О контекстно-свободных биграммных языках

А. А. Петюшко

В статье рассматриваются языки в алфавите $\{a_1, \dots, a_n\}$, в словах которых зафиксирована доля всех последовательных пар $a_i a_j$. Эта доля описывается порождающей матрицей языка Θ. Автор назвал такие языки биграммными. Подобным свойством обладают естественные языки. Оказывается, что свойства таких языков быть пустыми, конечными, регулярными, контекстно-свободными или контекстно-зависимыми проверяемы по матрице Θ. В данной работе подробно рассматривается вопрос бесконечных контекстно-свободных языков.

Ключевые слова: биграмма, матрица кратностей биграмм, биграммный язык, контекстно-свободный язык, ориентированный граф, эйлеров граф.

1. Необходимые определения

Пусть A ($|A| = n < \infty$) — конечный алфавит. Пронумеруем все буквы алфавита $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и зафиксируем эту нумерацию.

Определение 1. Биграммой в алфавите A называется двухбуквенное слово $a_i a_j, 1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Определение 2. Назовем **кратностью биграммы** $a_i a_j$ в слове α и обозначим через $\theta_{a_i a_j}(\alpha)$, где $\alpha \in A^*$, отображение $\theta_{a_i a_j} : A^* \to N \cup \{0\}$, которое определяется как количество различных разложений слова α в виде $\alpha = \alpha' a_i a_j \alpha''$ ($\alpha', \alpha'' \in A^*$). При $|\alpha| < 2$ значение $\theta_{a_i a_j}(\alpha)$ положим равным 0 по определению.

С учетом введенных определений, по каждому слову $\alpha \in A^*$ можно построить квадратную **матрицу биграмм** $(\Theta(\alpha))_{i,j=1}^n$ размера $n \times n$ такую, что на месте (i, j) матрицы будет стоять значение $\theta_{a_i a_j}(\alpha)$.

Обозначим через Ξ множество квадратных матриц размера $|A| \times |A|$, каждый элемент которых является целым неотрицательным числом. Таким образом, $\forall \alpha \in A^*$ имеем $\Theta(\alpha) \in \Xi$. Также, здесь и далее через $\Theta(\alpha)$ будем обозначать матрицу биграмм, построенную по конкретному слову α, а через Θ — просто некоторую матрицу из Ξ, при этом будем считать, что на месте (i, j) матрицы Θ будет стоять значение $\theta_{a_i a_j}$.

Определение 3. Назовем **биграммным языком** $L(\Theta)$, порожденным матрицей $\Theta \in \Xi$, множество всех слов, имеющих одну и ту же матрицу кратностей биграмм Θ, то есть $L(\Theta) = \{\beta \in A^* | \Theta(\beta) = \Theta\}$.

Пример. Пусть $A = \{0, 1\}$, $\alpha = 01011100$.
Тогда матрица биграмм $\Theta(\alpha) = \begin{pmatrix} \theta_{00}(\alpha) & \theta_{01}(\alpha) \\ \theta_{10}(\alpha) & \theta_{11}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Построим по произвольной матрице $\Theta \in \Xi$ (например, по $\Theta(\alpha)$ для некоторого α) ориентированный граф G_Θ на плоскости. Вершинами у этого графа будут все буквы из алфавита A, при этом ребра будут соответствовать биграммам с учетом их кратностей, то есть кратность $\theta_{a_i a_j}$ будет порождать $\theta_{a_i a_j}$ ориентированных ребер $a_i \to a_j$ при $i \neq j$. Аналогично, кратность $\theta_{a_i a_i}$ будет порождать $\theta_{a_i a_i}$ петель $a_i \to a_i$.

Пример. $A = \{0, 1\}$, $\alpha = 01011100$.
$\Theta(\alpha) = \begin{pmatrix} \theta_{00}(\alpha) & \theta_{01}(\alpha) \\ \theta_{10}(\alpha) & \theta_{11}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Построим граф $G_{\Theta(\alpha)}$ по $\Theta(\alpha)$ — см. рис. 1.

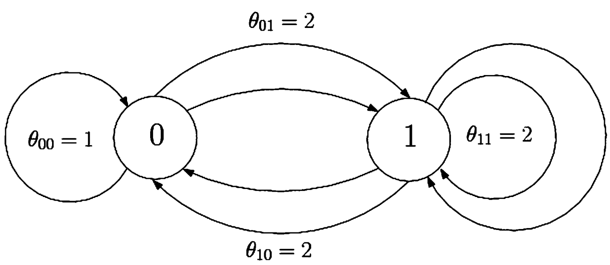

Рис. 1. Граф $G_{\Theta(\alpha)}$, построенный по матрице $\Theta(\alpha)$.

Напомним несколько широко известных понятий, касающихся эйлеровых путей.

Путем в ориентированном графе называется такая последовательность ребер этого графа, что конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего. **Циклом** в ориентированном графе называется такой путь, что начало первого ребра в этом пути совпадает с концом последнего. **Простым циклом** в ориентированном графе называется цикл без самопересечений. **Элементарным циклом** в ориентированном графе называется простой цикл без параллельных ребер. **Эйлеровым путем** в ориентированном графе называется такой путь, который содержит все ребра этого графа. **Эйлеровым циклом** в ориентированном графе называется такой цикл, который содержит все ребра этого графа. **Полуэйлеров граф** — граф, содержащий эйлеров путь, который не является эйлеровым циклом. **Эйлеров граф** — граф, содержащий эйлеров цикл. Вершина в ориентированном графе называется **изолированной**, если она не является концом или началом ни для одного ребра этого графа.

В [1] доказаны две следующие важные теоремы, позволяющие достаточно просто проверять ориентированные графы на наличие эйлеровых путей и циклов:

Теорема 1. *Ориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) Все неизолированные вершины лежат в одной компоненте связности соответствующего неориентированного графа; 2) У всех вершин количество входящих ребер равно количеству исходящих ребер.*

Теорема 2. *Ориентированный граф является полуэйлеровым тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) Все неизолированные вершины лежат в одной компоненте связности соответствующего неориентированного графа; 2) У всех вершин, кроме двух, количество входящих ребер равно количеству исходящих ребер. У оставшихся двух вершин разность количества входящих ребер и количества исходящих ребер равна* $+1$ *и* -1 *соответственно.*

Более интересен случай, когда мы рассматриваем матрицу кратностей биграмм не как абсолютное ограничение, а как задание относительных значений (пропорций) биграмм, то есть случай языка, в котором отношения $\theta_{ab}(\alpha)/\theta_{cd}(\alpha)$ зависят только от букв $a, b, c, d \in A$, $\theta_{cd}(\alpha) > 0$, но не зависят от слова α из этого языка. Определим такой язык.

Определение 4. Назовем частотным биграммным языком, заданным матрицей биграмм $\Theta \in \Xi$, следующий язык при $k \in N$:

$$F_\Theta = \bigcup_{k=1}^{\infty} L(k\Theta),$$

то есть язык, состоящий из всех таких слов β, что набор кратностей этих слов $\Theta(\beta)$ кратен набору Θ, а именно $F_\Theta = \{\beta \in A^* | \exists k \in N, \Theta(\beta) = k\Theta\}$, где умножение k на Θ понимается как умножение скаляра на матрицу.

2. Контекстно-свободные биграммные языки

В статье [2] частотные биграммные языки были исследованы на конечность и регулярность. В данной работе рассматривается вопрос о принадлежности этих языков к классу контекстно-свободных.

Следующую лемму оставим без доказательства в силу его тривиальности.

Лемма 1. *В любом цикле на ориентированном графе всегда содержится хотя бы один элементарный цикл.*

Определим операцию вычитания на графах.

Определение 5. Разностью двух ориентированных графов G_{Θ_1} и G_{Θ_2}, которым взаимно-однозначно соответствуют такие матрицы кратностей биграмм Θ_1 и Θ_2, что для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$ справедливо $\theta_{1a_ia_j} \geqslant \theta_{2a_ia_j}$, называется такой граф G, которому соответствует матрица кратностей биграмм $\Theta = \Theta_1 - \Theta_2$. Обозначим такую операцию через $G = G_{\Theta_1} \setminus G_{\Theta_2}$.

