Возможность и необходимость, принимающие значения в шкалах с неподвижными точками*

Д. А. Балакин

Рассмотрен вариант теории возможностей, позволяющий описать договоренность исследовательской группы об общей для них интерпретации некоторых значений возможности и необходимости. Это дает возможность уточнить критерий оптимальности решающего правила в задаче идентификации. Для случая моделирования стохастического объекта описан алгоритм восстановления возможности, принимающей значения в шкале с неподвижными точками, и самих этих точек.

Ключевые слова: возможность, необходимость, договоренность, оптимальное решающее правило.

Предисловие

Традиционное использование теории вероятностей для моделирования случайности и неопределенности обусловлено двумя ее фундаментальными аспектами: математическим, основанным на теории меры, и эмпирическим, позволяющим при определенных условиях на основе наблюдений получать сколь угодно точную аппроксимацию их вероятностной модели, а при известной вероятностной модели наблюдений предсказывать их событийно-частотные результаты. Но эмпирический аспект теории вероятностей не столь обоснован, как математический, поскольку не содержит критерия вероятностной природы наблюдений и критерия вышеупомянутых «определенных условий» наблюдения, а не всякий эксперимент со случайным исходом

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 14–07–00441.

имеет вероятностную модель. Если же эмпирически восстанавливается вероятностная модель сложного, но заведомо стохастического объекта, то и в этом случае могут возникнуть принципиальные трудности, связанные с эволюцией моделируемого объекта. С этим и связан интерес к невероятностным моделям случайности и неопределенности.

При моделировании эволюционирующего объекта представляют интерес такие его свойства, которые не изменяются в ходе любой допустимой его эволюции. В случае, если объект моделируется пространством с мерой, которая принимает значения в $[0,1]$, а группа изоморфизмов порождается группой всех возрастающих непрерывных биекций $[0,1]$ в себя, что соответствует сохранению лишь упорядоченности значений меры, этот подход приводит к первому варианту теории возможностей [1], кратко изложенному в разделе 1. В случае, если моделирующая объект мера принимает значения в $[0,1]$, а группа изоморфизмов порождается группой отображений $[0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha > 0$, что соответствует сохранению упорядоченности значений меры и отношений логарифмов значений, поскольку при отображении $x \mapsto x^\alpha$, $y \mapsto y^\alpha$ $\frac{\ln x}{\ln y} = \frac{\ln x^\alpha}{\ln y^\alpha}$, этот подход приводит к второму варианту теории возможностей [1]. В этой статье рассматривается вариант теории возможностей с иной группой изоморфизмов.

Некоторую группу исследователей может не устраивать ни полностью ранговая шкала, в которой содержательно интерпретироваться могут только значения 0 и 1, ни шкала значений второго варианта теории возможностей, в которой возможно только одновременное согласованное изменение всех значений возможности, например, поскольку им привычно работать с мерами, любые значения которых интерпретируемы. Для этого группа исследователей может договориться об общей для них интерпретации некоторых значений возможности, для чего эти интерпретируемые значения возможности должны не зависеть от выбора шкал значений возможности и необходимости. Например, группа исследователей может договориться об общей интерпретации значения возможности $1/2$ как «индифферентности». В более общем случае неподвижные точки — границы неподвижных интервалов, принадлежность которым значений возможности и необходимости событий имеют общую для некоторого сообщества интерпретацию, а исследователь, согласный с такой интерпретацией, задает упорядоченность возможностей элементарных событий и неподвижных точек. При этом каждый интервал с неподвижными концами с сужением упорядоченности и операций изоморфен шкале значений возможностей для первого варианта теории возможностей.

1. Элементы теории возможностей [1]

Значения возможности. Определим шкалу $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, +, \times)$ значений возможности, следуя [2, 3, 4] как интервал $[0,1]$ с упорядоченностью $\leqslant$, сложением $+ : [0,1]^2 \to [0,1]$ и умножением $\times : [0,1]^2 \to [0,1]$, группу $\overline{\Gamma}$ автоморфизмов $\gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, порожденную группой Γ строго монотонных непрерывных функций $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, сохраняющих упорядоченность $\leqslant$, с композицией «$\circ$» в качестве групповой операции.[1] Поскольку $\overline{\Gamma}$ — группа автоморфизмов $\mathcal{L}$, то $\forall \gamma \in \Gamma$

$$\gamma[0,1] = [0,1], \forall x, y \in [0,1]\, \gamma(x+y) = \gamma(x)+\gamma(y), \gamma(x\times y) = \gamma(x)\times\gamma(y). \tag{1}$$

Теорема 1 ([3, 2, 1]). *Если*

- $+$ *и* $\times$ *— непрерывные отображения* $[0,1]^2 \to [0,1]$,
- $\forall x, y \in [0,1]$

$$x \times y = y \times x, \quad 0 \times x = 0, \quad 1 \times x = x,$$
$$x + y = y + x, \quad 0 + x = x, \quad 1 + x = 1,$$

- $\forall \gamma \in \Gamma$ *выполнены условия* (1),

то $\forall x, y \in [0,1]$

$$x + y = \max\{x, y\}, x \times y = \min\{x, y\}. \tag{2}$$

Возможность принимает значения в $[0,1]$ и в рассматриваемой в [5] «качественной» и рассматриваемой в [5, 6, 7] «количественной»

[1] Возможен и другой подход: задать такие операции на шкале значений возможности, которые априори удовлетворяют условиям теоремы 1 и аналогу условий (1) при любой эволюции моделируемого объекта, и определить из условий (1) максимальную группу автоморфизмов. При выборе $a + b = \max\{a, b\}$, $a \times b = \min\{a, b\}$ этот подход приводит к тем же результатам. Вариант, в котором $a + b = \max\{a, b\}$, $a \times b = ab$ рассмотрен в [1, §1.16.1].

теории возможностей, но в этих работах не рассматривается шкала значений возможности и ее группа автоморфизмов. Выбор операций max и min, как правило (исключая, например, [8], где мера необходимости события определялась как функция от вероятностей элементарных событий), переходил из теории нечетких множеств.

В «качественной» теории возможностей [9] рассматривается возможность, множество значений которой — произвольная полная решетка с делением. Но использование интервала $[0,1]$ вместо произвольной полной решетки не только дает линейный порядок, позволяющий согласовать возможность и вероятность, но и позволяет использовать обобщение классической теории меры для неаддитивных мер [10, 11], в частности, для рассматриваемой далее меры необходимости выполняется теорема Егорова. Впрочем, существует обобщение на случай меры, принимающей значения в упорядоченном топологическом векторном пространстве [12].

Мера возможности. Для множества элементарных событий Ω определим [4] возможность $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \mathcal{L}$, где $\mathcal{A}$ — σ-алгебра на Ω равенствами

$$\mathrm{P}(E) \overset{\text{def}}{=} \underset{\omega\in E}{+} g(\omega) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\omega\in E} \mathrm{P}(\{\omega\}), E \in \mathcal{A}, \mathrm{P}(\Omega) = \sup_{\omega\in\Omega} g(\omega) \overset{\text{def}}{=} 1, \mathrm{P}(\varnothing) \overset{\text{def}}{=} 0,$$

где $g(\cdot) : \Omega \to \mathcal{L}$ — распределение возможности.

Эти равенства определяют (с точностью до выбора множества значений) меры возможности, рассмотренные в [9, 5, 6, 7], но в этих работах никак не обосновывается выбор операции, по которой мера возможности является разложимой.

