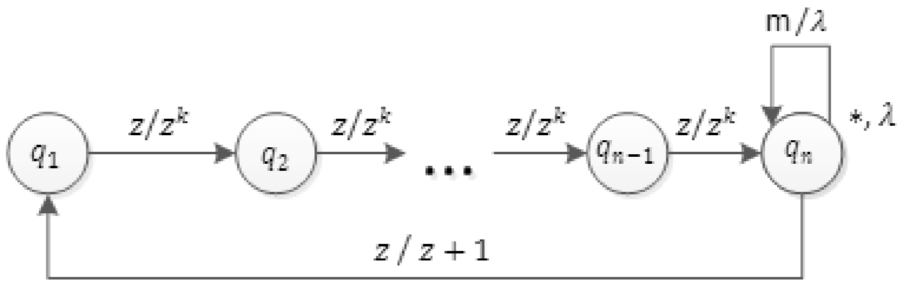
Пусть автономный автомат с магазинной памятью $P_m = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \eta, \psi, q_n, \lambda\} \in \mathcal{M}_0(n, m, k)$, где $B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, ..., q_n\}$, $\Gamma = \{1, ..., m\}$, $m > 1$,

$$\psi(q, z) = \begin{cases} 1, & q = q_n,\ z = \lambda, \\ 0, \end{cases}$$

$$\varphi(q, z) = \begin{cases} q_{i+1}, & q = q_i,\ i \in \{1, ..., n-1\}, \\ q_n, & q = q_n,\ z = m, \\ q_1, & q = q_m,\ z \neq m \end{cases}$$

$$\eta(q, z) = \begin{cases} z^k, & q \neq q_n, \\ \lambda, & q = q_n, z = m, \\ z + 1, & q = q_n,\ z \neq m \end{cases}$$

Ниже приведем диаграмму этого автомата. Переходы автомата описываются следующим шаблоном z/η, то есть из данного состояния, при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту пару (q, z), а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка. Для удобства записи формул будем считать, что пустому значению λ соотвествует значение $z = 0$.



Очевидно, что $\omega(q_n, m) = 1$. Из уравнений следует, что

$$\omega(q_n, m-1) = 1+\omega(q_1, m) = 2+\omega(q_2, m^{(k-1)+1}) = 3+\omega(q_3, m^{2(k-1)+1}) = ... =$$

$$= n + \omega(q_n, m^{(n-1)(k-1)+1}) = n + ((n-1)(k-1)+1)\omega(q_n, m)$$

Аналогично, получаем, что

$$\omega(q_n, i-1) = n + ((n-1)(k-1)+1)\omega(q_n, i),\ i = 1, ..., m$$

Лемма 1. *Пусть дана система уравнений*

$$\begin{cases} x_0 = a + bx_1, \\ x_1 = a + bx_2, \\ ... \\ x_{m-1} = a + bx_m, \\ x_m = c \end{cases}$$

где a, b, c — некоторые действительные параметры, причем $b \neq 1$. Тогда

$$x_0 = a\frac{b^m - 1}{b - 1} + b^m c.$$

Доказательство 1.

$$\begin{aligned} x_0 = a + bx_1 = a + b(a + bx_2) = a + ab + b^2 x_2 = \\ = a + ab + ab^2 + b^3 x_3 = ... = a(1 + b + b^2 + ... + b^{m-1}) + b^m x_m \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда и получаем, что

$$x_0 = a\frac{b^m - 1}{b - 1} + b^m c,$$

что и требовалось доказать.

Применяя лемму к полученной системе ($a = n$, $b = (n-1)(k-1)+1$, $c = 1$), получаем, что

$$\omega(q_n, 0) = \omega(q_n, \lambda) = n\frac{((n-1)(k-1)+1)^m - 1}{(n-1)(k-1)} + ((n-1)(k-1)+1)^m.$$

При $n \to \infty$

$$\omega(q_n, 0) \sim n(n(k-1))^{m-1} + (n(k-1))^n = n^m k(k-1)^{m-1}.$$

Период выходной последовательности равен $\omega(q_n, \lambda) - 1 \sim n^m k(k-1)^{m-1}$ при $n \to \infty$.