Замечание. Легко заметить, что разность двух эйлеровых графов (для которых эта операция определена) будет одним из перечисленных вариантов: а) эйлеровым графом; б) графом, в котором более одной компоненты связности ребер, каждая из которых представляет собой эйлеров граф; в) графом без ребер.

Определение 6. Обобщенной разностью двух ориентированных графов G_{Θ_1} и G_{Θ_2}, которым взаимно-однозначно соответствуют такие матрицы кратностей биграмм Θ_1 и Θ_2, что для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$

справедливо $\theta_{1a_ia_j} \geqslant \theta_{2a_ia_j}$, называется такой граф G, которому соответствует матрица кратностей биграмм $\Theta = \Theta_1 - k\Theta_2$, $k \in N$, при этом операция разности для графов G_{Θ_1} и $G_{k\Theta_2}$ еще определена, а для G_{Θ_1} и $G_{(k+1)\Theta_2}$ — уже нет. Обозначим такую операцию через $G = G_{\Theta_1} \div G_{\Theta_2}$.

Далее нам потребуется следующее важное утверждение относительно разбиения эйлерова графа на эйлеровы же подграфы.

Определение 7. Назовем N ненулевых матриц $\Theta_1, \ldots, \Theta_N$ из Ξ **линейно независимыми**, если не существует действительных коэффициентов $c_1, \ldots, c_N \in R, (c_1, \ldots, c_N) \neq (0, \ldots, 0)$, таких, что верно $\sum_{i=1}^{N} c_i\Theta_i = O$, где O — нулевая матрица из Ξ. Назовем N эйлеровых графов, заданных ненулевыми матрицами кратностей биграмм $\Theta_1, \ldots, \Theta_N$ из Ξ, **независимыми**, если матрицы кратностей биграмм $\Theta_1, \ldots, \Theta_N$ линейно независимы.

Следующую теорему, несмотря на условия в терминах матрицы кратностей биграмм, будем рассматривать как теорему с условиями на эйлеровы графы. Нам необходимо будет показать, что если эйлеров граф разбивается в сумму трех независимых эйлеровых графов (с учетом того, что для некоторого элементарного цикла обощенная разность исходного эйлерова графа с ним будет разлагаться в сумму двух независимых эйлеровых графов), то существует такое разбиение в сумму трех эйлеровых графов, что два из них будут иметь уникальные (то есть такие, каких нет у двух других) ориентированные ребра.

Теорема 3. *Пусть матрица кратностей биграмм $\Theta \in \Xi$, задающая эйлеров граф, разлагается в сумму трех линейно независимых матриц $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3$, причем каждая из матриц $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \in \Xi$ также задает эйлеров граф. Также известно, что существует такой элементарный эйлеров цикл G_{Θ_0} с матрицей кратностей биграмм Θ_0, что обобщенная разность $G_\Theta \div G_{\Theta_0}$ соответствует матрице кратностей биграмм, которая разлагается в сумму 2 линейно независимых матриц кратностей биграмм, задающих эйлеровы циклы. Тогда существуют такие ненулевые матрицы кратностей биграмм $\Theta'_1, \Theta'_2, \Theta'_3 \in \Xi$, задающие эйлеровы графы, что $\Theta = \Theta'_1 + \Theta'_2 + \Theta'_3$, и при этом существуют такие индексы $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$, что $\theta'_{1a_ia_j} > 0, \theta'_{2a_ia_j} = \theta'_{3a_ia_j} = 0$ и $\theta'_{2a_ka_l} > 0, \theta'_{1a_ka_l} = \theta'_{3a_ka_l} = 0$.*

Доказательство. Возьмем в графе G_Θ такой элементарный цикл G_{Θ_0} с матрицей кратностей биграмм Θ_0, что обобщенная разность

$G_\Theta \div G_{\Theta_0}$ соответствует матрице кратностей биграмм, которая разлагается в сумму 2 линейно независимых эйлеровых циклов. Это можно сделать по условию теоремы.

Обозначим через $G^1 = G_\Theta \div G_{\Theta_0}$, при этом будем считать, что для некоторого $k \in N$ операция разности для графов G_Θ и $G_{k\Theta_0}$ еще определена, а для G_Θ и $G_{(k+1)\Theta_0}$ — уже нет.

По построению, так как не можем больше вычитать G_{Θ_0} из G_Θ, то в G_{Θ_0} есть уникальное ребро, которого нет в G^1. Также очевидно, что в G^1 есть уникальное ребро, которого нет в G_{Θ_0}, поскольку в противном случае G^1 был бы эйлеровым циклом в графе G_{Θ_0}, который сам является элементарным, то есть $G^1 = G_{l\Theta_0}$ для некоторого натурального l, и, следовательно, результат $G_\Theta \div G_{\Theta_0}$ был бы графом без ребер, что противоречит рассматриваемому случаю.

Если G^1 состоит из нескольких (не меньше двух) компонент связности ребер, каждая из которых представляет собой ориентированный цикл, то можем удовлетворить утверждению теоремы следующим образом. Пусть $G_1^1, \ldots, G_m^1$, $m \geqslant 2$ — компоненты связности в G^1, а их матрицы биграмм соответственно равны $\Theta_1^1, \ldots, \Theta_m^1$. По построению, в G_{Θ_0} есть уникальное ребро, которого нет в G^1 (и, следовательно, в любом из $G_1^1, \ldots, G_m^1$). Также в G^1 есть уникальное ребро, которого нет в G_{Θ_0}. Пусть это уникальное ребро из G^1 содержится в некоторой компоненте $G_{i_1}^1$ для некоторого $1 \leqslant i_1 \leqslant m$ (и при этом очевидно не содержится в остальных компонентах). Выделим также некоторую компоненту с графом $G_{i_2}^1$, $1 \leqslant i_2 \leqslant m, i_2 \neq i_1$. Тогда полагая $\Theta_1' = k\Theta_0 + \sum_{j=1, j\notin\{i_1,i_2\}}^m \Theta_j^1$, $\Theta_2' = \Theta_{i_1}^1$, $\Theta_3' = \Theta_{i_2}^1$, и учитывая, что в $G_{\Theta_1'}$ и в $G_{\Theta_2'}$ будут уникальные ребра, при этом все три графа $G_{\Theta_1'}$, $G_{\Theta_2'}$ и $G_{\Theta_3'}$ состоят из одной компоненты связности ($G_{\Theta_2'}$ и $G_{\Theta_3'}$ — по построению, $G_{\Theta_1'}$ — так как компоненты связности $G_1^1, \ldots, G_m^1$ возникли из-за того, что мы удалили уникальные ребра $G_{k\Theta_0}$ из изначального односвязного G_Θ, и при присоединении этих ребер обратно к любому подмножеству полученных обособленных компонент связности мы всегда получим одну компоненту связности) и являются эйлеровыми (см. замечание к определению разности для эйлеровых графов), получим утверждение теоремы.

Таким образом, осталось рассмотреть случай односвязного непустого графа G^1. В G^1 есть как минимум одно уникальное ребро, которого нет в G_{Θ_0}. Обозначим все эти уникальные ребра из G^1 как

$e_1, \ldots, e_r$ (параллельные ребра будем считать за одно), где $r \geqslant 1$ — их количество. Рассмотрим теперь два случая.

1) Если существует элементарный цикл в G^1 — обозначим соответствующий этому циклу граф через G^2 с матрицей биграмм Θ^2 — который не содержит хотя бы одно ребро из множества $\{e_1, \ldots, e_r\}$ (пусть этим ребром будет $e_i, 1 \leqslant i \leqslant r$), то в случае односвязного графа $G^3 = G^1 \setminus G^2$ с матрицей биграмм Θ^3 мы получим утверждение теоремы, если в качестве новых трех матриц биграмм возьмем: $\Theta'_1 = k\Theta_0$ (в $G_{\Theta'_1}$ есть уникальные ребра по построению), $\Theta'_2 = \Theta^3$ ($G_{\Theta'_2}$ односвязен и содержит уникальное ребро e_i), $\Theta'_3 = \Theta^2$ ($G_{\Theta'_3}$ — элементарный цикл). В случае же многосвязного графа G^3 пусть компонента связности, содержащая e_i, задается графом G^3_0 с матрицей биграмм Θ^3_0. Тогда в качестве новых трех матриц биграмм возьмем: $\Theta'_1 = k\Theta_0$ (в $G_{\Theta'_1}$ есть уникальные ребра по построению), $\Theta'_2 = \Theta^3_0$ ($G_{\Theta'_2}$ содержит уникальное ребро e_i), $\Theta'_3 = \Theta - k\Theta_0 - \Theta^3_0$ (поскольку граф $G_{\Theta'_3} = G^1 \setminus G^3_0$ является односвязным и эйлеровым по тем же причинам, что и $G_{\Theta'_1}$ в случае с многосвязным G^1).