Мера возможности, заданная на произвольной σ-алгебре $\mathcal{A}$, всегда может быть продолжена на максимальную по включению алгебру $\mathcal{P}(X)$ [1, 9, 13].

Мера необходимости. Поскольку возможности противоположных событий связывает лишь равенство $\mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(\Omega \setminus E)$, каждое событие охарактеризовано значениями двух мер: возможности $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ и необходимости $\mathrm{N} : \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ [14], принимающей значения в дуальной $\mathcal{L}$ шкале $\widetilde{\mathcal{L}} = ([0,1], \widetilde{\leqslant}, \widetilde{+}, \widetilde{\times})$, в которой $x \widetilde{\leqslant} y \Leftrightarrow x \geqslant y$, $\widetilde{0} = 1$, $\widetilde{1} = 0$, $\forall x, y \in [0,1]$

$$x \widetilde{+} y \overset{\text{def}}{=} \min\{x, y\}, x \widetilde{\times} y \overset{\text{def}}{=} \max\{x, y\}, \tag{3}$$

$\widetilde{\gamma}(x\widetilde{+}y) = \widetilde{\gamma}(x)\widetilde{+}\widetilde{\gamma}(y)$, $\widetilde{\gamma}(x\widetilde{\times}y) = \widetilde{\gamma}(x)\widetilde{\times}\widetilde{\gamma}(y)$. $\overline{\Gamma}$ — группа автоморфизмов и шкалы $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Мера необходимости [14, 15] $\mathrm{N} : \mathcal{A} \to \widetilde{L}$ определяется равенствами

$$\mathrm{N}(E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widetilde{\sum_{\omega\in\Omega\setminus E}} \widetilde{h}(\omega) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf_{\omega\in\Omega\setminus E} \mathrm{N}(\Omega\setminus\{\omega\}), E \in \mathcal{A},$$

$$\mathrm{N}(\varnothing) = \inf_{\omega\in\Omega} \widetilde{h}(\omega) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0, \ \ \mathrm{N}(\Omega) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1,$$

где $\widetilde{h}(\cdot) : \Omega \to \widetilde{\mathcal{L}}$ — распределение возможностей.

Эти равенства определяют (как и для возможности, с точностью до выбора множества значений) меру необходимости, рассмотренную в [5, 6], но в отличие от [5], в общем случае мера необходимости не является дуальной к мере возможности, то есть мера необходимости не обязана быть такой, что существует антитонная функция $\theta : [0, 1] \to [0, 1]$, для которой $\mathrm{N}(A) = \theta(\mathrm{P}(X \setminus A))$, $A \in \mathcal{A}$ (и тем более может не выполняться $\mathrm{N}(A) = 1 - \mathrm{P}(A)$, как в «качественной» теории возможностей в [5, 6]). Как и возможность, необходимость всегда может быть продолжена на $\mathcal{P}(X)$.

Условные и переходные возможность и необходимость.

В [1, 2] рассмотрены:

1) условная относительно σ-алгебры $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ возможность $\mathrm{P}(\cdot|\mathcal{D})$ — любое решение уравнения $\forall D \in \mathcal{D}\ \int\limits_D \mathrm{P}(\cdot|\mathcal{D}) d\,\mathrm{P}\,|_{\mathcal{D}} = \mathrm{P}(D \cap \cdot)$, где $\mathrm{P}\,|_{\mathcal{D}}$ — сужение P на $\mathcal{D}$ [15], $\int\limits_D f d\,\mathrm{P} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\limits_{\omega\in D} \min\{f(\omega), g(\omega)\}$ — интеграл относительно возможности P с распределением g по множеству D от функции f; так определенная возможность может не быть возможностью из-за ненормированности или отсутствия σ-аддитивности, поэтому в [3, 1, 2] в этой связи определена переходная возможность как аналог переходной вероятности;
2) условное распределение возможностей $g^{\xi|\eta}(\cdot|\cdot)$ (необходимостей $\widetilde{h}^{\xi|\eta}(\cdot|\cdot)$) нечеткого элемента ξ, принимающего значения в X, при условии равенства нечеткого элемента η, принимающего значения в Y, значению y — любое решение $\forall x \in X, \forall y \in Y$ $\min\{g^{\xi|\eta}(x|y), \sup\limits_{x'\in X} g^{\xi,\eta}(x', y)\} = g^{\xi,\eta}(x, y)$ $(\forall x \in X, \forall y \in Y$ $\max\{\widetilde{h}^{\xi|\eta}(x|y), \inf\limits_{x'\in X} \widetilde{h}^{\xi,\eta}(x', y)\} = \widetilde{h}^{\xi,\eta}(x, y))$ [16];

3) отображение $\mathrm{P}(\cdot|\cdot) : \mathcal{A}_1 \times \Omega_2 \to [0,1]$ ($\mathrm{N}(\cdot|\cdot) : \mathcal{A}_1 \times \Omega_2 \to [0,1]$) — переходная возможность (необходимость) на $(\Omega_2, \mathcal{A}_2), (\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, если при каждом $\omega_2 \in \Omega_2$ $\mathrm{P}(\cdot|\omega_2)$ ($\mathrm{N}(\cdot|\omega_2)$) есть возможность (необходимость) на $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$.
4) условная при условии B возможность $\mathrm{P}(\cdot|B)$ в [1] определена как возможность $\mathrm{P}(\cdot \cap B)$ со значениями в преобразованной шкале, в которой истинность B абсолютна: пусть $g_B : [0, \mathrm{P}(B)] \to [0,1]$ — произвольная непрерывная возрастающая биекция, тогда возможность $\mathrm{P}_{g_B}(\cdot|B) : \mathcal{A} \to [0,1]$, определенная равенством $\mathrm{P}_{g_B}(A|B) = g_B(\mathrm{P}(A \cap B))$, — вариант условной относительно B возможности, отвечающий функции g_B, причем так определенная условная возможность всегда является возможностью.

Условные возможности и необходимости в 1., 2. аналогичны условной возможности в «качественной» теории возможностей [5, 17], «количественной» теории возможностей [5, 7] и теории вероятности.

Изоморфизм шкал значений возможности. Каждый автоморфизм $\gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $\gamma : \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ определяет изоморфизм $\gamma : \mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, $\gamma : \widetilde{\mathcal{L}} \to \gamma\widetilde{\mathcal{L}}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$ следующим образом: $\mathcal{L} \ni x \mapsto \gamma(x) \in \gamma\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}} \ni \widetilde{x} \mapsto \gamma(\widetilde{x}) \in \gamma\widetilde{\mathcal{L}}$, $x+y \mapsto \gamma(x+y) = \gamma(x)+\gamma(y)$, $x\times y \mapsto \gamma(x\times y) = \gamma(x)\times\gamma(y)$, $x \leqslant y \Leftrightarrow \gamma(x) \leqslant \gamma(y)$, $x, y \in \mathcal{L}$, $x \widetilde{+} y \mapsto \gamma(x \widetilde{+} y) = \gamma(x) \widetilde{+} \gamma(y)$, $x \widetilde{\times} y \mapsto \gamma(x \widetilde{\times} y) = \gamma(x) \widetilde{\times} \gamma(y)$, $x \widetilde{\leqslant} y \Leftrightarrow \gamma(x) \widetilde{\leqslant} \gamma(y)$, $x, y \in \widetilde{\mathcal{L}}$. Обозначим $\gamma\mathcal{L}$ и $\widetilde{\gamma}\,\widetilde{\mathcal{L}}$, $\gamma, \widetilde{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, шкалы, изоморфные шкалам $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ и назовем эти шкалы «координатными представлениями» шкал $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Тем самым все шкалы $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, $\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$, $\widetilde{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, изоморфны, и любой исследователь сообразно своим предпочтениям может выбрать любую пару $\gamma\mathcal{L}$ и $\widetilde{\gamma}\mathcal{L}$, $\gamma, \widetilde{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, для формулировки нечеткой модели.

