О времени очищения лёгких от никотина в чистой среде

А. Ш. Аскарова

В данной работе изучается функционирование лёгких курящего человека в чистой среде. Выявлена зависимость ухудшения эффективности ресничек от времени, в течение которого в лёгких находился никотин. Также получена временная оценка сложности процесса самоочищения лёгких от никотина.

Ключевые слова: лёгкие, процесс самоочищения, чистая среда, никотин.

Введение

В работах [2, 4] построена математическая модель процесса самоочищения здоровых лёгких и изучены её свойства, как в условиях чистой среды, так и в условиях её запыленности. Также была построена модель функционирования лёгких с очаговыми поражениями в чистой среде [5]. В предлагаемой работе строится модель самоочищения лёгких курящего человека и исследуется её функционирование в условиях чистой среды. В частности, находится время полного освобождения лёгких от никотина в худшем случае, с учетом всех важных параметров построенной модели.

Лёгкие являются одним из главных органов человека. У них много функций, одной из которых является транспортировка вещества. В них происходит процесс очищения организма от загрязняющих веществ, поступающих с потоком воздуха при вдохе, а также возникающих в результате жизнедеятельности. При курении лёгкие человека наполняются отравляющим веществом — никотином, который оказывает на них пагубное влияние, нарушая их функционирование.

Лёгкие состоят из бронхов, которые образуют древовидную структуру. Внутренняя часть бронхов покрыта мелкими ресничками. Процесс транспортировки осуществляется за счет этих ресничек. Поступивший никотин распределяется по ресничкам, которые, впоследствии, очищаются от него путём передачи их верхним ресничкам. Бронхи имеют разные пропускные способности и разную эффективность ресничек. Чем выше от альвеол (самых мелких бронхов), тем сильнее механизм передачи.

Возникает задача обобщения модели лёгких, построенной в статье Ю. Г. Черновой (Гераськиной) [2], на случай лёгких курящего человека и изучения свойств такой модели.

В нашей работе приведена модель самоочищения лёгких курящего человека и найдено время очищения в самом худшем случае при учёте таких параметров как количество ресничек, их эффективность и глубина древовидной структуры.

Приведём необходимые для дальнейшего изложения полученных результатов основные определения и обозначения из [2].

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $\quad N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\quad N_0 = \{0\} \cup N$.

Лёгкие представимы как полное, ориентированное к корню дерево [1]. Обозначим его I-деревом D^{-1}. Будем рассматривать такой класс деревьев, в которых каждая вершина инцидентна не более чем трём ребрам. Глубина I-дерева D^{-1} равна $l+1$. Считается, что ребро, инцидентное корню, имеет глубину 0, далее по возрастанию.

Считаем, что каждое ребро разделено на m частей, которые назовём ресничками. Занумеруем их по возрастанию числами j, $j \in N_m$, в порядке обратном ориентации ребра.

Припишем ресничке число b, $b \in N$ и назовём максимальной нагрузкой на ресничку, а также число r, $r \in Q$, где Q — множество рациональных чисел, $0 < r \leqslant b$, называемое мерой переброса. Под максимальной нагрузкой понимается максимальное количество никотина, которое может находиться на ней. Под мерой переброса понимается максимальное количество никотина, которое может перебросить эта ресничка соседней сверху. Параметры нагрузки и меры переброса определяются по следующему закону. На ребре глубины i, $i = 0, 1, \ldots, l$, максимальная нагрузка будет равна $2^{l-i}b$, а мера переброса — $2^{l-i}r$.

Дыхание происходит в дискретные моменты времени. За один такт производится вдох и выдох.

Далее обобщим модель самоочищения лёгких из [2] следующим образом.