2) Любой элементарный цикл в G^1 содержит в обязательном порядке все уникальные ребра $e_1, \ldots, e_r$.

Пусть существуют 2 элементарных цикла C_1, C_2 в G^1, заданные последовательностью ребер:

$$C_1 = e_{i_1}\delta_1 e_{i_2}\delta_2 \ldots e_{i_r}\delta_r,$$
$$C_2 = e_{i_1}\sigma_1 e_{g(i_2)}\sigma_2 \ldots e_{g(i_r)}\sigma_r,$$

где буквами $\delta_1, \ldots, \delta_r, \sigma_1, \ldots, \sigma_r$ обозначаются последовательности ребер (возможно, пустые), которые одновременно принадлежат и G^1 и G_{Θ_0}, множества $\{2, \ldots, r\}$ и $\{i_2, \ldots, i_r\}$ совпадают, $g : \{2, \ldots, r\} \mapsto \{2, \ldots, r\}$ — биекция множества $\{2, \ldots, r\}$ на себя.

Докажем, что биекция g является тождественным оператором (то есть в циклах C_1 и C_2 уникальные ребра $e_1, \ldots, e_r$ следуют в одном и том же порядке). В противном случае существует натуральные $p, q \in [2, r]$ такие, что $p < q$, и $i_p = g(i_q)$. Тогда в G^1 содержится цикл

$$C_3 = e_{i_1}\delta_1 \ldots e_{i_p}\sigma_q e_{g(i_{q+1})}\sigma_{q+1} \ldots e_{g(i_r)}\sigma_r.$$

В этом цикле всего различных уникальных ребер из начального множества $\{e_1, \ldots, e_r\}$ меньше чем $p + (r - q) < r$. Значит, в цикле C_3

нет хотя бы одного ребра из множества $\{e_1, \ldots, e_r\}$, а в любом элементарном, содержащемся в нем, не будет также этого ребра. Значит, получаем противоречие с условием данного пункта 2).

Таким образом, g — тождественный оператор и $C_2 = e_{i_1}\sigma_1 e_{i_2}\sigma_2 \ldots e_{i_r}\sigma_r$.

Рассмотрим, например, элементарный цикл C_1. В нем между ребрами из множества $\{e_1, \ldots, e_r\}$ лежат последовательности ребер (возможно, пустые), которые принадлежат элементарному циклу G_{Θ_0}. Рассмотрим, например, последовательность δ_1 между e_{i_1} и e_{i_2}. Если вершина, соответствующая концу ребра e_{i_1}, не принадлежит циклу G_{Θ_0}, то тогда единственная возможность — вершина, соответствующая началу ребра e_{i_2}, совпадает с вершиной, соответствующей концу ребра e_{i_1}, а также последовательность δ_1 — пустая. Также δ_1 будет пустой, если вершина, соответствующая началу ребра e_{i_2}, совпадает с вершиной, соответствующей концу ребра e_{i_1}, хотя и принадлежащей циклу G_{Θ_0} (поскольку иной возможный случай объединить e_{i_1} и e_{i_2} — это весь полный элементарный цикл G_{Θ_0}, но в таком случае получим цикл с самопересечениями, в то время как C_1 — элементарный). Если же вершины, соответствующие началу ребра e_{i_2} и концу ребра e_{i_1}, различны и обе принадлежат циклу G_{Θ_0}, то для получения элементарного (и соответственно без самопересечений) цикла C_1 мы имеем единственную возможность выбрать последовательность ребер δ_1 из G_{Θ_0}.

Таким образом, для любого $1 \leqslant i \leqslant r$ последовательность ребер δ_i определяется единственным образом. Значит, поскольку порядок уникальных ребер из множества $\{e_1, \ldots, e_r\}$ в C_1 и C_2 — одинаков, одинаковы и последовательности соединяющих их ребер: $\delta_1 = \sigma_1, \ldots, \delta_r = \sigma_r$. Значит, и элементарные циклы C_1 и C_2 полностью совпадают.

Получаем, что для данного пункта 2) G^1 — это простой (повторенный не менее одного раза элементарный) цикл. Это противоречит тому, что матрица $\Theta - k\Theta_0$ (соответствующая графу G^1) разлагается в сумму 2 линейно независимых эйлеровых циклов.

В итоге, мы всегда можем разбить исходный граф на три эйлеровых графа с указанными в условии теоремы свойствами на соответствующие матрицы кратностей биграмм, откуда и следует утверждение теоремы.

Лемма 2. *Пусть матрица кратностей биграмм* $\Theta \in \Xi$, *задающая эйлеров граф, разлагается в сумму трех ненулевых матриц* $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3$, *причем каждая из матриц* $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \in \Xi$ *также задает эйлеров граф. При этом существуют такие индексы* $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$, *что* $\theta_{1a_ia_j} > 0$, $\theta_{2a_ia_j} = \theta_{3a_ia_j} = 0$ *и* $\theta_{2a_ka_l} > 0$, $\theta_{1a_ka_l} = \theta_{3a_ka_l} = 0$. *Тогда существуют такие ненулевые матрицы кратностей биграмм* $\Theta'_1, \Theta'_2, \Theta'_3 \in \Xi$, *задающие эйлеровы графы, что* $\Theta = \Theta'_1 + \Theta'_2 + \Theta'_3$, *и при этом существуют такие индексы* $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$, *что* $\theta'_{1a_ia_j} > 0$, $\theta'_{2a_ia_j} = \theta'_{3a_ia_j} = 0$ *и* $\theta'_{2a_ka_l} > 0$, $\theta'_{1a_ka_l} = \theta'_{3a_ka_l} = 0$, *а также граф* $G_{\Theta'_3}$ *имеет общие неизолированные вершины с графами* $G_{\Theta'_1}$ *и* $G_{\Theta'_2}$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3, будем оперировать не с матрицами кратностей биграмм, а с эйлеровыми графами. В этом случае необходимо доказать, что если эйлеров граф разлагается в сумму трех эйлеровых графов, два из которых обладают уникальными ребрами, то существует такое разбиение исходного графа на три эйлеровых, два из которых имеют уникальные ребра, при котором каждый из графов с уникальными ребрами имеет хотя бы одну общую неизолированную вершину с третьим эйлеровым графом.

Если исходные графы G_{Θ_1}, G_{Θ_2} и G_{Θ_3} обладают этим свойством, то берем в качестве искомых эйлеровых графов исходные, и все доказано.

В противном случае граф G_{Θ_3} имеет общую неизолированную вершину ровно с одним из графов G_{Θ_1} и G_{Θ_2} (не иметь вообще общих неизолированных вершин граф G_{Θ_3} не может, так как по условию все три графа при суммировании их матриц биграмм дают односвязный граф) , пусть для определенности это будет G_{Θ_1}. Очевидно, что в этом случае все ребра G_{Θ_3} уникальны для графа G_{Θ_2}, и наоборот, поскольку они находятся в разных компонентах связности.

Пусть $\Theta_{13} = \Theta_1 + \Theta_3$, а эйлеров граф, соответствующий этой матрице биграмм — $G_{\Theta_{13}}$ (то есть $G_{\Theta_{13}} = G_\Theta \setminus G_{\Theta_2}$). Выделим в графе G_{Θ_3} какой-нибудь элементарный цикл, которому соответствует граф G_{Θ_0} с матрицей биграмм Θ_0. Согласно лемме 1, это всегда можно сделать.

