

# Итеративные пропозициональные исчисления

Г. В. Боков

В данной работе вводятся в рассмотрение итеративные пропозициональные исчисления, представляющие собой конечные множества пропозициональных формул вместе с операцией *modus ponens* и операцией суперпозиции, заданной множеством операций Мальцева. Для таких исчислений изучается вопрос разрешимости проблемы выразимости. В частности будет показано, что существуют неразрешимые итеративные исчисления. Будет предложен подход описания разрешимых итеративных исчислений, основанный на задании таких исчислений клонами  $k$ -значных логик. Кроме того, будет описана решетка клонов трёхзначной логики, порождающих итеративные исчисления, и доказана континуальность множества разрешимых итеративных исчислений.

**Ключевые слова:** итеративное пропозициональное исчисление, интерпретация, конечная модель, клоны трёхзначной логики.

## 1. Основные понятия

Пусть  $\Sigma$  — множество логических связок,  $\mathcal{V}$  — счетное множество (пропозициональных) переменных.  $\Phi_\Sigma(X)$  — множество (пропозициональных) формул над логическими связками  $\Sigma$  и множеством переменных  $X \subseteq \mathcal{V}$ . Положим  $\Phi_\Sigma = \Phi_\Sigma(\mathcal{V})$ .

Операции над формулами:

1) *Схемные*

$$F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n) \vdash F_0(x_1, \dots, x_n);$$

2) *Суперпозиция* (операции Мальцева)

$$F, G \vdash F(G).$$

Положим  $[\mathcal{P}]$  — замыкание множества формул  $\mathcal{P} \subseteq \Phi_\Sigma$  относительно схемных операций и суперпозиции. Замкнутые относительно оператора  $[\cdot]$  множества формул будем называть *итеративными пропозициональными исчислениями*.

## 2. Неразрешимые итеративные исчисления

Рассмотрим проблему выразимости для итеративных исчислений, которая состоит в описании всех таких пар исчислений  $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ , для которых  $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ .

**Теорема 1.** *Проблема выразимости для итеративных пропозициональных исчислений алгоритмически неразрешима.*

Исчисление  $\mathcal{P}$  будем называть *разрешимым*, если существует алгоритм, который по произвольной формуле  $F \in \Phi_\Sigma$  отвечает на вопрос:  $F \in \mathcal{P}$ ? Как следствие из теоремы 1 получаем.

**Следствие.** *Существует неразрешимые итеративные пропозициональные исчисления.*

## 3. Разрешимые итеративные исчисления

Положим  $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ . Обозначим через  $P_k^n$  множество всех функций  $k$ -значной логики от  $n$  переменных и через  $P_k$  — множество всех функций  $k$ -значной логики.

Всякое отображение  $\varphi: \Sigma \rightarrow P_k$  множества логических связок  $\Sigma$  в множество функций  $k$ -значной логики будем называть  *$k$ -значной интерпретацией*. Каждой формуле  $F \in \Phi_\Sigma$  в интерпретации  $\varphi$  соответствует некоторая функция из  $P_k$ , которую будем обозначать через  $\varphi_F$ .

Фиксируем некоторую интерпретацию  $\varphi$ . Каждой операции  $\omega$ , заданной схемой

$$F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n) \vdash F_0(x_1, \dots, x_n),$$

в интерпретации  $\varphi$  соответствует преобразование  $\varphi_\omega$  на уровне функций

$$\varphi_{F_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{F_m}(x_1, \dots, x_n) \vdash \varphi_{F_0}(x_1, \dots, x_n).$$

Рассмотрим конечную алгебру  $\langle E_k; \varphi; Q \rangle$  вместе с выделенным клоном операций  $Q \subseteq P_k$ . Будем говорить, что формула  $F \in \Phi_\Sigma$  истинна в алгебре  $\langle E_k; \varphi; Q \rangle$ , если  $\varphi_F \in Q$ .