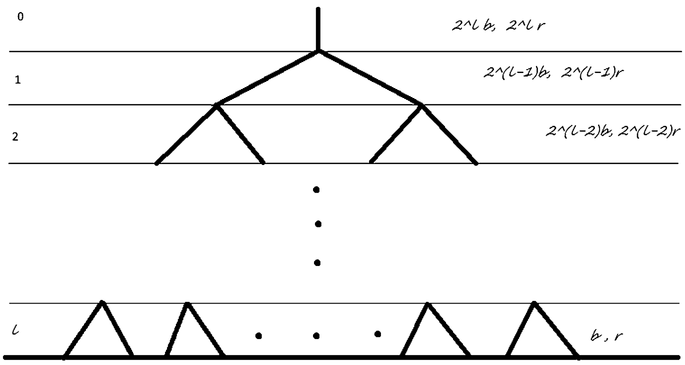

Рис. 1. Древовидное представление легких.

Считается, что мера переброса реснички на ребре глубины i, $i = 0, 1, \ldots, l$, в зависимости от момента времени $t (t = 0, 1, 2, \ldots)$ уменьшается по следующему закону:

$$r(1) = 2^{l-i}r, \quad r(t+1) = 2^{l-i}r/k^{[t/T]}, \quad k \in (1; 2], \quad T \in N.$$

Этот закон изменения меры переброса означает, что мера переброса реснички каждые T тактов уменьшается в k раз.

Далее для наглядности будем представлять k в следующем виде:

$$k = (1-d)^{-1}, \quad d \in \left(0; \frac{1}{2}\right].$$

Тогда закон изменения меры переброса будет иметь следующий вид:

$$r(1) = 2^{l-i}r, \quad r(t+1) = 2^{l-i}r(1-d)^{[t/T]}.$$

Параметр T назовём **периодом постоянства меры переброса** ресничек, далее просто период.

Конфигурацией нагрузок на ресничках назовем совокупность значений нагрузок, которые задаются выражением $s(i, j, t)$, где i — глубина ребра в дереве, j — номер реснички на i-том ребре, t — момент времени. Конфигурацию в момент времени t назовём **нормальной для J-той реснички** ребра уровня i, если нагрузка на всех ресничках с меньшим номером может быть задана следующей конфигурацией:

$$s(i,j,t)=\begin{cases} z,\ J-j=2v \\ 0,\ J-j=2v+1 \end{cases};\ \text{где } j=1,2,\ldots,J-1;\ \ 0<z\leqslant 2^{l-i}r(t).$$

Временем нормализации для J-той реснички назовём количество тактов, затрачиваемое на переход к нормальной конфигурации.

Такое I-дерево D^{-1} с параметрами m,l,b,r,k,T обозначается $D^{-1}(m,l,b,r,k,T)$.

С этим I-деревом D^{-1} свяжем некоторый процесс, называемый процессом очищения лёгких от никотина.

Обозначим V — общий объем легких. V' — исходный объем никотина, находящегося на ребрах. Каждая ресничка осуществляет приём никотина извне и переброс своей нагрузки на следующую ресничку с меньшим номером внутри ребра. Приём ресничкой никотина и его переброс на соседнюю сверху ресничку осуществляется по правилам, приведённым в [2].

Обозначим через $L(D^{-1}(b,r,m,l,T,k))$ время очищения дерева $D^{-1}(b,r,m,l,T,k)$ при произвольном начальном распределении ресничек. Тогда L будет функцией, зависящей от начального распределения нагрузок по ресничкам. А через $L(b,r,m,l,T,k)$ обозначим наибольшее значение функции L. Далее наша задача заключается в установлении вида этой функции, обычно называемой сложностной функцией Шеннона.