При этом, будучи сформулированными в некоторых парах (координатных представлений) шкал $\mathcal{L}'$, $\widetilde{\mathcal{L}}'$ и $\mathcal{L}''$, $\widetilde{\mathcal{L}}''$, модели считаются эквивалентными, если существует пара шкал $\mathcal{L} = \gamma'\mathcal{L}' = \gamma''\mathcal{L}''$ и $\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\gamma}'\widetilde{\mathcal{L}}' = \widetilde{\gamma}''\widetilde{\mathcal{L}}''$, $\gamma', \gamma'', \widetilde{\gamma}', \widetilde{\gamma}'' \in \overline{\Gamma}$, в которых их формулировки совпадают, а содержательно истолкованы могут быть только те, формулировки которых не зависят от выбора шкал $\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$, то есть одинаковы для всех исследователей [18].

Этот аспект данного варианта теории возможностей определяет содержательную интерпретацию возможности и необходимости и алгоритмы их эмпирического восстановления, что существенно отличается от «количественной» теории возможностей, где содержательно (как ограничение на вероятность события) истолковано может быть любое значение возможности [5, 6, 7], и делает его похожим на «качественную» теорию возможностей [5, 9] и представление возможности монотонным по включению предпорядком на $\mathcal{A}$ [7]. Но в «качественной» теории возможностей не рассматривается явно группа автоморфизмов шкалы значений возможности, поэтому в ней нельзя определить содержательно интерпретируемые значения возможности.

Стохастические модели возможности. Возможность P согласована [19, 1] с вероятностью Pr, если $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ выполняются условия $\Pr(A) \leqslant \Pr(B) \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$ и $\mathrm{P}(A) = 0 \Rightarrow \Pr(A) = 0$. Пусть множество элементарных событий конечно или счетно, вероятности элементарных событий $\{\mathrm{pr}_i\}$ и возможности элементарных событий $\{\mathrm{p}_i\}$ упорядочены по невозрастанию, тогда возможность максимально (то есть с максимальным количеством *различных* возможностей элементарных событий) согласована с вероятностью ($\Pr \approx> \mathrm{P}$), если $\mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{i} \mathrm{pr}_j + pr_i > 1$ и $\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{i} \mathrm{pr}_j + pr_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$.

Такое стохастическое моделирование возможности отличается как от стохастического моделирования в «качественной» теории возможностей, где оно отсутствует, так и от стохастического моделиования возможности в «количественной» теории возможностей, где вероятностная интерпретация возможности основывается на рассмотрении возможности как верхней вероятности, а необходимости — как нижней вероятности ([20, 6, 7]). В [1, §2.7] и [3, гл. 5, §3] рассмотрено построение на основе случайного множества варианта возможности, являющегося верхней вероятностью, но верхней вероятностью является именно один из эквивалентных вариантов возможности, нижней вероятностью — один из эквивалентных вариантов необходимости.

Эмпирическое восстановление возможности. Эмпирическая интерпретация вероятности события как предельного значения его частоты позволяет, сколь угодно точно предсказать его частоту в достаточно длинной последовательности взаимно независимых испытаний для известной вероятностной модели, если модель испытаний постоянна, и при тех же условиях сколь угодно точно оценить вероятность любого события, а следовательно, и модель испытания, если она неизвестна. Но если в процессе испытаний их вероятностная модель произвольно изменяется, то частоты событий не характеризуют их вероятности и не позволяют восстановить вероятностную модель каждого испытания, а вероятности событий не прогнозируют их частоты.

Как показано в [21, 1, 22], в случае конечного множества элементарных событий можно эмпирически восстановить на основе п.н. конечного числа испытаний упорядоченность возможностей, безошибочно совпадающую с истинной как если вероятности элементарных событий постоянны, так и если они изменяются при выполнении известных условий [21, 1, 2], если вероятностная модель испытаний остается согласованной с постоянной возможностной моделью.

В [1, 23] также определены методы построения коллективной экспертной оценки распределения возможностей нечеткого элемента, когда эксперты предлагают свои оценки распределения нечеткого элемента, и проверки гипотез о некомпетентности или сговоре экспертов.

Такие свойства эмпирического оценивания распределения возможности существенно отличают его от эмпирического оценивания распределения возможностей в «качественной» теории возможностей нормированной функцией правдоподобия [6, 5, 7] или с помощью доверительных интервалов [24, 25, 7]. В случае построения коллективной экспертной оценки эксперты могут использовать различные шкалы для своих оценок распределения возможностей, в этом заключается принципиальное отличие от методов построения экспертных оценок, рассматриваемых в [26, 27, 7].

Дуальная согласованность возможности и необходимости. Если меры P и N моделируют стохастический объект, то они дуально согласованы [1, 2.3.2], то есть существует такая функция θ из класса Θ непрерывных строго монотонных функций θ', для которых $\theta'(0) = 1$, $\theta'(1) = 0$ (в отличие от «качественной» теории возможностей в [5], где $\theta(x) = 1 - x$, $x \in [0, 1]$), что $\forall E \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{N}(E) = \theta(\mathrm{P}(\Omega \setminus E))$ и, следовательно, $\widetilde{h}(\omega) = \theta(g(\omega))$, $\omega \in \Omega$. При этом $\theta(x + y) = \theta(x)\widetilde{+}\theta(y)$, $\theta(x \times y) = \theta(x)\widetilde{\times}\theta(y)$, $x, y \in [0, 1]$, и если θ — «нечеткое отрицание», то «необходимость E» = «невозможность $\Omega \setminus E$».

Оптимальные решения. Следуя [1], рассмотрим модели наблюдения и правила принятия решений. Пусть K — множество состояний нечеткой системы, D — множество решений о ее состоянии, Λ — нечеткое множество, определенное субъектом, принимающим решения, на пространстве с возможностью и необходимостью, принимающее значения в классе $\mathcal{P}(K \times D)$ всех подмножеств $K \times D$, $\mathrm{pl}_{k,d}^{\Lambda} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{P}((k,d) \in \Lambda)$ $(\mathrm{nl}_{k,d}^{\Lambda} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{N}((k,d) \in \Lambda))$, $(k,d) \in K \times D$, — возможность (необходимость) потерь, обусловленных использованием нечеткой системы согласно решению d о ее состоянии, в то время как система находится в состоянии k. Состояние $\varkappa$ нечеткой системы и наблюдение ξ за ней определены как пара нечетких элементов и заданы их совместные распределения $g^{\varkappa,\xi} : X \times K \to [0,1]$ и $\widetilde{h}^{\varkappa,\xi} : X \times K \to [0,1]$. Тройку $(g^{\varkappa,\xi}, \widetilde{h}^{\varkappa,\xi}, \Lambda)$ назовем моделью идентификации, в которой $g^{\varkappa,\xi}, \widetilde{h}^{\varkappa,\xi}$ характеризуют свойства системы (нечеткую модель системы и схемы наблюдения за системой), а нечеткое множество Λ характеризует возможность и необходимость потерь.