Обозначим через $G^1 = G_{\Theta_{13}} \div G_{\Theta_0}$, при этом будем считать, что для некоторого $k \in N$ операция разности для графов $G_{\Theta_{13}}$ и $G_{k\Theta_0}$ еще определена, а для $G_{\Theta_{13}}$ и $G_{(k+1)\Theta_0}$ — уже нет. Граф G^1 всегда будет непустым, так как в графе G_{Θ_1} (и, соответственно, в $G_{\Theta_{13}}$) есть уникальное ребро, которого нет в G_{Θ_3} (и, соответственно, в G_{Θ_0}).

По построению, так как не можем больше вычитать G_{Θ_0} из $G_{\Theta_{13}}$, то в G_{Θ_0} есть уникальное ребро, которого нет в G^1, а также в G_{Θ_2}, поскольку они находятся в разных компонентах связности. Рассмотрим теперь два случая.

1) Граф G^1 состоит из одной компоненты связности ребер, значит, он эйлеров. В этом случае, чтобы удовлетворить утверждению теоремы, необходимо взять в качестве новых матриц биграмм: $\Theta'_3 = \Theta - k\Theta_0 - \Theta_2$ (матрица биграмм графа G^1), $\Theta'_1 = k\Theta_0$ (соответствующий граф имеет общую неизолированную вершину с G^1, а также обладает уникальными ребрами по сравнению с G^1 и G_{Θ_2}), $\Theta'_2 = \Theta_2$ (имеет общую неизолированную вершину с G^1 по предположению, а также обладает уникальными ребрами по сравнению с $G_{\Theta_{13}}$ по условию теоремы, а, значит, и с графами $G_{\Theta'_3}$ и $G_{\Theta'_1}$).

2) Пусть граф G^1 имеет более одной компоненты связности ребер. В таком случае хотя бы одна его компонента связности имеет общую неизолированную вершину с графом G_{Θ_2}, пусть она имеет матрицу кратности биграмм Θ^1, а соответствующий граф — G_{Θ^1}.

Граф $G^2 = G_{\Theta_{13}} \setminus G_{\Theta^1}$ эйлеров и односвязен, поскольку больше одной компоненты связности G^1 возникли из-за того, что мы удалили уникальные ребра $G_{k\Theta_0}$ из изначального односвязного $G_{\Theta_{13}}$, и при присоединении этих ребер обратно к любому подмножеству полученных обособленных компонент связности мы всегда получим одну компоненту связности. Тогда, чтобы удовлетворить утверждению теоремы, необходимо взять в качестве новых матриц биграмм: $\Theta'_3 = \Theta^1$ (соответствует компоненте связности G_{Θ^1}, которая имеет общую неизолированную вершину с графом G_{Θ_2}), $\Theta'_1 = \Theta_1 + \Theta_3 - \Theta^1$ (соответствует графу G^2, который имеет общую неизолированную вершину с G_{Θ^1} по построению, при этом содержит все ребра из G_{Θ_0}, которые будут уникальными по сравнению с G_{Θ_2} по предположению (не имеют общих неизолированных вершин), и одновременно с этим которые также по построению будет уникальным по сравнению с G_{Θ^1} как отдельной компоненте связности), $\Theta'_2 = \Theta_2$ (имеет общую неизолированную вершину с G_{Θ^1} по построению, а также обладает уникальными ребрами по сравнению с $G_{\Theta_{13}}$ по условию теоремы, а, значит, и с графами $G_{\Theta'_3}$ и $G_{\Theta'_1}$).

Далее нам потребуются некоторые определения и факты, касающиеся грамматик и контекстно-свободных языков.

Грамматикой называется четвёрка $GR = (\Sigma, \Gamma, P, S)$, где Σ — основной (или терминальный) алфавит, элементы которого называют терминалами (или терминальными символами), Γ — вспомогательный (или нетерминальный) алфавит, элементы которого называют нетерминалами (нетерминальными или вспомогательными символами), предполагается, что $\Sigma \cap \Gamma = \varnothing$, $S \in \Gamma$ — выделенный нетерминал, называемый аксиомой (или начальным нетерминалом), P — конечное множество слов вида $\alpha \to \beta$ (где $\alpha \in (\Sigma \cup \Gamma)^* \Gamma (\Sigma \cup \Gamma)^*, \beta \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$), каждое такое слово называют правилом вывода (просто правилом или продукцией), при этом $\to \notin (\Sigma \cup \Gamma)$.

Грамматика называется контекстно-свободной (**КС-грамматикой**), если каждое ее правило имеет вид $R \to \alpha$, где $R \in \Gamma, \alpha \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$. Язык называется контекстно-свободным (**КС-языком**), если некоторая КС-грамматика его порождает.

Автоматом с магазинной памятью (МПА) называется семерка $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F, \gamma_0)$, где Q — непустое конечное множество состояний, Σ — входной алфавит (с дополнительным символом конца слова $\dashv$), Γ — стековый (или магазинный) алфавит (с дополнительным символом конца стека $\triangledown$), δ — конечное множество команд вида $(q, a, B) \to (q', \gamma, \hookrightarrow)$ или $(q, a, B) \to (q', \gamma, \_)$, (где $q \in Q, a \in \Sigma, B \in \Gamma, q' \in Q, \gamma \in \Gamma^*$), иначе говоря, δ — конечное подмножество множества $(Q \times \Sigma \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma^* \times \{\hookrightarrow, \_\})$, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $F \subseteq Q$ — множество заключительных состояний, $\gamma_0 \in \Gamma^*$ — начальное содержимое стека (магазина). На каждом шаге МПА решает, следует ли сдвинуть указатель на следующую справа ячейку входной ленты ($\hookrightarrow$) или оставить его на месте ($\_$).

Автомат **допускает** слово, записанную на входной ленте, если он дошел до ее конца и оказался при этом в одном из заключительных состояний. Множество всех слов, допускаемых МПА M, называется **языком, распознаваемым** M, и обозначается $L(M)$.

Для доказательства того, что язык язвляется КС-языком, будем пользоваться следующей теоремой (см. [3], [4] и [5]):

Теорема 4. *Классы КС-языков и языков, распознаваемых МПА, в точности совпадают.*

Также нам понадобится лемма Бара–Хиллела, также известная как лемма о накачке для контекстно-свободных языков (см. [6] и [7]).

Лемма 3 (Бара–Хиллела). *Для любого КС-языка L над алфавитом A существуют натуральные числа n_1, n_2 такие, что любое слово $\omega \in L$ при $|\omega| > n_1$ представимо в виде $\omega = \delta_1 \mu \delta_2 \nu \delta_3$, где $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in A^*$, $|\mu\nu| > 0$, $|\mu \delta_2 \nu| \leqslant n_2$ и слово $\delta_1 \mu^k \delta_2 \nu^k \delta_3 \in L$ для любого $k \geqslant 0$.*

Теорема 5. *Рассмотрим матрицу кратностей биграмм $\Theta \in \Xi$, задающую эйлеров граф. При этом пусть эта матрица разлагается в сумму как минимум двух линейно независимых матриц, таких, что каждая из матриц разложения задает эйлеров граф. Тогда:*
1) Если матрица кратностей биграмм Θ разлагается единственным образом в сумму двух линейно независимых матриц $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$, соответствующих простым эйлеровым циклам, и не разлагается в сумму большего количества линейно независимых матриц, соответствующих эйлеровым циклам, то тогда язык F_Θ — контекстно-свободный;
2) В противном случае язык F_Θ не является контекстно-свободным.

Доказательство. 1) Для начала заметим, что в случае единственного разложения G_Θ в сумму двух простых эйлеровых циклов G_{Θ_1} и G_{Θ_2} возможны два случая: либо G_{Θ_1} и G_{Θ_2} имеют единственную общую неизолированную вершину, либо $k > 1$ общих неизолированных вершин $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, причем путь $a_{i_1} \to a_{i_2} \to \cdots \to a_{i_{k-1}} \to a_{i_k}$ содержится в обоих этих эйлеровых циклах. В противном случае, если есть как минимум две общие неизолированные вершины (например, a и b), между которыми у двух простых эйлеровых циклов лежат не параллельные ребра (или пути из параллельных ребер), то существует другое разложение исходной матрицы Θ в сумму двух или более линейно независимых простых эйлеровых циклов.