Основные результаты

Лемма 1. *Пусть* $b,T,\tau_1,m\in N$; $r,b_3\in Q\backslash\{0\}$; $d\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$; $T>\frac{bd}{r}+m$; $s(1,1,0)=b$; $r(0)=r$ *и пусть* τ_1 *— время очищения первой реснички трахеи. Тогда* $\exists n_1,q_1\in N_0$*:*

$$\begin{cases} \tau_1=Tn_1+q_1, \\ n_1=\left[log_{(1-d)}\left(1-\frac{bd}{Tr}\right)\right], \\ q_1=\left]\frac{bd-Tr}{rd(1-d)^{n_1}}+\frac{T}{d}\right[. \end{cases} \tag{1}$$

При этом количество никотина, переброшенного в последний момент времени, равно

$$b_3=b-Tr\frac{1-(1-d)^{n_1}}{d}-(q_1-1)r(1-d)^{n_1}. \tag{2}$$

Доказательство. Нагрузка b на ресничке представима в виде:

$$b = b_1 + b_2 + b_3,$$

где b_1 — количество никотина, переданного за полные периоды, b_2 — количество никотина, переданного за последний неполный период, сохраняя закон изменения меры переброса, b_3 — количество никотина, переданного за последний такт, в момент полного освобождения реснички.

Найдём количество полных периодов постоянства меры переброса, необходимое для полного освобождения реснички.

Поскольку в данной лемме рассматривается только первая ресничка трахеи, то сделаем следующие переобозначения. Обозначим за $s(t)$ количество никотина находящегося на ресничке в момент времени t. Тогда имеем следующие равенства

$$s(0) = b, \quad s(t+1) = s(t) - r(t).$$

Так как в течение одного периода мера переброса остается постоянной, то можем записать следующие равенства:

$$s(nT) = s((n-1)T) - Tr((n-1)T)$$

$$s(nT + t) = s(nT) - tr(nT) \quad \forall t < T.$$

Отсюда следует

$$\begin{gathered} s(nT) = s((n-1)T) - Tr((n-1)T) = b - Tr - \ldots - Tr(1-d)^{n-1}, \\ s(nT + q - 1) = s(nT) - (q-1)r(1-d)^n = \\ = b - Tr - \ldots - Tr(1-d)^{n-1} - (q-1)r(1-d)^n. \end{gathered}$$

Учитывая вышеуказанные представления, можем записать следующее равенство, где вместо n, q будем пользоваться записью n_1, q_1

$$b = Tr(1 + (1-d) + (1-d)^2 + \ldots + (1-d)^{n_1 - 1}) + \\ + (q_1 - 1)r(1-d)^{n_1} + s(n_1 T + q_1 - 1). \quad (3)$$

Обозначим $b_3 = s(n_1 T + q_1 - 1)$ и преобразуем равенство (3), получим

$$b = Tr\frac{1 - (1-d)^{n_1}}{d} + (q_1 - 1)r(1-d)^{n_1} + b_3. \quad (4)$$

Данное равенство означает, что нагрузка b больше чем количество никотина, перебрасываемого за n_1-периодов, но меньше чем количество никотина, перебрасываемого за (n_1+1)-период. Запишем данное утверждение в виде системы неравенств

$$\begin{cases} b \geqslant Tr\dfrac{1-(1-d)^{n_1}}{d}, \\ b < Tr\dfrac{1-(1-d)^{n_1+1}}{d}. \end{cases} \tag{5}$$

То есть нахождение количества периодов есть, например, поиск точной нижней грани множества элементов $n_1 \in N_0$, удовлетворяющих нижнему неравенству системы (5).

$$n_1 = \inf\left\{p \in N_0 : \quad b < Tr\frac{1-(1-d)^{p+1}}{d}\right\}. \tag{6}$$

Далее, произведя элементарные преобразования над неравенством в (6) и исходя из того, что $T, r, d > 0$, получим

$$p > log_{(1-d)}\left(1-\frac{bd}{Tr}\right) - 1. \tag{7}$$

Так как $n_1 \in N_0$, то из (6),(7) следует

$$n_1 = \left[log_{(1-d)}\left(1-\frac{bd}{Tr}\right)\right]. \tag{8}$$

Таким образом, первая часть леммы доказана.