В другой модели идентификации субъект, принимающий решения, определяет семейство $\mathcal{L}^{\lambda} = (L, \mathcal{P}(L), \mathrm{P}^{\lambda,(k,d)}, \mathrm{N}^{\lambda,(k,d)})$, $(k,d) \in K \times D$ нечетких пространств потерь, где λ — нечеткий элемент со значениями в множестве элементарных потерь L, отображения $\mathrm{P}^{\lambda,(\cdot,\cdot)} : (K \times D) \times \mathcal{P}(L) \to [0,1]$ и $\mathrm{N}^{\lambda,(\cdot,\cdot)} : (K \times D) \times \mathcal{P}(L) \to [0,1]$ — переходные возможность и необходимость для пространств $(K \times D, \mathcal{P}(K \times D))$, $(L, \mathcal{P}(L))$, $\mathrm{pl}_{k,d}^{\lambda} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{P}^{\lambda,(k,d)}(V)$, $\mathrm{nl}_{k,d}^{\lambda} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{N}^{\lambda,(k,d)}(V)$ — соответственно возможность и необходимость множества V потерь, существенных для субъекта, принимающего решения, отвечающих паре $(k,d) \in K \times D$. Тогда модель идентификации — тройка $(g^{\varkappa,\xi}, \widetilde{h}^{\varkappa,\xi}, \mathcal{L}^{\lambda})$, в которой $g^{\varkappa,\xi}, \widetilde{h}^{\varkappa,\xi}$ характеризуют свойства системы, а семейство $\mathcal{L}^{\lambda}$ нечетких пространств и множество V определены субъектом, принимающим решения, в соответствии с условиями ее функционирования при, возможно, неверной интерпретации ее состояний.

Решение о состоянии системы определим как нечеткий элемент δ, принимающий значения в D, $\pi^{\delta|\xi} : D \times X \to [0,1]$ и $\widetilde{\nu}^{\delta|\xi} : D \times X \to [0,1]$ — распределения переходной возможности, далее называемые нечеткими правилами решения δ о состоянии системы, основанными на наблюдении ξ, или нечеткими правилами идентификации.

В [1, 28] рассмотрены следующие критерии оптимальности решающих правил в задаче идентификации (их версии для второй модели интерпретации получаются заменой $\mathrm{pl}^{\Lambda}_{k,d}$ на $\mathrm{pl}^{\lambda}_{k,d}$, $\mathrm{nl}^{\Lambda}_{k,d}$ на $\mathrm{nl}^{\lambda}_{k,d}$ и $\mathrm{pl}^{(K\times D)\setminus\Lambda}_{k,d}$ на $\mathrm{P}^{\lambda,(k,d)}(L\setminus V)$):

- возможность потерь
$$\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = \sup_{x\in X, k\in K, d\in D} \mathrm{pl}^{\Lambda}_{k,d} \times \pi^{\delta|\xi}(d|x) \times g^{\xi,\varkappa}(x,k); \tag{4}$$
- необходимость потерь
$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(\widetilde{\nu}^{\delta|\xi}) = \inf_{x\in X, k\in K, d\in D} \max(\mathrm{nl}^{\Lambda}_{k,d}, \widetilde{\nu}^{\delta|\xi}(d|x), \widetilde{h}^{\xi,\varkappa}(x,k)); \tag{5}$$
- необходимость потерь, дуальная возможности потерь
$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = \theta(\sup_{x\in X, k\in K, d\in D} \theta^{-1}(\mathrm{nl}^{\Lambda}_{k,d}) \times \pi^{\delta|\xi}(d|x) \times g^{\xi,\varkappa}(x,k)); \tag{6}$$
- необходимость потерь, дополнительная к возможности потерь
$$\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = \theta(\sup_{x\in X, k\in K, d\in D} \mathrm{pl}^{(K\times D)\setminus\Lambda}_{k,d} \times \pi^{\delta|\xi}(d|x) \times g^{\xi,\varkappa}(x,k)), \tag{7}$$
  [1, лемма 6.4.5] дает условия эквивалентности минимизации возможности потерь и дополнительной к ней необходимости потерь;

причем для каждого критерия среди оптимальных нечетких решающих правил существуют четкие. Выбор $D = K$, $\mathrm{pl}^{\Lambda}_{k,d} = \delta_{kd}$ ($\mathrm{nl}^{\Lambda}_{k,d} = \delta_{kd}$), $k, d \in K$, соответствует минимизации возможности (необходимости) ошибки идентификации. Поскольку может быть построена стохастическая модель возможности, известен [1] метод рандомизации для осуществления нечетких решений, что существенно при рассмотрении теоретико-возможностных моделей матричных игр двух субъектов, поскольку в этом случае среди оптимальных стратегий, как правило, нет четких [29].

В «качественной» и «количественной» теории возможностей [5, 27] тоже рассматривается выбор решающего правила на основе минимизации возможности и необходимости потерь, но из-за отсутствия способа разыграть нечеткое решение изначально рассматриваются только четкие решающие правила, а от субъекта, принимающего решения, требуется соизмерить возможности событий и возможности потерь, задав функцию, отображающую значения возможностей (необходимостей) состояний в множество значений возможности потерь.

2. Шкалы значений возможностей и необходимостей, имеющие неподвижные точки

Пусть $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ — шкала значений возможности с множеством неподвижных точек $A \cup \{0,1\}$, группа ее автоморфизмов определяется классом Γ_A таких непрерывных строго монотонных функций $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, для которых $\forall a \in A \cup \{0,1\}$ $\gamma(a) = a$, $A \subset (0,1)$, $\widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{A}}$ — шкала значений необходимости с множеством неподвижных точек $\widetilde{A} \cup \{0,1\}$, группа ее автоморфизмов определяется классом $\Gamma_{\widetilde{A}}$ таких непрерывных строго монотонных функций $\widetilde{\gamma}(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, для которых $\forall \widetilde{a} \in \widetilde{A} \cup \{0,1\}$ $\widetilde{\gamma}(\widetilde{a}) = \widetilde{a}$, $\widetilde{A} \subset (0,1)$, причем множества A и $\widetilde{A}$ — конечные.

В [1] шкалы значений возможности и необходимости с неподвижными точками определены на основе параметрических отображений $(\cdot)_a^{\vee} : [0,1] \to [0,1], (u)_a^{\vee} \mapsto \max\{a,u\}$, $(\cdot)_a^{\wedge} : [0,1] \to [0,1], (u)_a^{\wedge} \mapsto \min\{a,u\}$, коммутирующих с бинарными операциями $+$, $\times$: $(u * v)_a^{\vee} = (u)_a^{\vee} * (v)_a^{\vee}$, $(u * v)_a^{\wedge} = (u)_a^{\wedge} * (v)_a^{\wedge}$, $u, v \in [0,1]$, $* \in \{+, \times\}$. В силу этого для любого p-интеграла $\mathrm{p}_g(\cdot)$ в шкале $\mathcal{L}_A$ $(\mathrm{p}_g(f))_a^{\vee} = \mathrm{p}_{g_a^{\vee}}(f) = \mathrm{p}_g(f_a^{\vee})$, $(\mathrm{p}_g(f))_a^{\wedge} = \mathrm{p}_{g_a^{\wedge}}(f) = \mathrm{p}_g(f_a^{\wedge})$, где $f_a^{\vee}$ и $f_a^{\wedge}$ определяются равенствами $f_a^{\vee}(x) = (f(x))_a^{\vee}$ и $f_a^{\wedge}(x) = (f(x))_a^{\wedge}$, соответственно. Поэтому для $a_i < a_{i+1}$

$$((\mathrm{p}_g(f))_{a_i}^{\vee})_{a_{i+1}}^{\wedge} = \mathrm{p}_{(g_{a_i}^{\vee})_{a_{i+1}}^{\wedge}}(f) = \mathrm{p}_g((f_{a_i}^{\vee})_{a_{i+1}}^{\wedge})$$

— представление (проекция) p-интеграла со значениями в шкале $\mathcal{L}^{(i)} = ([a_i, a_{i+1}], \leqslant, +, \times)$, где a_i, a_{i+1} — неподвижные точки шкалы $\mathcal{L}_A = \bigcup\limits_i \mathcal{L}^{(i)}$. Но поскольку значение интеграла определяет значение всех его представлений в «подшкалах» $\mathcal{L}^{(i)}$, исследователь, в частности, не может улучшить за счет существования коллективной интерпретации неподвижных точек качество оптимального нечеткого решающего правила, поскольку проекции возможности потерь для двух решающих правил с одинаковой возможностью потерь будут равны. Рассмотрим еще один вариант теории возможностей, принимающих значения в шкале с неподвижными точками.