Пусть  $\mathcal{P}$  — итеративное пропозициональное исчисление, замкнутое относительно схемных операций  $\Omega = \{\omega_i\}_{i \in I}$ . Моделью исчисления  $\mathcal{P}$  будем называть всякую алгебру  $\langle E_k; \varphi; Q \rangle$ , для которой

- 1) все аксиомы  $\mathcal{P}$  истинны в  $\langle E_k; \varphi; Q \rangle$ ;
- 2) множество функций  $Q$  замкнуто относительно преобразований  $\{\varphi_{\omega_i}\}_{i \in I}$ , то есть для любой операции  $\omega \in \Omega$  всякий раз, когда  $\varphi_{F_i}(g_1, \dots, g_n) \in Q$ ,  $1 \leq i \leq m$ , для некоторых  $g_1, \dots, g_n \in P_k$ , результирующая функция  $\varphi_{F_0}(g_1, \dots, g_n) \in Q$ .

Из определения модели следует, что всякая выводимая формула исчисления  $\mathcal{P}$  истинна в любой модели  $\mathcal{P}$ .

Будем говорить, что исчисление  $\mathcal{P}$  обладает (*конечным*) *модельным свойством*, если для любой формулы  $F \notin [\mathcal{P}]$  существует модель  $\langle E_k; \varphi; Q \rangle$  исчисления  $\mathcal{P}$ , в которой формула  $F$  ложна, то есть  $\varphi_F \notin Q$ .

**Теорема 2.** *Если исчисление  $\mathcal{P}$  обладает конечным модельным свойством, то  $\mathcal{P}$  разрешимо.*

Если фиксировать значность логики  $k$  и интерпретацию  $\varphi$ , то каждый клон  $Q \in P_k$  однозначно задает множество формул  $\mathcal{P}_Q$ , истинных в модели  $\langle E_k; \varphi; Q \rangle$ . Если  $Q$  замкнуто относительно преобразований  $\{\varphi_{\omega_i}\}_{i \in I}$ , то непосредственно из определения модели следует, что  $\mathcal{P}_Q$  замкнуто относительно схемных операций  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  и операции суперпозиции и, следовательно, является итеративным пропозициональным исчислением. Согласно теореме 2 имеем.

**Следствие.** *Каждый клон  $Q \in P_k$ , замкнутый относительно  $\{\varphi_{\omega_i}\}_{i \in I}$ , определяет разрешимое итеративное исчисление  $\mathcal{P}_Q$ , замкнутое относительно  $\{\omega_i\}_{i \in I}$ .*

Поэтому описание решетки клонов в  $P_k$ , замкнутых относительно схемных преобразований, позволяет описать часть решетки разрешимых итеративных исчислений.

#### 4. Клоны, порождающие итеративные исчисления

Фиксируем значность логики  $k$  и интерпретацию  $\varphi$ . Пусть  $\pi \subseteq E_k^n$  —  $l$ -местный предикат на множестве  $E_k$ . Будем говорить, что функция  $f \in F_k^n$ , где  $n \geq 0$ ,  $\mu$ -сохраняет предикат  $\pi$ , если для любых наборов  $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu \in E_k^{n-l}$  таких, что  $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$ ,  $\alpha_{i,j} \in E_k^l$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , и  $f(\alpha_i) \notin \pi$  для всех  $i \in \{1, \dots, \mu\}$ , найдется такое  $j \in \{1, \dots, n\}$ , для которого  $\alpha_{i,j} \notin \pi$  для всех  $i \in \{1, \dots, \mu\}$ . Множество всех таких функций обозначим через  $T_{\pi,\mu}$ .

Рассмотрим схемную операцию  $\omega$

$$F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n) \vdash F_0(x_1, \dots, x_n)$$

и ее представление  $\varphi_\omega$  в интерпретации  $\varphi$

$$\varphi_{F_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{F_m}(x_1, \dots, x_n) \vdash \varphi_{F_0}(x_1, \dots, x_n).$$

Будем говорить, что операция  $\omega$   $\mu$ -сохраняет предикат  $\pi$ , если для любых наборов  $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu \in E_k^{n-l}$  таких, что  $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$ ,  $\alpha_{i,j} \in E_k^l$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , и  $\varphi_{F_0}(\alpha_i) \notin \pi$  для всех  $i \in \{1, \dots, \mu\}$ , найдется такое  $j \in \{1, \dots, m\}$ , для которого  $\varphi_{F_j}(\alpha_i) \notin \pi$  для всех  $i \in \{1, \dots, \mu\}$ . Множество всех таких операций обозначим через  $O_{\pi,\mu}$ .

**Теорема 3.** Если  $\{\omega_i\}_{i \in I} \subseteq O_{\pi,\mu}$ , то клон  $T_{\pi,\mu'}$  замкнут относительно преобразований  $\{\varphi_{\omega_i}\}_{i \in I}$  для любого  $\mu' \leq \mu$ .