Пусть для определенности натуральные m_1 и m_2 таковы, что $m_1 \leqslant m_2$, и при этом $\Theta_1 = m_1 \Theta_1^0$, $\Theta_2 = m_2 \Theta_2^0$, где графы $G_{\Theta_1^0}$ и $G_{\Theta_2^0}$ — элементарные циклы. Тогда для доказательства от противного (см. предыдущий абзац) достаточно предъявить другое разложение G_Θ в два ($m_1 = m_2$) и более ($m_1 < m_2$) простых линейно независимых эйлеровых циклов — см. рис. 2 и рис. 3.

Таким образом, случай единственного разложения в сумму двух простых эйлеровых циклов можно представить в общем виде так, как показано на рис. 4.

Согласно теореме 4, достаточно построить МПА, который распознает язык F_Θ.

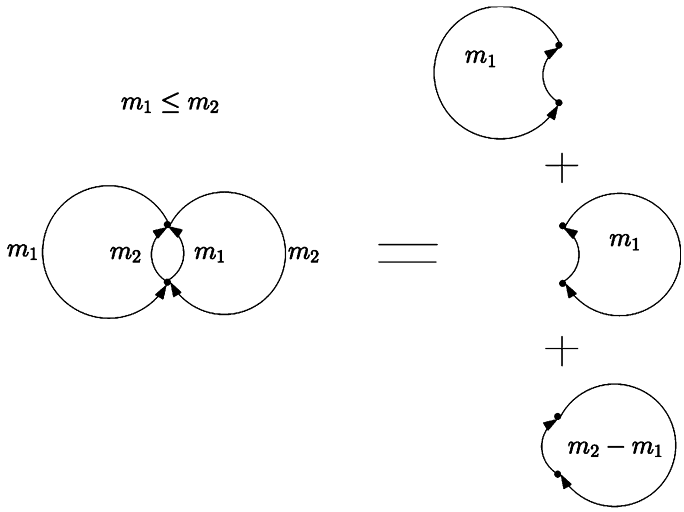

Рис. 2. Разложение графа G_Θ в случае «сонаправленных» циклов.

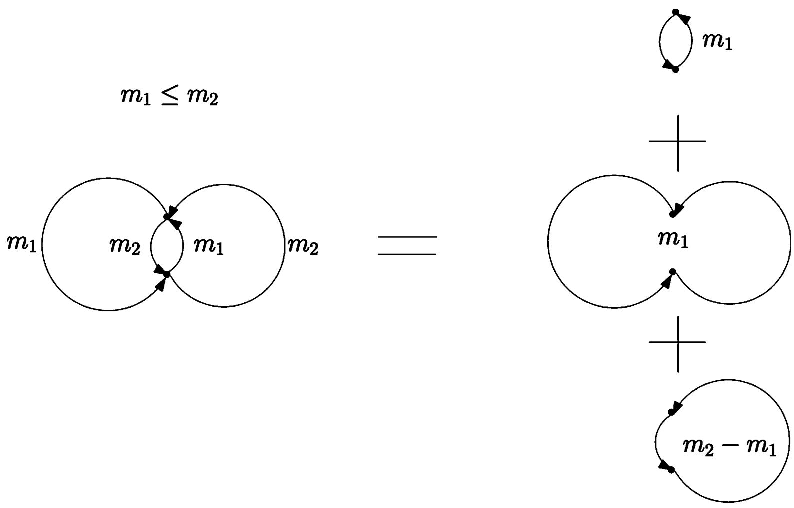

Рис. 3. Разложение графа G_Θ в случае «противоположно направленных» циклов.

В качестве входного алфавита для МПА положим $\Sigma = A \cup \{\dashv\}$, и пусть на стеке в начальный момент времени находится символ $\gamma_0 =$

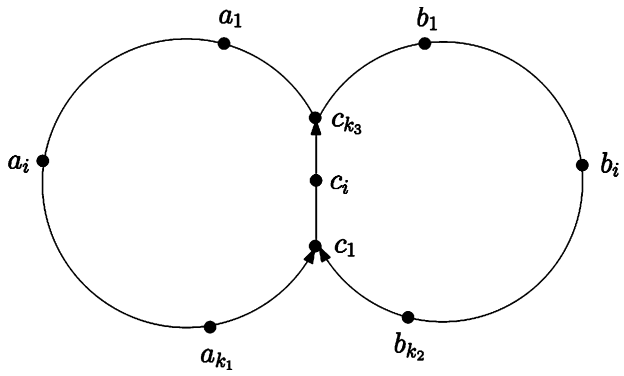

Рис. 4. Случай единственного разложения в сумму двух простых эйлеровых циклов.

$Z \in \Gamma$. Также будем считать, что алфавит стека состоит всего из трех символов: $\Gamma = \{Z, X, \nabla\}$. Пусть $F = \{f\}$.

Построим правила перехода для распознавания языка F_Θ.

Состояния нашего МПА будем обозначать в виде $q^I(a_{prev}, C, a^1, n_1, a^2, n_2, \delta)$, где a_{prev} — предыдущая буква слова при движении слева направо, $C \in \{1, 2\}$ — номер текущего цикла, $a^i \in A$ — первая буква цикла $i \in \{1, 2\}$, $0 \leqslant n_i \leqslant m_i - 1$ — какой «виток» цикла i в данный момент совершается (начиная с нуля по модулю m_i), $\delta \in \{1, 2\}$ — какой цикл добавляет символ X в магазин (то есть, если $\delta = i$, то при прохождении цикла G_{Θ_i} символ X добавляется в магазин, а при прохождении цикла $G_{\Theta_{3-i}}$ символ X, наоборот, стирается). Также символом Y будем обозначать любой из символов X, Z (для простоты, чтобы не дублировать правила для X и Z).

Для начала рассмотрим ситуацию, когда первая буква a_i ($1 \leqslant i \leqslant k_1$) входного слова принадлежит только первому циклу. Тогда правила будут следующими:

$(q_0, a_i, Z) \to (q^I(a_i, 1, a_i, 0, c_{k_3}, 0, 1), Z, \hookrightarrow)$,

$(q^I(a_i, 1, a_i, n_1, c_{k_3}, n_2, \delta), a_{i+1}, Y) \to (q^I(a_{i+1}, 1, a_i, n_1, c_{k_3}, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$,

$\dots$

$(q^I(a_{k_1-1}, 1, a_i, n_1, c_{k_3}, n_2, \delta), a_{k_1}, Y) \to (q^I(a_{k_1}, 1, a_i, n_1, c_{k_3}, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$.

Таким образом, мы дошли до общей части циклов. Для нее правила будут такие:

$(q^I(a_{k_1}, C, a_i, n_1, c_{k_3}, n_2, \delta), c_1, Y) \to (q^I(c_1, C, a_i, n_1, c_{k_3}, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$,

$(q^I(c_1, C, a_i, n_1, c_{k_3}, n_2, \delta), c_2, Y) \to (q^I(c_2, C, a_i, n_1, c_{k_3}, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$,

...
$(q^I(c_{k_3-1},1,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),c_{k_3},Y) \to (q^I(c_{k_3},1,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),Y,\hookrightarrow)$ (если мы двигались по первому циклу, то не меняем счетчик n_2),
$(q^I(c_{k_3-1},2,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),c_{k_3},Y) \to (q^I(c_{k_3},2,a_i,n_1,c_{k_3},n_2+1,\delta),Y,\hookrightarrow)$ при $n_2 < m_2 - 1$ (если мы двигались по второму циклу, то увеличиваем счетчик n_2 на единицу),
$(q^I(c_{k_3-1},2,a_i,n_1,c_{k_3},m_2-1,2),c_{k_3},Y) \to (q^I(c_{k_3},2,a_i,n_1,c_{k_3},0,2),XY,\hookrightarrow)$ (дописываем X в магазин и обнуляем счетчик n_2, так как $\delta = 2$),
$(q^I(c_{k_3-1},2,a_i,n_1,c_{k_3},m_2-1,1),c_{k_3},X) \to (q^I(c_{k_3},2,a_i,n_1,c_{k_3},0,1),\Lambda,\hookrightarrow)$ (стираем имеющийся в магазине X и обнуляем счетчик n_2, так как $\delta = 1$),
$(q^I(c_{k_3-1},2,a_i,n_1,c_{k_3},m_2-1,1),c_{k_3},Z) \to (q^I(c_{k_3},2,a_i,n_1,c_{k_3},0,2),XZ,\hookrightarrow)$ (поскольку стереть нечего, то изменяем δ с 1 на 2 и теперь уже при проходе по второму циклу мы дописываем символ X, а не стираем; также обнуляем счетчик n_2).