Разбиение множества элементарных событий X на множества $\{x \in X : \mathrm{P}(\{x\}) < a\}$ («маловозможные» элементарные события) и $\{x \in X : \mathrm{P}(\{x\}) \geqslant a\}$, $a \in A$, а также разбиение множества элементарных событий X на множества $\{x \in X : \mathrm{N}(X \setminus \{x\}) > \widetilde{a}\}$ и

$\{x \in X : \mathrm{N}(X \setminus \{x\}) \leqslant \widetilde{a}\}$, $\widetilde{a} \in \widetilde{A}$, очевидно, не зависят от выбора шкал значений возможности и необходимости. Поэтому для определения вклада «маловозможных» событий в возможность события естественно ограничиться интегрированием его характеристической функции только по «маловозможным» элементарным событиям. Для этого определим, в отличие от [1], $\cdot_a^{\downarrow}$ — унарную операцию $\mathcal{L}_A \to \mathcal{L}_A$, $a \in A$ равенством

$$x_a^{\downarrow} = \begin{cases} x, & \text{если } x < a, \\ 0, & \text{если } x \geqslant a, \end{cases} a \in A,$$

$\cdot_{\widetilde{a}}^{\uparrow}$ — унарную операцию $\widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{A}} \to \widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{A}}$, $\widetilde{a} \in \widetilde{A}$ равенством

$$x_{\widetilde{a}}^{\uparrow} = \begin{cases} x, & \text{если } x > \widetilde{a}, \\ 1, & \text{если } x \leqslant \widetilde{a}, \end{cases} \widetilde{a} \in \widetilde{A},$$

см. рис. 1. Эти операции обладают следующими свойствами: $\min\{x,y\}_a^{\downarrow} = \max\{\min\{x_a^{\downarrow}, y\}, \min\{x, y_a^{\downarrow}\}\}$, $\gamma(x_a^{\downarrow}) = (\gamma(x))_a^{\downarrow}$ для любого $\gamma \in \Gamma_A$ ($\max\{x,y\}_a^{\downarrow} = \min\{\max\{x_a^{\downarrow}, y\}, \max\{x, y_a^{\downarrow}\}\}$, $\widetilde{\gamma}(x_{\widetilde{a}}^{\uparrow}) = (\widetilde{\gamma}(x))_{\widetilde{a}}^{\uparrow}$ для любого $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_{\widetilde{A}}$).

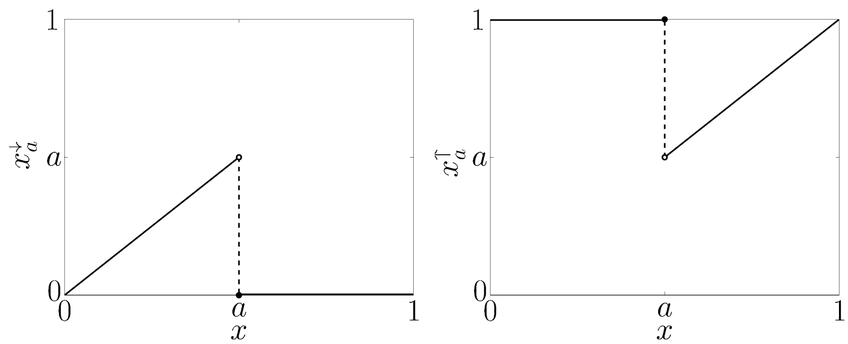

Рис. 1. Графики функций $\cdot_a^{\downarrow}$ и $\cdot_{\widetilde{a}}^{\uparrow}$.

Как и в шкале $\mathcal{L}$ первого варианта теории возможностей, в шкале $\mathcal{L}_A$ $x + y = \max\{x,y\}$, $x \times y = \min\{x,y\}$, $x, y \in \mathcal{L}_A$ ($x \widetilde{+} y = \min\{x,y\}$, $x \widetilde{\times} y = \max\{x,y\}$, $x, y \in \widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{A}}$), так как добавление условий $x \times a = x$, $x + a = a$, $x \in [0,a]$, $x \times a = a$, $x + a = x$, $x \in [a,1]$, $a \in A$, оставляет в силе теорему 1. Поэтому p- и n-интегралы будут иметь тот же вид [1], что и в первом варианте теории возможностей: $\mathrm{p}_g(f(\cdot)) = \sup\limits_{x\in X}(f(x) \times g(x))$, $\mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\widetilde{f}(\cdot)) = \inf\limits_{x\in X}(\widetilde{f}(x)\widetilde{\times}\widetilde{h}(x))$, но также будут существовать и интегралы $\mathrm{p}_{g_a^{\downarrow}}(f(\cdot)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\limits_{x\in X}(f(x) \times g(x)_a^{\downarrow})$, $a \in A$ и $\mathrm{n}_{\widetilde{h}_{\widetilde{a}}^{\uparrow}}(\widetilde{f}(\cdot)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf\limits_{x\in X}(\widetilde{f}(x)\widetilde{\times}\widetilde{h}(x)_{\widetilde{a}}^{\uparrow})$, $\widetilde{a} \in \widetilde{A}$, как и p- и n-интегралы, являющиеся линейными вполне аддитивными (относительно «сложения» $+ = \max$ и «умножения» $\times = \min$ для $\mathrm{p}_{g_a^{\downarrow}}(\cdot)$ и «сложения» $\widetilde{+} = \min$ и «умножения» $\widetilde{\times} = \max$ для $\mathrm{n}_{\widetilde{h}_{\widetilde{a}}^{\uparrow}}(\cdot)$) функционалами на классе функций $\mathcal{L}(X) \subset (X \to [0,1])$, содержащем вместе с каждой парой функций $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ функцию $((\alpha \times f_1) + (\beta \times f_2))(\cdot)$, определенную равенством $((\alpha \times f_1) + (\beta \times f_2))(x) = (\alpha \times f_1(x)) + (\beta \times f_2(x))$ для любых $\alpha, \beta \in [0,1]$, но принимающих значения в $[0,a] \subset \mathcal{L}_A$ и $[a,1] \subset \widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{A}}$ соответственно. Поскольку $g(\cdot)_a^{\downarrow} \mapsto \gamma \circ g(\cdot)_a^{\downarrow}$ при преобразовании $\mathcal{L}_A \mapsto \gamma\mathcal{L}_A$, $\gamma \in \Gamma_A$, $a \in A$, и $\widetilde{h}(\cdot)_{\widetilde{a}}^{\uparrow} \mapsto \widetilde{\gamma}\circ\widetilde{h}(\cdot)_{\widetilde{a}}^{\uparrow}$ при преобразовании $\widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{A}} \mapsto \widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{A}}$, $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_{\widetilde{A}}$ для любого $\widetilde{a} \in \widetilde{A}$, то есть при преобразовании шкал значений возможностей и необходимостей $g(\cdot)_a^{\downarrow}$ и $\widetilde{h}(\cdot)_{\widetilde{a}}^{\uparrow}$ преобразуются как распределения возможностей и распределения необходимостей, то эти интегралы преобразуются так же, как соответственно p- и n-интегралы (которыми они формально являются для «распределения» возможностей $g(\cdot)_a^{\downarrow}$ и «распределения» необходимостей $\widetilde{h}(\cdot)_{\widetilde{a}}^{\uparrow}$).