Далее во всех остальных примерах будет моделироваться только что рассмотренный автомат с магазинной памятью. Поскольку этот автомат однозначно задается числом состояний n и арностью магазина m, то эти числа будут параметрами в следующих примерах и будут обозначаться n' и m' соотвественно. Поскольку арность магазинов моделирующего и моделируемого автомата не совпадают, то будем использовать символ # для обозначения кода символа. То есть #1, #2,..., #m' — это коды символов магазина моделируемого автомата, записанные в алфавите моделирующего. По умолчанию будем считать, что $m' = m^d$, то есть коды будут словами длины d причем набор кодов будем считать лексикографически упорядоченным. Поскольку автомат стирает за такт последний символ магазина, то коды будут подаваться перевернутыми, то есть упорядочевание по факту будет обратным лексикографическим. Для $m = 2$ и $d' = 3$ коды будут иметь слудующий вид:

#1	111
#2	211
#3	121
#4	221
#5	112
#6	212
#7	122
#8	222

Пример 2.

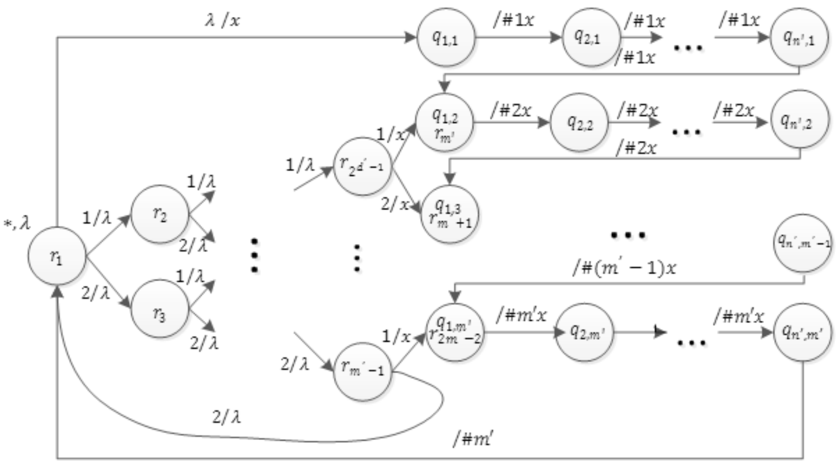
Пусть автономный автомат с магазинной памятью $P(n', m') = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \eta, \psi, z_1, \lambda\} \in \mathcal{M}_0(n, m, k)$, где $m' = 2^{d'}$, $B = \{0, 1\}$, $Q = R \cup Q_1 \cup Q_2 \cup ... \cup Q_{n'}$, $Q_i = \{q_{i,1}, q_{i,2}, ..., q_{i,m'},\}$, $R = \{r_1, r_2, r_3, ..., r_{m'} = q_{1,2}, r_{m'+1} = q_{1,3}, ..., r_{m'+m'-2} = q_{1,m'}, r_{2m'-1} = r_1\}$ (равенство означает, что некоторым состояния было присвоено несколько имен для удобства записи правил перехода), $\Gamma = \{1, 2\}$,

$$\psi(q,z)=\begin{cases}1, & q=z_1,\ z=\lambda,\\ 0,\end{cases}$$

$$\varphi(q,z)=\begin{cases}q_{i+1,j}, & q=q_{i,j},\ i\in\{1,...,n'-1\},\\ q_{1,j+1}, & q=q_{n',j},\ j\in\{1,...,m'-1\},\\ r_1, & q=q_{n',m'},\\ q_{1,1}, & q=r_1,\ z=\lambda,\\ r_{2i}, & q=r_i,\ z=1,\\ r_{2i+1}, & q=r_i,\ z=2\end{cases}$$

$$\eta(q,z)=\begin{cases}\#jx, & q=q_{i,j},\ q\neq q_{n',m'},\ x\in\Gamma,\\ \#m', & q=q_{n',m'},\\ x, & q\in\{r_{2^{d'-1}},r_{2^{d'-1}+1},...,r_{m'-2}\},\\ x, & q=r_{m'-1},\ z=1,\\ \lambda,\end{cases}$$

Ниже приведем диаграмму этого автомата. Переходы автомата описываются следующим шаблоном z/η, то есть из данного состояния, при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту пару (q,z), а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка.