Далее, найдём количество шагов в последнем неполном периоде постоянства меры переброса, затрачиваемое на освобождение реснички. Рассмотрим равенство (4). Оно означает, что количество никотина, оставшееся по истечению n_1-периодов, больше чем количество никотина, перебрасываемого за (q_1-1)-такт, но меньше чем количество никотина, перебрасываемого за q_1-тактов. Запишем сказанное в виде системы неравенств

$$\begin{cases} b - Tr\dfrac{1-(1-d)^{n_1}}{d} > (q_1-1)r(1-d)^{n_1}, \\ b - Tr\dfrac{1-(1-d)^{n_1}}{d} \leqslant q_1 r(1-d)^{n_1}. \end{cases} \tag{9}$$

По аналогии с нахождением количества периодов, нахождение количества тактов в последнем неполном периоде есть поиск точной нижней грани множества элементов $q_1 \in N_0$, удовлетворяющих нижнему неравенству системы (9)

$$q_1 = \inf\left\{v \in N_0 : \quad b - Tr\frac{1-(1-d)^{n_1+1}}{d} \leqslant vr(1-d)^{n_1}\right\}. \tag{10}$$

Далее, произведя элементарные преобразования над неравенством в (10) и исходя из того, что $T, r, d > 0$, получим

$$v \geqslant \frac{bd - Tr}{rd(1-d)^{n_1}} + \frac{T}{d} \tag{11}$$

Так как $q_1 \in N_0$, то из (10),(11) следует

$$q_1 = \left]\frac{bd - Tr}{rd(1-d)^{n_1}} + \frac{T}{d}\right[\tag{12}$$

Таким образом, верхней ресничке ребра для полного освобождения от нагрузки необходимо ровно

$$\tau_1 = Tn_1 + q_1$$

тактов, где

$$n_1 = \left[log_{(1-d)}\left(1 - \frac{bd}{Tr}\right)\right], \quad q_1 = \left]\frac{bd - Tr}{rd(1-d)^{n_1}} + \frac{T}{d}\right[.$$

А из (4) следует, что количество никотина, переброшенного в последний момент времени, равно

$$b_3 = b - Tr\frac{1-(1-d)^{n_1}}{d} - (q_1 - 1)r(1-d)^{n_1}.$$

Лемма доказана.

Утверждение 1. *Пусть* $b, m, t_0 \in N,\quad J \in N_m \setminus \{1\},\quad r, x \in Q \setminus \{0\},\quad d \in \left(0; \frac{1}{2}\right],\quad r^0 \in \{r(1-d),\ r - r(1-d)\}\quad r(t_0) = r$. *Если выполнены конфигурации (13), тогда будут выполнены конфигурации (14).*

$$s(i,j,t_0)=\begin{cases} 0, \quad J-j=2v, \quad 1\leqslant j<J\\ r, \quad J-j=2v+1, \quad 1\leqslant j<J\\ x, \quad j=J\\ b, \quad j>J\end{cases} \tag{13}$$

$$s(i,j,t_0+J)=\begin{cases} r^0, \quad J-j=2v, \quad 1\leqslant j<J\\ 0, \quad J-j=2v+1, \quad 1\leqslant j<J\\ x, \quad j=J\\ b, \quad j>J\end{cases} \tag{14}$$

Доказательство по индукции:
Базис индукции:
$J=2$

$$s(i,j,t_0)=\begin{cases} r,\ j=1\\ x,\ j=J\\ b,\ J<j\leqslant m\end{cases} \Rightarrow s(i,j,t_0+1)=\begin{cases} r-r(1-d),\ j=1\\ x,\ j=J\\ b,\ J<j\leqslant m\end{cases} \Rightarrow$$

$$s(i,j,t_0+2)=\begin{cases} 0,\ j=1\\ x,\ j=J\\ b,\ J<j\leqslant m\end{cases} \approx s(i,j,t_0+J)=\begin{cases} 0,\ J-j=2v+1,\\ \qquad 1\leqslant j<J\\ x,\ j=J\\ b,\ J<j\leqslant m\end{cases}$$