3. Максимальная согласованность вероятности с возможностью, принимающей значения в шкале с неподвижными точками

Если исследователя интересует класс $\mathbb{P}\mathrm{r}$ вероятностных распределений $\Pr : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$, с каждым из которых максимально согласована возможность P, то есть $\forall \Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}\ \forall A, B \in \mathcal{P}(X)$ $\Pr(A) \leqslant \Pr(B) \Rightarrow P(A) \leqslant P(B), \mathrm{P}(A) = 0 \Rightarrow \Pr(A) = 0$ и число различных значений возможностей максимально, то ему нужно задать вероятностные интерпретации $\{\mathrm{pr}_a^A\}$, $a \in A$ неподвижных точек шкалы значений возможности. При этом неподвижные точки шкалы значений необходимостей не будут независимыми от неподвижных точек шкалы значений возможностей и должны быть $\widetilde{A} = \{1 - a\}$, $a \in A$,

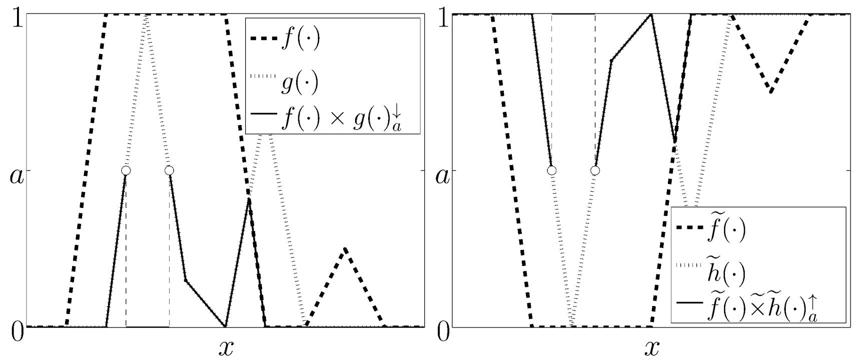

Рис. 2. Пример графиков функций $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ и $(f(\cdot)\times g(\cdot)^{\downarrow}_{a})$, $\sup\limits_{x\in X}(f(\cdot)\times g(\cdot)^{\downarrow}_{a}) = a$ (слева) и $\widetilde{f}(\cdot)$, $\widetilde{h}(\cdot)$ и $(\widetilde{f}(\cdot)\widetilde{\times}\widetilde{h}(\cdot)^{\uparrow}_{a})$, $\inf\limits_{x\in X}(\widetilde{f}(\cdot)\widetilde{\times}\widetilde{h}(\cdot)^{\uparrow}_{a}) = a$ (справа).

а их вероятностные интерпретации суть $\{\mathrm{pr}^{\widetilde{A}}_{\widetilde{a}}\} = \{1-\mathrm{pr}^{A}_{a}\}$, $\widetilde{a}\in\widetilde{A}$, $a\in A$. Тогда любое вероятностное распределение $\mathrm{Pr}:\mathcal{A}\to[0,1]$ будет максимально согласованным с распределением возможностей $\mathrm{P}:\mathcal{A}\to\mathcal{L}_{A}$, если оно максимально согласовано с P в смысле первого варианта теории возможностей (то есть существует монотонная функция $\gamma'\in\Gamma'$, такая, что $\gamma'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, $\gamma'(1)=1$, и для любого $A\in\mathcal{P}(X)$ $\mathrm{P}(A)=\gamma'(\mathrm{Pr}(A))$, и для любой другой возможности P', также согласованной с вероятностью, существует такая $\gamma''\in\Gamma'$, что $\forall A\in\mathcal{A}$ $\mathrm{P}'(A)=\gamma''(\mathrm{P}(A)))$ и удовлетворяет дополнительным условиям

$$\forall a\in A,\forall B\in\mathcal{A}\ \begin{array}{l}\mathrm{P}(B)\geqslant a\Rightarrow\mathrm{Pr}(B)\geqslant\mathrm{pr}^{A}_{a},\\ \mathrm{P}(B)<a\Rightarrow\mathrm{Pr}(B)<\mathrm{pr}^{A}_{a}.\end{array}\tag{8}$$

Пример 1. ([1], пример 2.3.2) Пусть множество элементарных событий $\Omega=\{\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3,\,\omega_4\}$, $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathrm{pr}_i=\mathrm{Pr}(\{\omega_i\})=q/(1+q)^i$, $i=1,\ldots,3$, $\mathrm{pr}_4=\mathrm{Pr}(\{\omega_4\})=1/(1+q)^3$, $q>1$, $A=\{\mathrm{pr}_4, 1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2, 1-\mathrm{pr}_1, 1/2\}$, $\mathrm{pr}^{A}_{a}=a$, $a\in A$. Взаимно однозначное соответствие между значениями возможностей (необходимостей) событий и интервалами, которым принадлежат вероятности событий, показано на рис. 3.

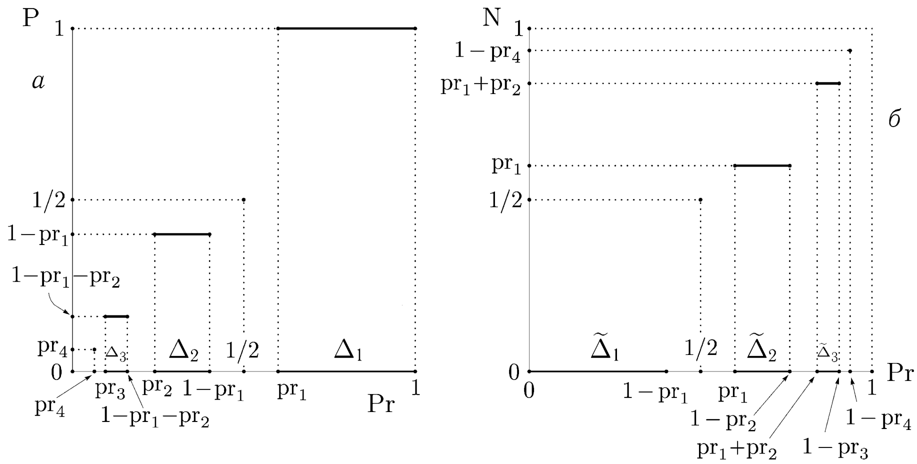

Рис. 3. Взаимно однозначные соответствия a) между значениями P и минимальными по включению интервалами, содержащими множества значений Pr, $б$) между значениями N и минимальными по включению интервалами, содержащими множества значений Pr в примере 1.