Теперь у нас есть выбор — либо мы продолжим путь по первому циклу, либо по второму. Рассмотрим отдельно оба варианта.
$(q^I(c_{k_3},C,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),b_1,Y) \to (q^I(b_1,2,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),Y,\hookrightarrow)$,
$(q^I(b_1,2,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),b_2,Y) \to (q^I(b_2,2,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),Y,\hookrightarrow)$,
...
$(q^I(b_{k_2-1},2,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),b_{k_2},Y) \to (q^I(b_{k_2},2,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),Y,\hookrightarrow)$,
$(q^I(b_{k_2},2,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),c_1,Y) \to (q^I(c_1,2,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),Y,\hookrightarrow)$.

Приведенные выше правила — для второго цикла. Теперь приведем оставшийся набор правил для первого цикла.
$(q^I(c_{k_3},C,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),a_1,Y) \to (q^I(a_1,1,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),Y,\hookrightarrow)$,
$(q^I(a_1,1,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),a_2,Y) \to (q^I(a_2,1,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),Y,\hookrightarrow)$,
...
$(q^I(a_{i-1},1,a_i,n_1,c_{k_3},n_2,\delta),a_i,Y) \to (q^I(a_i,1,a_i,n_1+1,c_{k_3},n_2,\delta),Y,\hookrightarrow)$ при $n_1 < m_1 - 1$ (увеличиваем счетчик n_1 на единицу),
$(q^I(a_{i-1},1,a_i,m_1-1,c_{k_3},n_2,1),a_i,Y) \to (q^I(a_i,1,a_i,0,c_{k_3},n_2,1),XY,\hookrightarrow)$ (обнуляем счетчик n_1 и дописываем в магазин символ X, поскольку $\delta = 1$),
$(q^I(a_{i-1},1,a_i,m_1-1,c_{k_3},n_2,2),a_i,X) \to (q^I(a_i,1,a_i,0,c_{k_3},n_2,2),\Lambda,\hookrightarrow)$ (стираем имеющийся в магазине X и обнуляем счетчик n_1, так как $\delta = 2$),
$(q^I(a_{i-1},1,a_i,m_1-1,c_{k_3},n_2,2),a_i,Z) \to (q^I(a_i,1,a_i,0,c_{k_3},n_2,1),XZ,\hookrightarrow)$ (поскольку стереть нечего, то изменяем δ с 2 на 1 и теперь уже при проходе по первому циклу мы дописываем символ X, а не стираем; также обнуляем счетчик n_1).

Осталось дополнить правилом окончания распознавания:
$(q^I(a_i, 1, a_i, 0, c_{k_3}, 0, \delta), \dashv, Z) \to (f, Z, \_)$.

Аналогично строятся правила, если первая буква входного слова принадлежит только второму циклу (например, $b_i, 1 \leqslant i \leqslant k_2$). Только в этом случае все состояния будем помечать как $q^{II}(a_{prev}, C, a^1, n_1, a^2, n_2, \delta)$, чтобы правила для этих случаев не пересекались.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда первая буква входного слова является общей для обоих циклов. Пусть этой буквой будет $c_i, 1 \leqslant i \leqslant k_3$. Заметим, что данный случай отличается от вышеописанных тем, что мы в самом начале не знаем, по какому циклу идем — поэтому можем проставить в качестве значения C любое число (например, 1), все равно мы его затем заменим на верное. Также, началом и концом обоих циклов будет первая буква — c_i.
$(q_0, c_i, Z) \to (q^{III}(c_i, 1, c_i, 0, c_i, 0, 1), Z, \hookrightarrow)$,
$(q^{III}(c_i, C, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), c_{i+1}, Y) \to (q^{III}(c_{i+1}, C, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$,
$\ldots$
$(q^{III}(c_{k_3-1}, C, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), c_{k_3}, Y) \to (q^{III}(c_{k_3}, C, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$.

Теперь у нас есть выбор — либо мы продолжим путь по первому циклу, либо по второму. Рассмотрим отдельно оба варианта.
$(q^{III}(c_{k_3}, C, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), a_1, Y) \to (q^{III}(a_1, 1, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$,
$(q^{III}(a_1, 1, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), a_2, Y) \to (q^{III}(a_2, 1, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$,
$\ldots$
$(q^{III}(a_{k_1-1}, 1, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), a_{k_1}, Y) \to (q^{III}(a_{k_1}, 1, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$,
$(q^{III}(a_{k_1}, 1, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), c_1, Y) \to (q^{III}(c_1, 1, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$.

Аналогичные правила выписываются и для движения по второму циклу:
$(q^{III}(c_{k_3}, C, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), b_1, Y) \to (q^{III}(b_1, 2, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$,
$(q^{III}(b_1, 2, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), b_2, Y) \to (q^{III}(b_2, 2, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$,
$\ldots$
$(q^{III}(b_{k_2-1}, 2, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), b_{k_2}, Y) \to (q^{III}(b_{k_2}, 2, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$,
$(q^{III}(b_{k_2}, 2, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), c_1, Y) \to (q^{III}(c_1, 2, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$.

Теперь дополним правилами при движении по общей части циклов от c_1 до c_i:
$(q^{III}(c_1, C, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), c_2, Y) \to (q^{III}(c_2, C, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$,
$\ldots$
$(q^{III}(c_{i-2}, C, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), c_{i-1}, Y) \to (q^{III}(c_{i-1}, C, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$.

И завершим важными правилами, в которых обновляются счетчики (сначала для первого цикла, потом для второго):

$(q^{III}(c_{i-1}, 1, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), c_i, Y) \to (q^{III}(c_i, 1, c_i, n_1{+}1, c_i, n_2, \delta), Y, \hookrightarrow)$ при $n_1 < m_1 - 1$ (увеличиваем счетчик n_1 на единицу),
$(q^{III}(c_{i-1}, 1, c_i, m_1{-}1, c_i, n_2, 1), c_i, Y) \to (q^{III}(c_i, 1, c_i, 0, c_i, n_2, 1), XY, \hookrightarrow)$ (обнуляем счетчик n_1 и дописываем в магазин символ X, поскольку $\delta = 1$),
$(q^{III}(c_{i-1}, 1, c_i, m_1 - 1, c_i, n_2, 2), c_i, X) \to (q^{III}(c_i, 1, c_i, 0, c_i, n_2, 2), \Lambda, \hookrightarrow)$ (стираем имеющийся в магазине X и обнуляем счетчик n_1, так как $\delta = 2$),
$(q^{III}(c_{i-1}, 1, c_i, m_1{-}1, c_i, n_2, 2), c_i, Z) \to (q^{III}(c_i, 1, c_i, 0, c_i, n_2, 1), XZ, \hookrightarrow)$ (поскольку стереть нечего, то изменяем δ с 2 на 1 и теперь уже при проходе по первому циклу мы дописываем символ X, а не стираем; также обнуляем счетчик n_1);
$(q^{III}(c_{i-1}, 2, c_i, n_1, c_i, n_2, \delta), c_i, Y) \to (q^{III}(c_i, 2, c_i, n_1, c_i, n_2{+}1, \delta), Y, \hookrightarrow)$ при $n_2 < m_2 - 1$,
$(q^{III}(c_{i-1}, 2, c_i, n_1, c_i, m_2{-}1, 2), c_i, Y) \to (q^{III}(c_i, 2, c_i, 0, c_i, n_2, 2), XY, \hookrightarrow)$,
$(q^{III}(c_{i-1}, 2, c_i, n_1, c_i, m_2 - 1, 1), c_i, X) \to (q^{III}(c_i, 2, c_i, 0, c_i, n_2, 1), \Lambda, \hookrightarrow)$,
$(q^{III}(c_{i-1}, 2, c_i, n_1, c_i, m_2{-}1, 1), c_i, Z) \to (q^{III}(c_i, 2, c_i, 0, c_i, n_2, 2), XZ, \hookrightarrow)$.