$J=3$

$$s(i,j,t_0)=\begin{cases} 0,\ j=1\\ r,\ j=2\\ x,\ j=J\\ b,\ J<j\leqslant m\end{cases} \Rightarrow s(i,j,t_0+1)=\begin{cases} r(1-d),\ j=1\\ r-r(1-d),\ j=2\\ x,\ j=J\\ b,\ J<j\leqslant m\end{cases} \Rightarrow$$

$$s(i,j,t_0+2)=\begin{cases} 0,\ j=1\\ r-r(1-d),\ j=2\\ x,\ j=J\\ b,\ J<j\leqslant m\end{cases} \Rightarrow s(i,j,t_0+3)=\begin{cases} r-r(1-d),\ j=1\\ 0,\ j=2\\ x,\ j=J\\ b,\ J<j\leqslant m\end{cases} \approx$$

$$s(i,j,t_0+J)=\begin{cases} r^0,\ J-j=2v,\ 1\leqslant j<J\\ 0,\ J-j=2v+1,\ 1\leqslant j<J\\ x,\ j=J\\ b,\ J<j\leqslant m\end{cases}$$

Индукционное допущение:

Рассмотрим конфигурации (13). Пусть для реснички с номером $J-2$ выполнилось предположение индукции. Докажем, что выполнится и для реснички с номером J. То есть через $J-2$ шага образуется распределение нагрузок (14). Но на ресничке с номером $J-2$ нагрузка равна нулю, поэтому в течение прошедших тактов реснички с большим номером в ребре будут осуществлять переброс ресничке с номером $J-2$.

$$s(i,j,t_0) = \begin{cases} 0, & J-j=2v, \quad 1 \leqslant j < J \\ r, & J-j=2v+1, \quad 1 \leqslant j < J \\ x, & j=J \\ b, & j>J \end{cases} \Rightarrow$$

$$s(i,j,t_0+J-2) = \begin{cases} r^0, & J-j=2v, \quad 1 \leqslant j < J-2 \\ 0, & J-j=2v+1, \quad 1 \leqslant j < J-2 \\ r(1-d), & j=J-2 \\ r-r(1-d), & j=J-1 \\ x, & j=J \\ b, & j>J \end{cases} \Rightarrow$$

$$s(i,j,t_0+J-1) = \begin{cases} 0, & J-j=2v, \quad 1 \leqslant j < J-2 \\ r^0, & J-j=2v+1, \quad 1 \leqslant j < J-2 \\ 0, & j=J-2 \\ r-r(1-d), & j=J-1 \\ x, & j=J \\ b, & j>J \end{cases} \Rightarrow$$

$$s(i,j,t_0+J) = \begin{cases} r^0, & J-j=2v, \quad 1 \leqslant j < J-2 \\ 0, & J-j=2v+1, \quad 1 \leqslant j < J-2 \\ r-r(1-d), & j=J-2 \\ 0, & j=J-1 \\ x, & j=J \\ b, & j>J \end{cases} \approx$$

$$s(i,j,t_0+J)=\begin{cases} r^0, \quad J-j=2v, \quad 1\leqslant j<J \\ 0, \quad J-j=2v+1, \quad 1\leqslant j<J \\ x, \quad j=J \\ b, \quad j>J \end{cases}$$

Таким образом, получено распределение нагрузок, приведённое в конфигурациях (14). Утверждение доказано.

Лемма 2. *Пусть* $b, T, \tau_J, m, q'_{J-1} \in N$*;* $J \in N_m \setminus \{1\}$*;* $r, b_4 \in Q \setminus \{0\}$*;* $d \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$*;* $T > \frac{bd}{r} + m$*;* $q'_{J-1} < T$*;* $r(0) = r$*,* $r(q'_{J-1}+1) = r(1-d)$

$$s(1,j,0)=\begin{cases} 0, \quad J-j=2v+1 \quad 1\leqslant j<J \\ r, \quad J-j=2v \quad 1\leqslant j<J \\ b, \quad J<j\leqslant m \end{cases}$$