Для оценки длины периода выходной последовательности введем величины переменные ω_i, $i = 0, ..., m'$ и вычислим их:

$$\omega_{m'} = \omega(r_1, \#m') = d',$$

$$\omega_{m'-1} = \omega(r_1, \#(m'-1)) = d' + \omega(q_{1,m'}, x) = d' + 1 + \omega(q_{2,m'}, \#m'x) = ... =$$

$$= d' + n' - 1 + \omega(q_{n',m'}, (\#m')^{n'-1}x) = d' + n' + \omega(r_1, (\#m')^{n'}) =$$

$$= d' + n' + n'\omega(q_{n',m'}, \#m') = d' + n' + n'\omega_{m'} = n' + (n'+1)\omega_{m'}.$$

Заметим, что для $i = 2, ..., m'-1$ выполнено

$$\omega(r_1, (\#i)^{n'+1}) = d + \omega(q_{1,i+1}, (\#i)^{n'}x).$$

Используя это равенство, получаем

$$\omega_{i-1} = \omega(r_1, \#(i-1)) = d' + \omega(q_{1,i}, x) = d' + n' + \omega(q_{1,i+1}, (\#i)^{n'}x) =$$

$$= n' + \omega(r_1, (\#i)^{n'+1}) = n' + (n'+1)\omega(r_1, \#(i-1)) = n' + (n'+1)\omega_i.$$

То есть для $i = 2, ..., m'$ выполнено, что $\omega_{i-1} = n' + (n'+1)\omega_i$ и $\omega_{m'} = d'$.

Последнее равенство немного отличается от предыдущих:

$$\omega_0 = \omega(r_1, \lambda) = 1 + \omega(q_{1,1}, x) = 1 + n' + (n'+1)\omega_1.$$

Поэтому вместо ω_0 добавим в систему

$$\omega_0' = \omega_0 + d - 1 = n' + (n'+1)\omega_1.$$

Применяя лемму к полученной системе ($a = n'$, $b = n'+1$, $c = d'$), получаем, что

$$\omega_0 = 1 - d + \omega_0' = (n'+1)^{m'}(d'+1) - d \sim d'(n'+1)^{m'}$$

при $n \to \infty$.

Учитывая, что $d' = \log_2 m'$ и $|Q| = n = n'm' + m' - 1$ получаем:

$$\omega_0 \sim \log_2 m' \left(\frac{n+1}{m'}\right)^{m'}.$$

Если положить $m' = \frac{n+1}{e}$, находим, что

$$\omega_0 \gtrsim e^{\frac{1}{e}(n+1)} \ln n.$$

Получили, что период выходной последовательности данного автомата с магазинной памятью ассимптотически не меньше $e^{\frac{1}{e}(n+1)} \ln n$.

В разобранном выше примере с ростом числа состояний происходит рост длины слов, пишущихся в магазин. В следующем примере зафиксируем $k > 1$ — максимальную длину слова, которое автомат может записать в магазин за один такт работы.

Пример 3.

Модифицируем предыдущей пример таким образом, чтобы получить экспоненциальную от характеристик автомата оценку на период выходного слова для автомата с фиксированными параметрами n и k. Воспользуемся следующей идеей. С ростом числа состояний будет расти и длина кодов d'. Значит, что с некоторого момента для того, чтобы записать один код, нам потребуется использовать $s = \lceil \frac{d'}{k-1} \rceil$ состояний, каждое из которых будет писать в магазин некоторый фрагмент кода, то есть $\#j = \#_1 j \#_2 j ... \#_s j$. Запишем работу автомата более формально.