Как следствие из теоремы 3 имеем.

**Следствие.** Каждый клон  $T_{\pi,\mu}$  определяет итеративное исчисление, замкнутое относительно операций  $O_{\pi,\mu'}$ ,  $\mu' \geq \mu$ .

Простейшими примерами клонов  $T_{\pi,\mu}$  являются классы функций двузначной логики, обладающие свойством  $A_\mu$ . В этом случае предикат  $\pi$  является константой 1. Такие клоны замкнуты относительно преобразований:

$$x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n, y) \vdash y,$$

где  $f$  — функция обладающая свойством  $A_\infty$ . Следовательно, они являются моделями для итеративных пропозициональных исчислений

с операцией суперпозиции и схемными операциями данного вида. В частности, они являются моделями для итеративных исчислений с операцией *modus ponens*

$$x_1, x_1 \rightarrow x_2 \vdash x_2.$$

Ниже приводится описание решётки клонов  $T_{2,\mu}$  в трёхзначной логике,  $\mu$ -сохраняющих константу 2. Как следствие из описания решётки будет установлена континуальность множества всех разрешимых итеративных исчислений.

## 5. Решетка клонов трёхзначной логики, порождающая итеративные исчисления

Определим следующие предикаты, которые понадобятся для формулировки результата:

$$\begin{aligned} \rho_{\vee,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 &\iff x_1 = 2 \vee x_2 = 2 \vee \dots \vee x_n = 2 \\ \rho_{\rightarrow,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 &\iff x_1 \neq 2 \vee x_2 = 2 \vee \dots \vee x_n = 2 \\ \rho_{=,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 &\iff x_1 = x_2 \vee x_3 = 2 \vee \dots \vee x_n = 2 \\ \rho_{\simeq,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 &\iff x_1 = x_2 \vee x_1 = 2 \vee x_2 = 2 \vee \dots \vee x_n = 2 \end{aligned}$$

Введем обозначения для следующих классов функций:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_3 &= \text{Pol}(\emptyset), & \mathbf{F} &= \text{Pol}((0, 1)), \\ \mathbf{T} &= \text{Pol}((2)), & \mathbf{M}_{01} &= \text{Pol}(\rho_{\rightarrow,2}), \\ \mathbf{M} &= \text{Pol}(\rho_{\sim}), & \mathbf{T}_{\infty} &= \text{Pol}(\bigcup_{n \geq 2} \rho_{\vee,n}), \\ \mathbf{T}_n &= \text{Pol}(\rho_{\vee,n}), & \mathbf{E}_{\infty} &= \text{Pol}(\bigcup_{n \geq 2} \rho_{\simeq,n}), \\ \mathbf{E} &= \text{Pol}(\rho_{\simeq,2}), & \mathbf{S} &= \text{Pol}(\rho_{\rightarrow,3}). \\ \mathbf{I} &= \text{Pol}(\rho_{=,3}), & & \end{aligned}$$

Пересечение замкнутых классов  $Q_1, Q_2$  будем обозначать через  $Q_1 Q_2$ . Например,

$$\mathbf{T}_{\infty} \mathbf{F} \mathbf{M}_{01} = \mathbf{T}_{\infty} \cap \mathbf{F} \cap \mathbf{M}_{01}.$$

Определим семейство  $\Theta$ , состоящее из всевозможных пересечений замкнутых классов

$$\mathbf{P}_3, \mathbf{T}, \mathbf{F}, \mathbf{M}_{01}, \mathbf{T}_n, \mathbf{T}_\infty, \mathbf{E}, \mathbf{E}_\infty, \mathbf{I}, \mathbf{S}$$

а также замкнутых классов, задаваемых множествами предикатов  $\rho_{\simeq, n}$  для произвольных  $n \geq 2$ .