и пусть τ_J *— это время освобождения реснички с номером* J *от всей нагрузки, тогда* $\exists n_J, q_J$ *:*

$$\begin{cases} \tau_J = q'_{J-1} + n_J T + q_J, \\ n_J = \left[log_{(1-d)} \left(1 - \frac{d\left(b - \left] \frac{q'_{J-1}}{2} \right[r\right)}{\left] \frac{T-J}{2} \right[r(1-d)} \right) \right], \\ q_J = 2 \left] \frac{b - \left] \frac{q'_{J-1}}{2} \right[r - \left] \frac{T-J}{2} \right[r(1-d) \frac{1-(1-d)^{n_J+1}}{d}}{r(1-d)^{n_J}} \right[+ J, \end{cases} \tag{15}$$

если до следующего изменения меры переброса осталось q'_{J-1} *тактов. Причём на последнем такте ресничка с номером* J *перебросит нагрузку равную*

$$b_4 = b - \left] \frac{q'_{J-1}}{2} \right[r - \left] \frac{T-J}{2} \right[r(1-d) \frac{1-(1-d)^{n_J+1}}{d} - \left] \frac{q_J - J - 2}{2} \right[r(1-d)^{n_J}.$$

Доказательство. Нагрузка b на ресничке с номером J представима в виде

$$b = b_1 + b_3 + b_3 + b_4,$$

где b_1 — количество никотина, переданного за начальные q'_{J-1} тактов, b_2 — количество никотина, переданного за n_J полных периодов, b_3 — количество никотина, переданного за последний неполный период, b_4 — количество никотина, переданного за последний такт, в момент полного освобождения реснички от своей нагрузки. Далее, для простоты, выражение $s(i,J,t)$ переобозначим через $s(t)$, подразумевая, что это количество никотина, находящегося на ресничке с номером J в момент времени t, и пусть $s(0)=b$. Тогда

$$s(q'_{J-1}) = s(0) - b_1 = b - \left]\frac{q'_{J-1}}{2}\right[r.$$

Также мы знаем из Утверждения, что при очередном уменьшении меры переброса, во время очищения реснички с номером J, происходит задержка на J тактов, то есть ровно столько тактов длится процесс нормализации. Следовательно можем записать следующее

$$s(q'_{J-1}+T) = s(q'_{J-1}) - \left]\frac{T-J}{2}\right[r(1-d),$$

$$s(q'_{J-1}+n_J T) = s(q'_{J-1}+(n_J-1)T) - \left]\frac{T-J}{2}\right[r(1-d)^{n_J},$$

$$s(q'_{J-1}+n_J T+q_J-1) = s(q'_{J-1}+n_J T) - \left]\frac{q_J-J}{2}\right[r(1-d)^{n_J+1}.$$

Учитывая вышеуказанные представления, можем записать следующее равенство:

$$b = \left]\frac{q'_{J-1}}{2}\right[r + \left]\frac{T-J}{2}\right[r(1-d)\frac{1-(1-d)^{n_J}}{d} + \\ + \left]\frac{q_J-J-2}{2}\right[r(1-d)^{n_J} + s(q'_{J-1}+n_J T+q_J) \quad (16)$$

Оно означает, что нагрузка b больше чем количество никотина, переданного за n_J-периодов, но меньше чем количество никотина, переданного за (n_J+1)-периодов.