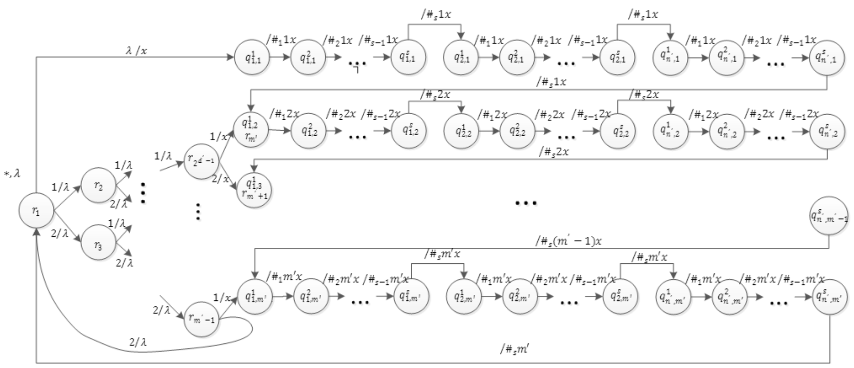
Рассмотрим автономный автомат с магазинной памятью $P(n', m', k) = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \eta, \psi, q_{n',m'}, \lambda\} \in \mathcal{M}_0(n, m, k)$, где $m' = 2^{d'}$, $B = \{0, 1\}$, $Q = R \cup Q_1 \cup Q_2 \cup ... \cup Q_{n'}$, $Q_i = \{q^l_{i,j} | j \in \{1, 2, ..., m'\},\ l \in \{1, 2, ..., s\}\}$, $R = \{r_1, r_2, r_3, ..., r_{m'} = q_{1,2}, r_{m'+1} = q_{1,3}, ..., r_{m'+m'-2} = q_{1,m'}, r_{2m'-1} = r_1\}$ (равенство означает, что некоторым состояния было присвоено несколько имен для удобства записи правил перехода), $\Gamma = \{1, 2\}$,

$$\psi(q, z) = \begin{cases} 1, & q = z_1,\ z = \lambda, \\ 0, \end{cases}$$

$$\varphi(q, z) = \begin{cases} q^{l+1}_{i,j}, & q = q^l_{i,j},\ l \neq s, \\ q^1_{i+1,j}, & q = q^s_{i,j},\ i \in \{1, ..., n'-1\}, \\ q^1_{1,j+1}, & q = q^s_{n',j},\ j \in \{1, ..., m'-1\}, \\ r_1, & q = q^s_{n',m'}, \\ q^1_{1,1}, & q = r_1,\ z = \lambda, \\ r_{2i}, & q = r_i,\ z = 1, \\ r_{2i+1}, & q = r_i,\ z = 2 \end{cases}$$

$$\eta(q,z)=\begin{cases}\#_l jx, & q=q^l_{i,j},\ q\neq q^s_{n',m'},\ x\in\Gamma,\\ \#_s m', & q=q^s_{n',m'},\\ x, & q\in\{r_{2^{d'-1}},r_{2^{d'-1}+1},...,r_{m'-2}\},\\ x, & q=r_{m'-1},\ z=1,\\ \lambda, & \end{cases}$$

Ниже приведем диаграмму этого автомата. Переходы автомата описываются следующим шаблоном z/η, то есть из данного состояния, при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту пару (q,z), а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка.



Для оценки длины периода выходной последовательности введем величины переменные ω_i, $i=0,...,m'$ и вычислим их:

$$\omega_{m'}=\omega(r_1,\#m')=d',$$

$$\omega_{m'-1}=\omega(r_1,\#(m'-1))=d'+\omega(q_{1,m'},x)=d'+s+\omega(q_{2,m'},\#m'x)=...=$$

$$=d'+s(n'-1)+\omega(q_{n',m'},(\#m')^{n'-1}x)=d'+sn'+\omega(r_1,(\#m')^{n'})=$$

$$=d'+sn'+n'\omega(q_{n',m'},\#m')=d'+sn'+n'\omega_{m'}=sn'+(n'+1)\omega_{m'}.$$

Заметим, что для $i=2,...,m'-1$ выполнено

$$\omega(r_1,(\#i)^{n'+1})=d+\omega(q_{1,i+1},(\#i)^{n'}x).$$

Используя это равенство, получаем

$$\omega_{i-1} = \omega(r_1, \#(i-1)) = d' + \omega(q_{1,i}, x) = d' + sn' + \omega(q_{1,i+1}, (\#i)^{n'}x) =$$

$$= sn' + \omega(r_1, (\#i)^{n'+1}) = sn' + (n'+1)\omega(r_1, \#(i-1)) = sn' + (n'+1)\omega_i.$$

То есть для $i = 2, ..., m'$ выполнено, что $\omega_{i-1} = sn' + (n'+1)\omega_i$ и $\omega_{m'} = d'$.