**Теорема 4.** *Множество  $\Theta$  состоит из всех замкнутых классов функций в  $P_3$ , содержащих функцию*

$$f_{2, \max}(x, y) = \begin{cases} 2, & x = 2 \vee y = 2; \\ x|y, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На рис. 1 схематично изображена решетка замкнутых классов семейства  $\Theta$ . Решетка представляет собой граф, вершинам которого соответствуют замкнутые классы семейства  $\Theta$ . Две вершины графа  $Q_1$  и  $Q_2$  соединены сплошным ребром, причем вершина  $Q_1$  расположена ниже  $Q_2$ , всякий раз, когда замкнутый класс  $Q_1$  является предполным в  $Q_2$ . Две вершины графа  $Q_1$  и  $Q_2$  соединены пунктирным ребром, причем вершина  $Q_1$  расположена ниже  $Q_2$ , всякий раз, когда  $Q_1 \subseteq Q_2$  и существует бесконечная последовательность различных замкнутых классов  $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$ , для которых выполнены следующие условия:

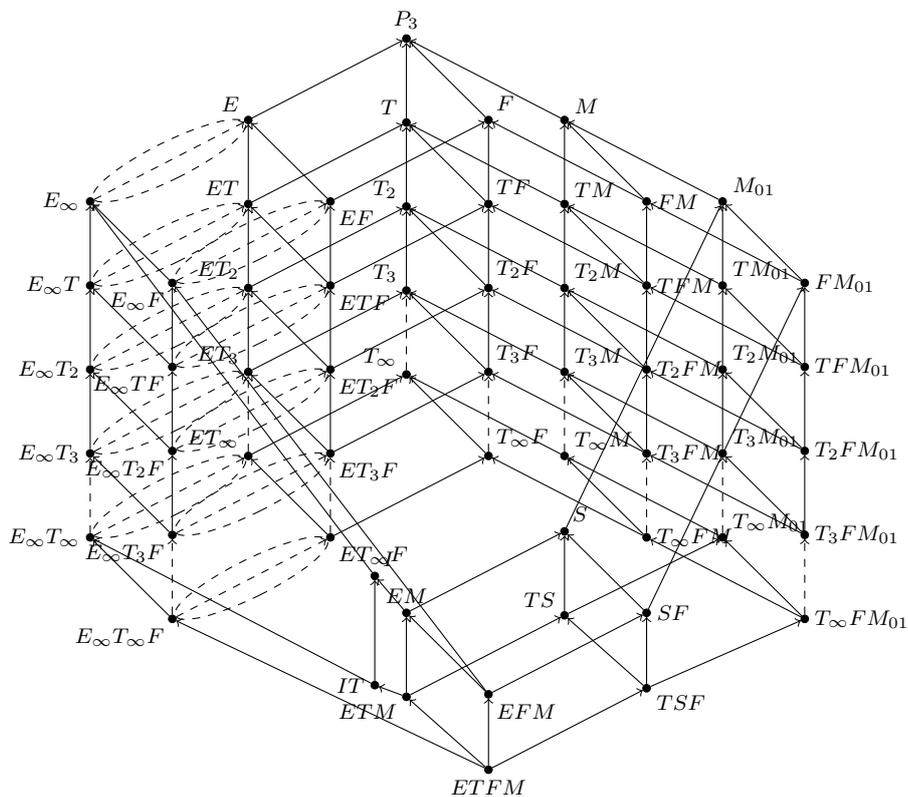
- 1)  $Q_2 \supseteq M_1$ ;
- 2)  $\bigcap_{i \geq 1} M_i = Q_1$ ;
- 3)  $M_{i+1}$  — предполный класс в  $M_i$  для любого  $i \geq 1$ .

Две вершины графа  $Q_1$  и  $Q_2$  соединены пунктирным ребром, помещенным в пунктирный эллипс, причем вершина  $Q_1$  расположена ниже  $Q_2$ , всякий раз, когда существует континуум замкнутых классов  $Q$ , которые удовлетворяют условиям:

$$Q_1 \subseteq Q \subseteq Q_2.$$

**Теорема 5.** *Замкнутые классы семейства  $\Theta$ , которые содержат  $E_\infty T_\infty F$ , определяют итеративные исчисления, замкнутые относительно операции *modus ponens*.*

Как следствие из описания надрешетки замкнутого класса  $E_\infty T_\infty F$  имеем.

Рис. 1. Надрешётка  $ETFM$ .

**Следствие.** Множество разрешимых итеративных исчислений имеет мощность континуума.

### Список литературы

- [1] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
- [2] Новиков П. С. Элементы математической логики. — М.: Наука, 1973.
- [3] Шенфилд Д. Математическая логика. — М.: Наука, 1975. — С. 314–323.

- [4] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.