Найдём количество полных периодов. По аналогии с леммой 1 запишем следующую систему неравенств

$$\begin{cases} b > \left]\frac{q'_{J-1}}{2}\right[r + \left]\frac{T-J}{2}\right[r(1-d)\frac{1-(1-d)^{n_J}}{d}, \\ b \leqslant \left]\frac{q'_{J-1}}{2}\right[r + \left]\frac{T-J}{2}\right[r(1-d)\frac{1-(1-d)^{n_J+1}}{d}. \end{cases} \quad (17)$$

Аналогично лемме 1 можем заключить, что нахождение количества полных периодов есть, например, поиск точной нижней грани множества элементов $n_J \in N_0$, удовлетворяющих нижнему неравенству системы (17).

$$n_J = \inf\left\{p \in N_0: \quad b \leqslant \left]\frac{q'_{J-1}}{2}\right[r + \left]\frac{T-J}{2}\right[r(1-d)\frac{1-(1-d)^{p+1}}{d}\right\}. \tag{18}$$

Далее, произведя элементарные преобразования над неравенством в (18) и исходя из того, что $T, r, d > 0$, получим

$$p \geqslant log_{(1-d)}\left(1 - \frac{d\left(b - \left]\frac{q'_{J-1}}{2}\right[r\right)}{\left]\frac{T-J}{2}\right[r(1-d)}\right) - 1. \tag{19}$$

Так как $n_J \in N_0$, то из (18), (19) следует

$$n_J = \left[log_{(1-d)}\left(1 - \frac{d\left(b - \left]\frac{q'_{J-1}}{2}\right[r\right)}{\left]\frac{T-J}{2}\right[r(1-d)}\right)\right]. \tag{20}$$

Таким образом, первая часть леммы доказана.

Далее, найдём количество шагов в последнем неполном периоде постоянства меры переброса, затрачиваемое на освобождение реснички. Рассмотрим равенство (16). Оно означает, что количество никотина, оставшегося по истечению n_J периодов, больше чем количество никотина, перебрасываемого за $(q_J - 1)$-такт, но меньше чем количество никотина, перебрасываемого за q_1-тактов. Аналогично нахождению количества периодов, можем заключить следующее

$$q_J = \inf\Big\{v \in N_0: \quad b - \left]\frac{q'_{J-1}}{2}\right[r - \left]\frac{T-J}{2}\right[r(1-d)\frac{1-(1-d)^{n_J}}{d} \leqslant \\ \leqslant \left]\frac{q_J - J}{2}\right[r(1-d)^{n_J}\Big\}. \tag{21}$$

Произведя элементарные преобразования, получим

$$q_J = 2\left]\frac{b - \left]\frac{q'_{J-1}}{2}\right[r - \left]\frac{T-J}{2}\right[r(1-d)\frac{1-(1-d)^{n_J+1}}{d}}{r(1-d)^{n_J}}\right[+ J,$$

и из (16) следует, что на последнем такте ресничка перебросит

$$b_4 = b - \left]\frac{q'_{J-1}}{2}\right[r - \left]\frac{T-J}{2}\right[r(1-d)\frac{1-(1-d)^{n_J+1}}{d} - \left]\frac{q_J - J - 2}{2}\right[r(1-d)^{n_J}.$$

Таким образом, время освобождения реснички равно $\tau_J = q'_{J-1} + n_J T + q_J$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия лемм 1 и 2 и дерево имеет глубину 1. Тогда*

$$L(D(b,r,m,l,T,k)) = \sum_{j=1}^{m} \tau_j + \omega; \quad \omega \in \{m-1,\ 2m-2-T+q_m\},$$

где τ_j, q_m *определяются из лемм 1 и 2.*

Доказательство. По леммам 1 и 2 можем определить время очищения любой реснички. Далее, просуммировав их, получим количество тактов, прошедших с момента, когда началось освобождение первой реснички до момента образования следующей конфигурации нагрузок на ресничках

$$s(1,j,t) = \begin{cases} r(t), & m-j = 2v+1 \\ 0, & m-j = 2v \end{cases} \qquad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Из леммы 2 следует, что после такого процесса до очередного уменьшения меры переброса остается $T - q_m$ тактов. Если $T - q_m \geqslant m-1$, тогда через $m-1$ тактов все реснички ребра полностью освободятся от своих нагрузок. Иначе, по мере продвижения нагрузки на предпоследней ресничке вверх, в какой-то момент случится очередное уменьшение меры переброса. А случится оно на ресничке с номером $m-1-T+q_m$. Тогда опять произойдёт задержка на $m-1-T+q_m$ тактов и продолжится процесс очищения. И затратится $2m-2-T+q_m$ тактов. Откуда вытекает утверждение леммы.