Последнее равенство немного отличается от предыдущих:

$$\omega_0 = \omega(r_1, \lambda) = 1 + \omega(q_{1,1}, x) = 1 + sn' + (n'+1)\omega_1.$$

Поэтому вместо ω_0 добавим в систему

$$\omega_0' = \omega_0 + d - 1 = sn' + (n'+1)\omega_1.$$

Применяя лемму к полученной системе ($a = sn'$, $b = n'+1$, $c = d'$), получаем, что

$$\omega_0 = 1 - d + \omega_0' = (n'+1)^{m'}(d'+s) - d'.$$

Учитывая, что $d' = \log_2 m'$, $|Q| = n = sn'm' + m' - 1$ и $s = \lceil \frac{d'}{k-1} \rceil$ получаем

$$\omega_0 = \left(\frac{n+1+(s-1)m'}{sm'}\right)^{m'} \left(\log_2 m' + \lceil \frac{\log_2 m'}{k-1} \rceil\right) -$$

$$- \log_2 m' \gtrsim \log_2 m' \frac{k+1}{k-1} \left(\frac{n(k-1)}{m' \log_2 m'}\right)^{m'}.$$

Если положить $m' = \frac{n}{e \log_2 n}$, получаем, что

$$\omega_0 \gtrsim \log_2 \left(\frac{n}{e \log_2 n}\right) \frac{k+1}{k-1} (e(k-1))^{\frac{1}{e} \frac{n}{\log_2 n}}.$$

Получили, что период выходной последовательности данного автомата с магазинной памятью ассимптотически не меньше $\log_2 \left(\frac{n}{e \log_2 n}\right) \frac{k+1}{k-1} (e(k-1))^{\frac{1}{e} \frac{n}{\log_2 n}}$.

Во всех предыдущих примерах рассматривались автоматы с $|\Gamma| = 2$. Перейдем к рассмотрению общего случая $|\Gamma| = m > 1$.

Пример 4.

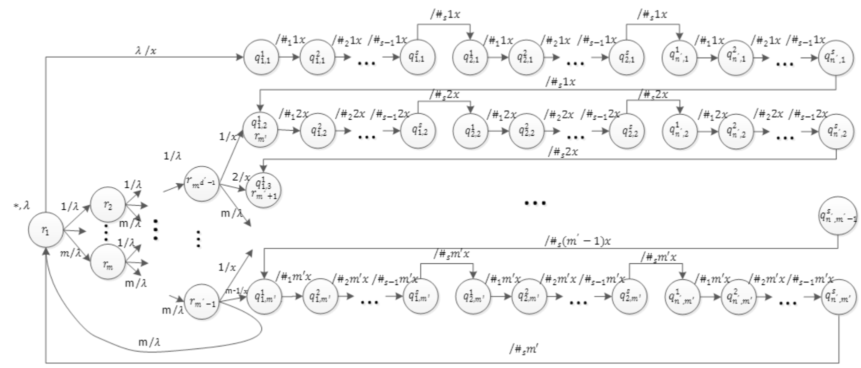
Рассмотрим автономный автомат с магазинной памятью $P(n', m', k, m) = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \eta, \psi, q_{n',m'}, \lambda\} \in \mathcal{M}_0(n, m, k)$, где $m' = m^{d'}$, $B = \{0, 1\}$, $Q = R \cup Q_1 \cup Q_2 \cup ... \cup Q_{n'}$, $Q_i = \{q^l_{i,j} | j \in \{1, 2, ..., m'\}, \ l \in \{1, 2, ..., s\}\}$, $R = \{r_1, r_2, r_3, ..., r_{m'} = q_{1,2}, r_{m'+1} = q_{1,3}, ..., r_{m'+m'-2} = q_{1,m'}, r_{2m'-1} = r_1\}$ (равенство означает, что некоторым состояния было присвоено несколько имен для удобства записи правил перехода), $\Gamma = \{1, 2, ..., m\}$,