Наконец, дополним правилом окончания распознавания:
$(q^{III}(c_i, C, c_i, 0, c_i, 0, \delta), \dashv, Z) \to (f, Z, \_)$.

Напоследок отметим две вещи. Во-первых, если в общей части циклов только одна вершина ($k_3 = 1$), либо в одном из циклов нет уникальных точек ($k_1 = 0$ или $k_2 = 0$, одновременно они не могут быть равны нулю, так как тогда получим два параллельных ребра $c_{k_3} \to c_1$, и наши циклы совпадут), то несложно заметить, что рассуждения выше не перестают быть верными, а только немного упрощаются правила (мы же рассмотрели наиболее общий случай). Во-вторых, мощность множества состояний МПА для распознавания, который был использован в этом доказательстве, равна $12m_1m_2|A|^3$.

2) Данный случай можно разбить на три подпункта.

2.1) Пусть матрица кратностей биграмм Θ, разлагается в сумму трех линейно независимых матриц $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3$, причем каждая из матриц $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \in \Xi$ также задает эйлеров граф. Также известно, что существует такой элементарный эйлеров цикл G_{Θ_0} с матрицей кратностей биграмм Θ_0, что обобщенная разность $G_\Theta \div G_{\Theta_0}$ соответствует матрице кратностей биграмм, которая разлагается в сумму 2 линейно независимых эйлеровых циклов.

В этом случае применим последовательно сначала теорему 3, а затем лемму 2. Таким образом, будем иметь, что существуют такие ненулевые матрицы кратностей биграмм $\Theta'_1, \Theta'_2, \Theta'_3 \in \Xi$, задающие эйлеровы графы, что $\Theta = \Theta'_1 + \Theta'_2 + \Theta'_3$, и при этом существуют такие индексы $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$, что $\theta'_{1a_ia_j} > 0$, $\theta'_{2a_ia_j} = \theta'_{3a_ia_j} = 0$ и $\theta'_{2a_ka_l} > 0$, $\theta'_{1a_ka_l} = \theta'_{3a_ka_l} = 0$, а также граф $G_{\Theta'_3}$ имеет общие неизолированные вершины с графами $G_{\Theta'_1}$ и $G_{\Theta'_2}$.

Пусть $a \in A$ — общая неизолированная вершина у графа $G_{\Theta'_3}$ с графом $G_{\Theta'_1}$, а $b \in A$ — общая неизолированная вершина у графа $G_{\Theta'_3}$ с графом $G_{\Theta'_2}$.

Возьмем по одному слову специального вида из биграммных языков, заданных каждой из матриц $\Theta'_1, \Theta'_2, \Theta'_3$. Пусть $a\alpha a \in L(\Theta'_1)$, $b\beta b \in L(\Theta'_2)$ и $a\gamma a = a\gamma_1 b\gamma_2 a \in L(\Theta'_3)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in A^*$, причем $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ могут быть пустыми, а γ — только в случае $a = b$. Иллюстрация данного случая показана на рис. 5.

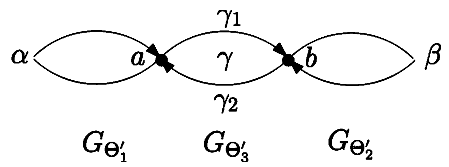

Рис. 5. Случай трех эйлеровых циклов, два из которых имеют уникальные ребра.

Тогда слово $\omega = a\alpha a\gamma_1 b\beta b\gamma_2 a \in L(\Theta)$. Тогда для любого натурального m слово $\omega_m = a(\alpha a)^m(\gamma_1 b\gamma_2 a)^{m-1}\gamma_1 b(\beta b)^m\gamma_2 a \in L(m\Theta)$ и, следовательно, $\omega_m \in F_\Theta$.

Очевидно, что существует такое натуральное число $m > 0$, что длина средней части $(\gamma_1 b\gamma_2 a)^{m-1}\gamma_1$ слова ω_m будет больше числа n_2 из леммы 3, при этом $|\omega_m| > n_1$. Пусть слово $\omega_m = \delta_1\mu\delta_2\nu\delta_3$, где $|\mu\nu| > 0$, $|\mu\delta_2\nu| \leqslant n_2$.

Тогда уникальные биграммы a_ia_j и a_ka_l будут в слове ω_m отстоять друг от друга не менее чем на длину средней части $(\gamma_1 b\gamma_2 a)^{m-1}\gamma_1$, то есть не менее чем на $n_2 + 1$. Значит, в разбиении $\omega_m = \delta_1\mu\delta_2\nu\delta_3$ в подслове $\mu\delta_2\nu$ не могут одновременно находится обе эти уникальные биграммы.

Согласно лемме 3, если язык F_Θ — контекстно-свободный, то в нем содержится и слово $\omega_0 = \delta_1\delta_2\delta_3$ (подставляем значение $k = 0$). Из условия $|\mu\nu| > 0$ следует, что при вычеркивании подслов μ и ν из слова ω_m количество биграмм в нем, с одной стороны, уменьшится как минимум на 2 (вычеркнута одна буква), а с другой стороны, увеличится на 1 (если только одно из μ и ν — непустое) или на 2 (если оба μ и ν — непустые).

Если ни в μ, ни в ν не входила ни одна из уникальных биграмм, то получим, что уникальных биграмм в ω_0 как минимум не уменьшилось, а других — как минимум уменьшилось на одну (так как суммарно биграмм стало как минимум меньше на одну). В этом случае $\omega_0 \notin F_\Theta$ и противоречие с утверждением леммы 3.

Теперь расмотрим случай, когда в одном из μ и ν есть уникальная биграмма (пусть для определенности $a_i a_j$ в μ). После вычеркивания μ и ν мы добавляем от одной (когда ν — пустое) до двух (когда ν — непустое) биграмм. Если добавляем только одну биграмму, то число биграмм $a_i a_j$ как максимум останется прежним, биграмм $a_k a_l$ — как минимум не уменьшится, а всего биграмм станет меньше. Значит, $\omega_0 \notin F_\Theta$. Если же добавляем две биграммы, то возможны два случая: а) число биграмм $a_i a_j$ как максимум останется прежним, биграмм $a_k a_l$ — как минимум не уменьшится, а всего биграмм станет меньше; б) число биграмм $a_i a_j$ увеличится на 1, а число биграмм $a_k a_l$ — останется таким же. В любом из этих случаев $\omega_0 \notin F_\Theta$ (так как кратность всех биграмм должна уменьшатся или увеличиваться в одно и то же число раз, а здесь получаем, что кратность одних увеличивается, а других — уменьшается или остается таким же).

Таким образом, утверждение леммы 3 никогда не выполняется для $\omega_m \in F_\Theta$, и, следовательно, F_Θ — не контекстно-свободный язык.

2.2) Существуют два разных разложения матрицы кратностей биграмм Θ в сумму двух линейно независимых матриц $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_3 + \Theta_4$, где различные матрицы $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ соответствующих простым эйлеровым циклам, и при этом Θ не разлагается в сумму большего количества линейно независимых матриц, соответствующих эйлеровым циклам.

Для начала установим пару важных следствий из разложения $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_3 + \Theta_4$ в пары линейно независимых простых эйлеровых циклов.

Во-первых, если для одного разложения (допустим, это разложение $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$) оба простых цикла содержат ребро e, то это же ребро будут содержать оба простых цикла для другого разложения (в данном случае это $\Theta = \Theta_3 + \Theta_4$). Это так, поскольку, двигаясь по направлению ребра e, мы рано или поздно придем в вершину, из которой исходит два непараллельных ребра e_1 и e_2, $e_1 \neq e_2$. Для любого разложения Θ в любом простом цикле и из любой вершины исходят только одно ребро (возможно, с соответствующей кратностью). Значит, эти два непараллельных ребра принадлежат разным простым циклам, и, следовательно, путь до них, начиная с ориентированного ребра e, содержал ребра, принадлежащие обоим циклам (в данном случае соответствующих матрицам Θ_3 и Θ_4).