Заметим следующее. Если дерево загружено полностью, тогда процесс очищения рёбер на одном уровне происходит синхронно и одновременно. То есть они начинают процесс очищения в одно и то же время и заканчивают его в одно и то же время. При этом данное утверждение справедливо и для ресничек имеющих одинаковые номера внутри рёбер на одном уровне.

Если все рёбра уровня i, где $i = 0, 1, \dots, l$, объединим в одно ребро, но параметры которого есть сумма параметров ребер, которые участвовали в объединении, то мы получим столбец из псевдоребер, у которых соответствующие параметры равны (см. рис. 2).

1	2^lb	2^lr
2	2^lb	2^lr
...	...	...
m	2^lb	2^lr
...	...	...
...	...	...
1	2^lb	2^lr
2	2^lb	2^lr
...	...	...
m	2^lb	2^lr
...	...	...
...	...	...
1	2^lb	2^lr
2	2^lb	2^lr
...	...	...
m	2^lb	2^lr

Рис. 2. Начальная конфигурация псевдоребра.

Данный столбец можно объединить в одно ребро, так как у всех ресничек равны соответствующие параметры, а именно меры переброса и максимальные нагрузки. Поменяем лишь нумерацию ресничек следующим образом. Если ресничка имеет номер j в псевдоребре уровня i, то ее номер будет определяться по формуле $im + j$.

Таким образом, мы свели задачу изучения дерева глубины $l + 1$ к задаче изучения дерева глубины 1, то есть дерева, состоящего из одного ребра. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $b, m, T, l \in N$; $\quad k \in [1; 2]$; $\quad r \in Q \setminus \{0\}$. *Тогда*

$$L(b, r, m, l + 1, T, k) = L(D^{-1}(2^l b, 2^l r, (l + 1)m, T, k)).$$

То есть время очищения полностью загруженного дерева равно времени очищения псевдоребра.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия всех выше приведенных лемм, Утверждений и теорем. Тогда*

$$L(b, r, m, l{+}1, T, k) = \sum_{j=1}^{(l+1)m} \tau_j + \omega; \quad \omega \in \{(l{+}1)m{-}1,\ 2(l{+}1)m{-}2{-}T{+}q_m\},$$

где τ_j, q_m определяются из лемм 1 и 2 лишь с заменой r на $2^l r$, b на $2^l b$, m на $(l+1)m$.

Доказательство. По теореме 1 время очищения полностью загруженного дерева равно времени очищения псевдоребра, а время очищения псевдоребра можно найти, применив лемму 3, лишь заменив r на $2^l r$, b на $2^l b$, m на $(l+1)m$. Что и показано в формулировке теоремы. Теорема доказана.

В заключение хотелось выразить свою признательность научному руководителю Черновой Ю. Г. и академику Кудрявцеву В. Б. и отметить, что данная статья не могла появится на свет без их помощи и поддержки. Также хотелось бы отдельно поблагодарить моих родителей за постоянную веру в меня.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[2] Гераськина Ю. Г. Модель самоочищения лёгочных структур // Интеллектуальные системы. — 2002–2003. — Т. 7, вып. 1–4. — С. 41–54.

[3] Гераськина Ю. Г. Модель процесса дыхания живых организмов // Интеллектуальные системы. — 2004. — Т. 8, вып. 1–4. — С. 429–456.

[4] Гераськина Ю. Г. Об одной автоматной модели в биологии // Дискретная математика. — 2007. — Т. 19, вып. 3. — С. 122–139.

[5] Докучаева Т. В. Процесс самоочищения лёгких с очаговыми поражениями в чистой среде // Интеллектуальные системы. — 2010. — Т. 14, вып. 1-4. — С. 157–182.