$$\psi(q, z) = \begin{cases} 1, & q = z_1, \ z = \lambda, \\ 0, \end{cases}$$

$$\varphi(q, z) = \begin{cases} q^{l+1}_{i,j}, & q = q^l_{i,j}, \ l \neq s, \\ q^1_{i+1,j}, & q = q^s_{i,j}, \ i \in \{1, ..., n' - 1\}, \\ q^1_{1,j+1}, & q = q^s_{n',j}, \ j \in \{1, ..., m' - 1\}, \\ r_1, & q = q^s_{n',m'}, \\ q^1_{1,1}, & q = r_1, \ z = \lambda, \\ r_{2i+z-1}, & q = r_i \end{cases}$$

$$\eta(q, z) = \begin{cases} \#_l jx, & q = q^l_{i,j}, \ q \neq q^s_{n',m'}, \ x \in \Gamma, \\ \#_s m', & q = q^s_{n',m'}, \\ x, & q \in \{r_{m^{d'-1}}, r_{m^{d'-1}+1}, ..., r_{m'-2}\}, \\ x, & q = r_{m'-1}, \ z \neq m, \\ \lambda, \end{cases}$$

Ниже приведем диаграмму этого автомата. Переходы автомата описываются следующим шаблоном z/η, то есть из данного состояния, при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту пару (q, z), а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка.



Для оценки длины периода выходной последовательности введем величины переменные ω_i, $i = 0, ..., m'$ и вычислим их:

$$\omega_{m'} = \omega(r_1, \#m') = d',$$

$$\omega_{m'-1} = \omega(r_1, \#(m'-1)) = d' + \omega(q_{1,m'}, x) = d' + s + \omega(q_{2,m'}, \#m'x) = ... =$$

$$= d' + s(n'-1) + \omega(q_{n',m'}, (\#m')^{n'-1}x) = d' + sn' + \omega(r_1, (\#m')^{n'}) =$$

$$= d' + sn' + n'\omega(q_{n',m'}, \#m') = d' + sn' + n'\omega_{m'} = sn' + (n'+1)\omega_{m'}.$$

Заметим, что для $i = 2, ..., m' - 1$ выполнено

$$\omega(r_1, (\#i)^{n'+1}) = d + \omega(q_{1,i+1}, (\#i)^{n'}x).$$

Используя это равенство, получаем

$$\omega_{i-1} = \omega(r_1, \#(i-1)) = d' + \omega(q_{1,i}, x) = d' + sn' + \omega(q_{1,i+1}, (\#i)^{n'}x) =$$

$$= sn' + \omega(r_1, (\#i)^{n'+1}) = sn' + (n'+1)\omega(r_1, \#(i-1)) = sn' + (n'+1)\omega_i.$$

То есть для $i = 2, ..., m'$ выполнено, что $\omega_{i-1} = sn' + (n'+1)\omega_i$ и $\omega_{m'} = d'$.

Последнее равенство немного отличается от предыдущих:

$$\omega_0 = \omega(r_1, \lambda) = 1 + \omega(q_{1,1}, x) = 1 + sn' + (n'+1)\omega_1.$$

Поэтому вместо ω_0 добавим в систему

$$\omega_0' = \omega_0 + d' - 1 = sn' + (n'+1)\omega_1.$$

Применяя лемму к полученной системе ($a = sn'$, $b = n'+1$, $c = d'$), получаем, что

$$\omega_0 = 1 - d' + \omega_0' = (n'+1)^{m'}(d'+s) - d'.$$

Учитывая, что $d' = \log_m m'$, $|Q| = n = sn'm' + m' - 1$ и $s = \lceil \frac{d'}{k-1} \rceil$ получаем

$$\omega_0 = \left(\frac{n+1+(s-1)m'}{sm'}\right)^{m'} \left(\log_m m' + \lceil \frac{\log_m m'}{k-1} \rceil\right) -$$

$$- \log_m m' \gtrsim \log_m m' \frac{k+1}{k-1} \left(\frac{n(k-1)}{m' \log_m m'}\right)^{m'}.$$