Во-вторых, если a — общая неизолированная вершина для циклов Θ_1 и Θ_2, то она же будет общей неизолированной и для циклов Θ_3 и Θ_4. Если a принадлежит общему ребру e для Θ_1 и Θ_2, то по доказанному выше a принадлежит тому же общему ребру e для Θ_3 и Θ_4. Если же a не принадлежит никакому общему ребру для Θ_1 и Θ_2, то, очевидно, что в вершину a входят два непараллельных ребра, и выходят два непараллельных ребра. Очевидно, что эти четыре ребра не могут входить в один простой цикл, а должны принадлежать двум различным простым эйлеровым циклам. Значит, вершина a будет общей и для Θ_3 и Θ_4.

Рассмотрим произвольное разложение, пусть это будет $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$. Уже неоднократно показывалось, что как в G_{Θ_1}, так и в G_{Θ_2} должны быть так называемые уникальные ребра, которых нет в цикле-дополнении до G_Θ. Рассмотрим произвольный простой цикл из другого разложения, пусть это будет G_{Θ_3}. С одной стороны, он должен содержать уникальные ребра как из G_{Θ_1}, так и из G_{Θ_2}, ведь в противном случае он содержал бы ребра только из одного простого цикла (например, из G_{Θ_1}) и таким образом совпадал бы с ним. С другой стороны, G_{Θ_3} не может содержать все уникальные ребра ни G_{Θ_1}, ни G_{Θ_2}, так как в противном случае по доказанному он также содержит общие ребра для G_{Θ_1} и G_{Θ_2} и, следовательно, совпадает с одним из простых циклов из первого разложения.

Значит, оба простых цикла из одного разложения содержат уникальные ребра для любого из простых циклов второго разложения (и наоборот). Теперь можно свести этот случай к п. 2.1).

Пусть $a \in A$ — общая неизолированная вершина у простого графа G_{Θ_1} с простыми графами G_{Θ_2}, G_{Θ_3} и G_{Θ_4} (то, что такая вершина существует, было показано выше).

Возьмем по одному слову специального вида из биграммных языков, заданных каждой из матриц $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$. Пусть $a\alpha a \in L(\Theta_1)$, $a\beta a \in L(\Theta_2)$, $a\gamma a \in L(\Theta_3)$ и $a\delta a \in L(\Theta_4)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A^*$.

Тогда слово $\omega = a\alpha a\delta a\beta a\gamma a \in L(2\Theta)$. Тогда для любого натурального m слово $\omega_m = a(\alpha a)^m(\delta a)^m(\beta a)^m(\gamma a)^m \in L(2m\Theta)$ и, следовательно, $\omega_m \in F_\Theta$.

Очевидно, что существует такое натуральное число $m > 0$, что длина каждой из частей слова ω_m, соответствующей любому простому циклу из разложения Θ, будет больше числа n_2 из леммы 3, то есть

$$\min(m|\alpha a|, m|\beta a|, m|\gamma a|, m|\delta a|) > n_2,$$

и при этом $|\omega_m| > n_1$. Пусть слово $\omega_m = \delta_1 \mu \delta_2 \nu \delta_3$, где $|\mu\nu| > 0$, $|\mu \delta_2 \nu| \leqslant n_2$.

Тогда подслово $\mu\delta_2\nu$ слова ω_m полностью содержится либо в части $\epsilon_1 = a(\alpha a)^m(\delta a)^m(\beta a)^m$, либо в части $\epsilon_2 = a(\delta a)^m(\beta a)^m(\gamma a)^m$, причем длины средних частей ϵ_1 и ϵ_2 больше, чем длина $\mu\delta_2\nu$.

Далее, по доказанному выше, крайние части $a(\alpha a)^m$ и $a(\beta a)^m$ слова ϵ_1 содержат уникальные биграммы (по отношению друг к другу и по отношению к средней части $a(\delta a)^m$), то же верно и для слова ϵ_2. Теперь, повторяя рассуждения из п. 2.1) об отсутствии взаимных корреляций для кратностей уникальных и неуникальных биграмм для слова ϵ_1 (или ϵ_2) при стирании частей μ и ν (в то время как в остальной части слова ω_m — $a(\gamma a)^m$ (или $a(\alpha a)^m$) — все осталось неизменным), приходим к выводу, что слово $\omega_0 = \delta_1\delta_2\delta_3 \notin F_\Theta$.

Получаем противоречие с леммой 3, и, значит, язык F_Θ — не контекстно-свободный.

2.3) Пусть матрица кратностей биграмм Θ, разлагается в сумму трех линейно независимых матриц $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3$, причем каждая из матриц $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \in \Xi$ также задает эйлеров граф. При этом не существует такого элементарного эйлерова цикла G_{Θ_0} с матрицей кратностей биграмм Θ_0, что обобщенная разность $G_\Theta \div G_{\Theta_0}$ соответствует матрице кратностей биграмм, которая разлагается в сумму 2 линейно независимых эйлеровых циклов.

В данном случае для любого элементарного цикла G_{Θ_0} обобщенная разность $G_\Theta \div G_{\Theta_0}$ всегда будет представлять некий простой эйлеров цикл G_1.

Сведем этот случай к предыдущему в п. 2.2). Для этого заметим, что существует как минимум два разных разложения Θ в сумму двух матриц, соответствующих простым эйлеровым циклам. Одно такое разложение следует из условия: пусть $\Theta_1 = k\Theta_0$ (полагаем, что для некоторого $k \in N$ операция разности для графов G_Θ и $G_{k\Theta_0}$ еще определена, а для G_Θ и $G_{(k+1)\Theta_0}$ — уже нет), $\Theta_2 = \Theta - k\Theta_0$ (соответствует простому циклу G_1).

Пусть $\Theta_2 = m\Theta'_2, m \in N$, где граф $G_{\Theta'_2}$ — элементарный. Из двух матриц Θ_0 и Θ'_2 невозможно с помощью линейных комбинаций составить 3 линейно независимых матрицы (вспомним разложение $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3$). Значит, существует по крайней мере еще один элементарный цикл с матрицей Θ'_3, не совпадающий с первыми двумя ($\Theta'_3 \neq \Theta_0, \Theta'_3 \neq \Theta'_2$). Очевидно, что в этом случае граф $G_\Theta \div G_{\Theta'_3}$ будет простым эйлеровым. Полагаем, что для некоторого $l \in N$ операция разности для графов G_Θ и $G_{l\Theta'_3}$ еще определена, а для G_Θ и $G_{(l+1)\Theta'_3}$ — уже нет. Тогда в качестве нового разбиения исходной матрицы возьмем $\Theta = \Theta_3 + \Theta_4$, где $\Theta_3 = l\Theta'_3, \Theta_4 = \Theta - l\Theta'_3$. По построению новые матрицы Θ_3 и Θ_4, соответствующие простым эйлеровым циклам, отличны от матриц Θ_1 и Θ_2.

Значит, имеем два различных разбиения исходной матрицы кратностей биграмм в сумму двух простых циклов: $\Theta = \Theta_1+\Theta_2 = \Theta_3+\Theta_4$, к которым применим рассуждения из п. 2.2) (заметим, что там мы нигде не использовали тот факт, что Θ не разлагается в сумму $k \geqslant 3$ линейно независимых матриц, соответствующих эйлеровым циклам). Получаем, что язык F_Θ — не контекстно-свободный.

Список литературы

[1] Оре О. Теория графов. — М.: Наука, 1980.

[2] Петюшко А. А. О биграммных языках // Дискретная математика. — 2013. Т. 25, № 3. — С. 64–77.

[3] Chomsky N. Context Free Grammars and Pushdown Storage // Quarterly Progress Report. — MIT Research Laboratory in Electronics, 1962. 65. — P. 187–194.

[4] Evey R. J. Application of Pushdown-Store Machines // AFIPS Proceedings of the Fall Joint Computer Conference. — 1963. — P. 215–227.

[5] Schützenberger M. P. On Context-Free Languages and Push-Down Automata // Information and Control. — 1963. 6. — P. 246–264.

[6] Bar-Hillel Y., Perles M. M., Shamir E. On formal properties of simple phrase-structure grammars // Z. fur Phonetik, Sprachwissenschaft, und Kommunikationsforschung. — 1961. Vol. 14 (2). — P. 143–172.

[7] Bar-Hillel Y. Language and Information: Selected Essays on their Theory and Application // Addison-Wesley series in logic. — Addison-Wesley, 1964. — P. 116–150.