4. Эмпирические восстановление возможности, принимающей значения в шкале с неподвижными точками

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ — множество элементарных событий, пространство с возможностью моделирует стохастический объект, контролирующий результаты наблюдений, упорядоченность возможностей элементарных событий эмпирически восстановлена по алгоритму [1, §3.4], элементарные события упорядочены по невозрастанию частот и $\iota_*(i) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min\{j \in \{1, \ldots, s\} : \mathrm{p}_j = \mathrm{p}_i\}$, $\iota^*(i) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{j \in \{1, \ldots, s\} : \mathrm{p}_j = \mathrm{p}_i\}$.

4.1. Случай заранее известных неподвижных точек

Пусть множество неподвижных точек шкалы значений возможности A и их вероятностные интерпретации $\mathrm{pr}_\cdot^A$ заданы исследователем (например, он считает, что существуют такие элементарные события, что в любом испытании вероятность их объединения меньше a, а вероятность любого события, включающего хотя бы одно элементарное событие не из этого набора, не меньше a). Тогда эмпирическое упорядочивание возможностей элементарных событий происходит аналогично алгоритму эмпирического упорядочения вероятностей [1, §3.3] с заменой одной из сравниваемых вероятностей на $\mathrm{pr}^A_\cdot$: для всех $1 \leqslant i \leqslant s$ и каждого $n = 1, 2, \ldots$

- если $\nu^{(n)}_{\iota^*(i)} - \mathrm{pr}^A_{a_1} > \delta^{(n,s)}$ и $\frac{1}{n}\sum\limits_{j=\iota_*(i)}^{s} \nu^{(n)}_j - \mathrm{pr}^A_{a_2} < -\delta^{(n,s)}$ для каких-либо $a_1, a_2 \in A$, $a_2 = \inf\{a \in A : a > a_1\}$, то $a_1 < \mathrm{p}_i < a_2$;
- если $\frac{1}{n}\sum\limits_{j=\iota_*(i)}^{s} \nu^{(n)}_j - \mathrm{pr}^A_{\min A} < -\delta^{(n,s)}$, то $p_i < \min A$;
- если $\nu^{(n)}_{\iota^*(i)} - \mathrm{pr}^A_{\max A} > \delta^{(n,s)}$, то $p_i > \max A$;
- иначе продолжать испытания;

где $\nu^{(n)}_i$ — частота элементарного события ω_i после n независимых испытаний, $\delta^{(n,s)} = \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}}\right)^{1/2}$, $(s-1)\alpha^{(s)}$ — оценка сверху вероятности ошибочных решений. Условия остановки с вероятностью 1 за конечное число испытаний также аналогичны [1, §3.3]: $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$ $\forall a \in A$ $\mathrm{pr}_i \neq a$, $\sum\limits_{j=\iota_*(i)}^{s} \mathrm{pr}_j \neq a$ в случае постоянных вероятностей элементарных событий и $\forall n > n_0$ $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$ $\forall a \in A$ $\min\{|\,\mathrm{pr}^{(n)}_i - \mathrm{pr}^A_a\,|, |\sum\limits_{j=\iota_*(i)}^{s} \mathrm{pr}^{(n)}_j - \mathrm{pr}^A_a\,|\} \geqslant (1 + \varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}$, где $\mathrm{pr}^{(n)}_i = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\})$, Pr_j — контролировавшая j-е испытание вероятность, $\varepsilon_{n,s} > 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha^{(s)})^{\varepsilon^2_{n,s}} < \infty$ в случае изменяющихся от испытания к испытанию вероятностей элементарных событий.

4.2. Случай неизвестных неподвижных точек

В этом разделе предполагается, что $\mathrm{pr}^A_a = a$, $a \in A$, поскольку для любой другой интерпретации $\mathrm{pr}'^A_\cdot$ можно переходом к шкале $\mathcal{L}' = \gamma_{pr'^A_\cdot}\mathcal{L}$, где $\gamma_{pr'^A_\cdot} : [0,1] \to [0,1]$ — произвольное непрерывное строго возрастающее отображение, для которой $\gamma_{pr'^A_\cdot}(0) = 0$,

$\gamma_{pr'^A_\cdot}(1) = 1$, $\gamma_{pr'^A_\cdot}(a) = pr'^A_a$, $a \in A$, то есть переобозначением точек шкалы с сохранением всех упорядоченностей, перейти к такой интерпретации неподвижных точек.

Очевидно, что эмпирически восстановлены могут быть только неподвижные точки, сответствующие наиболее строгим ограничениям в (8), то есть такие a, для которых $a = \sup\{a' \in A : a' < \mathrm{P}(\{\omega\})\}$ или $a = \inf\{a' \in A : a' > \mathrm{P}(\{\omega\})\}$ для некоторого $\omega \in \Omega$.

4.2.1. Случай вероятности, не изменяющейся в ходе испытаний

В этом случае восстановление неподвижных точек основано на рассмотренном в [1, §3.3.3] алгоритме эмпирического интервального оценивания вероятностей элементарных событий. Как показано в [1, §3.3.3], событие $\{\forall i \in \{1, \ldots, s\}\, |\nu_i^{(n)} - pr_i| \leqslant \sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{3s-1}{\alpha}}\}$, интервально оценивающее вероятности элементарных событий, имеет вероятность не менее $1 - \alpha$. Поэтому с той же верояностью упорядоченность возможностей элементарных событий по отношению к неподвижным точкам такая же, как и к граничным точкам множества $\bigcup\limits_{i=1}^{s}\left[\nu_{\iota^*(i)}^{(n)} - \sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{3s-1}{\alpha}}, \sum\limits_{j=\iota_*(i)}^{s}(\nu_j^{(n)} + \sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{3s-1}{\alpha}})\right]$, то есть границам интервалов, получающихся объединением перекрывающихся оценок интервалов $\left[\mathrm{pr}_{\iota^*(i)}, \sum\limits_{j=\iota_*(i)}^{s}\mathrm{pr}_j\right]$.

4.2.2. Случай вероятности, изменяющейся от испытания к испытанию

Если распределения вероятности изменяются от испытания к испытанию только лишь при условии максимальной согласованности с одним и тем же распределением возможности, то неподвижные точки эмпирически восстановлены быть не могут. Но если также известны дополнительные ограничения на разницу между распределениями вероятностей, то в некоторых случаях неподвижные точки могут быть эмпирически восстановлены. Например, пусть для каждого испытания $\forall\omega \in \Omega\ |\mathrm{Pr}_j(\{\omega\}) - \mathrm{Pr}_0(\{\omega\})| \leqslant \varepsilon$, где Pr_j — контролировавшая j-е испытание вероятность, $j >$

0. Тогда с вероятностью не менее $1-\alpha$ упорядоченность возможностей элементарных событий по отношению к неподвижным точкам такая же, как и к граничным точкам множества $\bigcup\limits_{i=1}^{s}\left[\nu^{(n)}_{\iota^*(i)}-\sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{3s-1}{\alpha}}-\varepsilon,\sum\limits_{j=\iota_*(i)}^{s}(\nu^{(n)}_{j}+\sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{3s-1}{\alpha}}+\varepsilon)\right]$.