Если положить $m' = \frac{n}{e \log_m n}$, получаем, что

$$\omega_0 \gtrsim \log_m \left(\frac{n}{e \log_m n}\right) \frac{k+1}{k-1} (e(k-1))^{\frac{1}{e}\frac{n}{\log_m n}} =$$

$$= \log_m \left(\frac{n}{e \log_m n}\right) \frac{k+1}{k-1} (e(k-1))^{\frac{1}{e}\frac{n}{\ln n}\ln m}.$$

Получили, что период выходной последовательности данного автомата с магазинной памятью ассимптотически не меньше $\log_m \left(\frac{n}{e \log_m n}\right) \frac{k+1}{k-1} (e(k-1))^{\frac{1}{e}\frac{n}{\log_m n}}$.

Заключение

Основным результатом данной работы является построение примеров автономных автоматов с магазинной памятью, которые генерируют последовательности, периоды которых экспоненциально зависят от характеристик автомата. Этот результат показывает, что периодические свойства автоматов с однобуквенным магазином существенно отличаются от свойств автоматов, внутренние алфавиты которых содержат хотя бы два символа.

Список литературы

[1] Oettinger A., Automatic syntatic analysis and the pushdown store, в сб. Structure of Language and its Mathematical Concepts, Proc. 12th Symposium on Applied Mathematics, 1961, 104-129.

[2] Schutzenberger M. P., On contex-free languages and pushdown automata, Inforc and contril, 6:3, 1963, 246-264.

[3] Chomsky N., Context-free gtammars and pushdown storage, Quarlerly Progress Report, № 65, Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambrig, Mass, 1962.

[4] Evey R.J., Applications of pushdown-store machines, Proc. AFIPS Fall Joint Computer Conference, 24, 1963, 215-227.

[5] Bar-Hillel Y., Perles M., Shamir E., On formal properties of simple phrase structure grammars. Z. Phonctik, Sprachwissensch. Kommunikationsforsch. 14, 1961, 143-172

[6] Ginsburg S., Rose G.F., Some recursively unsolvable problems in ALGOL-like languages, J. Assoc. Computing Machinety, 10, 1963, 175-195.

[7] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.:Наука, 1985.

[8] Бабин Д. Н. О полноте двухместных автоматных функций относительно суперпозиции. Дискретная математика. том 1, 4, 1989, 423-431.

[9] Летуновский А.А. Цикловые индексы автомата. Дискретная математика, том 25, 4, 24-29.

[10] А.А. Летуновский, Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции, Интеллектуальные системы, том 19, 1, 2015, 161-170.

[11] Ginsburg S., Greibach S., Deterministic context free languages, Information and Control, Volume 9, Issue 6, 1966, 620-648.

[12] Иванов И.Е. Некоторые классы функций, вычислимые автоматами. Интеллектуальные системы, том 15, вып. 1, 2014, 361-378.

[13] Иванов И.Е. О некоторых свойствах автоматов с магазинной памятью. Интеллектуальные системы, том 18, вып. 1, 2014, 243-251.

[14] Иванов И.Е. О некоторых свойствах автоматов с магазинной памятью. Интеллектуальные системы, том 19, вып. 1, 2015, 145-159.

[15] А.А. Петюшко, О контекстно-свободных биграммных языках, Интеллектуальные системы, том 19, 2, 2015, 187-208.

[16] Д.Н. Бабин, Частотные регулярные языки, Интеллектуальные системы, том 18, 1,2014, 205-210.

Lower estimate for max period of realtime pushdown automaton output

I. E. Ivanov

Earlier the author proved that realtime pushdown automaton function saves the set of periodic sequences and found exponential estimate for the period of output. For realtime one-counter transducer this estimate may be reduced to quadratic. In this paper the author found lower exponential estimate for the period of output if stack alphabet contains at least two symbols.

Keywords: realtime pushdown automaton, deterministic function, periodic sequences.