5. Нечеткие оптимальные решения в задаче идентификации

Как и в [1], пусть заданы множество состояний нечеткой системы K, множество решений о ее состоянии D, модель идентификации $(g^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot),h^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot),\Lambda)$ состояния $\varkappa$ по наблюдаемой величине ξ, но распределения возможностей и необходимостей принимают значения в шкалах с неподвижными точками. Аналогично первому варианту теории возможностей [1], возможность потерь при использовании нечеткого решающего правила $\pi^{\delta|\xi}$ есть

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})=\sup_{x\in X,k\in K,d\in D}\mathrm{pl}^{\Lambda}_{k,d}\times\pi^{\delta|\xi}(d|x)\times g^{\xi,\varkappa}(x,k). \tag{9}$$

В общем случае может существовать несколько решающих правил, для которых возможности потерь одинаковы: $\Pi_0=\{\pi^{*\delta|\xi}:\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{*\delta|\xi})=\min\limits_{\pi^{\delta|\xi}}\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})\}$. Семейство интегралов $\mathrm{p}_{g^{\downarrow}_{a}}(\cdot)$ позволяет сузить класс оптимальных решающих правил: пусть $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ — упорядоченное по убыванию множество A, тогда множество оптимальных решений есть Π_n, где

$$\Pi_i=\{\pi^{*\delta|\xi}:\pi^{*\delta|\xi}\in\Pi_{i-1},\mathrm{PL}^{\Lambda}_{a_i}(\pi^{*\delta|\xi})=\min_{\pi^{\delta|\xi}\in\Pi_{i-1}}\mathrm{PL}^{\Lambda}_{a_i}(\pi^{\delta|\xi})\},i=1,\ldots,n, \tag{10}$$

где

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}_{a_i}(\pi^{\delta|\xi})=\sup_{x\in X,k\in K,d\in D}(\mathrm{pl}^{\Lambda}_{k,d}\times\pi^{\delta|\xi}(d|x)\times g^{\xi,\varkappa}(x,k))^{\downarrow}_{a_i}.$$

— возможность «маловозможных» (имеющих возможность меньше a_i) потерь.

Поскольку $\mathrm{PL}^{\Lambda}_{a_i}(\pi^{\delta|\xi})=\sup\limits_{x\in X,d\in D}(\pi^{\delta|\xi}(d|x)^{\downarrow}_{a_i}\times f(x,d)\dotplus\pi^{\delta|\xi}(d|x)\times f_{a_i}(x,d))$, где $f(x,d)=\sup\limits_{k\in K}\mathrm{pl}^{\Lambda}_{k,d}\times g^{\xi,\varkappa}(x,k)$, $f_{a_i}(x,d)=\sup\limits_{k\in K}(\mathrm{pl}^{\Lambda}_{k,d}\times g^{\xi,\varkappa}(x,k))^{\downarrow}_{a_i}$, то решение задачи (10) может быть получено путем решения задачи

$$\Pi_i = \{\pi^{*\delta|\xi} : \forall x \in X\, \pi^{*\delta|\xi} \in \Pi_{i-1}, \mathrm{PL}^{\Lambda}_{a_i}(\pi^{*\delta|\xi}|x) = \max_{\pi^{\delta|\xi} \in \Pi_{i-1}} \mathrm{PL}^{\Lambda}_{a_i}(\pi^{\delta|\xi}|x)\},$$

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}_{a_i}(\pi^{\delta|\xi}|x) = \sup_{d \in D}(\pi^{\delta|\xi}(d|x)^{\downarrow}_{a_i} \times f(x,d) + \pi^{\delta|\xi}(d|x) \times f_{a_i}(x,d)). \tag{11}$$

Пример 2. Пусть $A = \{a\}$, $K = \{1,2,3\}$, $0 \in X$, $D = K$, $g^{\xi,\varkappa}(0,1) = g^{\xi,\varkappa}(0,3) = \alpha \geqslant a$, $g^{\xi,\varkappa}(0,2) = \beta < a$, $\mathrm{pl}^{\Lambda}_{k,d} = \begin{cases} 0, k = d, \\ 1, k \neq d. \end{cases}$ Для любого решающего правила $\pi^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot) : \pi^{\delta|\xi}(1|0) = p_1, \pi^{\delta|\xi}(2|0) = p_2, \pi^{\delta|\xi}(3|0) = p_3, \max\{p_1,p_2,p_3\} = 1$, возможность потерь при $x = 0$ минимальна и равна α, но только для решающего правила, у которого $p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$, $\mathrm{PL}^{\Lambda}_{a_i}(\pi^{\delta|\xi}|0)$, $p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$ минимальна.

Как и для первого варианта теории возможностей в [1], среди решений задачи (11) всегда есть четкие: $\pi^{*\delta|\xi}(d^*(x)|x) = 1$, $\pi^{*\delta|\xi}(d|x) = 0$, $d \neq d^*(x)$, где $d^*(\cdot) : X \to D$ — произвольная функция, для $\forall x \in X$ удовлетворяющая условию $f_{a_i}(x, d^*(x)) = \min\limits_{d \in D} f_{a_i}(x,d)$ (поскольку для любого четкого правила принятия решения $\pi^{*\delta|\xi}(d^*(x)|x)^{\downarrow}_{a_i} = 0$, $x \in X$, $d \in D$).

Аналогично, необходимость потерь при использовании нечеткого решающего правила $\widetilde{\nu}^{\delta|\xi}$ есть

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(\widetilde{\nu}^{\delta|\xi}) = \inf_{x \in X, k \in K, d \in D} \max(\mathrm{nl}^{\Lambda}_{k,d}, \widetilde{\nu}^{\delta|\xi}(d|x), \widetilde{h}^{\xi,\varkappa}(x,k)),$$

$N_0 = \{\widetilde{\nu}^{*\delta|\xi} : \mathrm{NL}^{\Lambda}(\widetilde{\nu}^{*\delta|\xi}) = \min\limits_{\widetilde{\nu}^{\delta|\xi}} \mathrm{NL}^{\Lambda}(\widetilde{\nu}^{\delta|\xi})\}$ — множество решающих правил, минимизирующих необходимость потерь, и семейство интегралов $\mathrm{n}_{\widetilde{h}^{\uparrow}_{\widetilde{a}}}(\cdot)$ позволяет сузить класс оптимальных решающих правил: пусть $\{\widetilde{a}_i\}_{i=1}^n$ — упорядоченное по возрастанию множество $\widetilde{A}$, тогда множество оптимальных решений есть N_n, где

$$N_i = \{\widetilde{\nu}^{*\delta|\xi} : \widetilde{\nu}^{*\delta|\xi} \in N_{i-1}, \mathrm{NL}^{\Lambda}_{a_i}(\widetilde{\nu}^{*\delta|\xi}) = \max_{\widetilde{\nu}^{\delta|\xi} \in N_{i-1}} \mathrm{NL}^{\Lambda}_{a_i}(\widetilde{\nu}^{\delta|\xi})\}, i = 1, \ldots, n,$$

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}_{a_i}(\widetilde{\nu}^{\delta|\xi}) = \inf_{x \in X, k \in K, d \in D}(\max(\mathrm{nl}^{\Lambda}_{k,d}, \widetilde{\nu}^{\delta|\xi}(d|x), \widetilde{h}^{\xi,\varkappa}(x,k)))^{\uparrow}_{a_i}.$$

Заключение

В статье предложен вариант теории возможностей, позволяющий формально описать договоренность группы исследователей об общей интерпретации некоторых значений возможности, отличных от 0 и 1, и показано следующее из этого уточнение критерия оптимальности решающего правила в задаче идентификации. Также описано эмпирическое восстановление пространства с возможностью, принимающей значения в шкале с неподвижными точками, моделирующего стохастический объект при условии конечного множества элементарных событий.

В заключение мне приятно выразить благодарность моему научному руководителю Юрию Петровичу Пытьеву за постановку задачи и ее обсуждение.

Список литературы

[1] Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности. 2 изд. — М.: Физматлит, 2014.

[2] Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности. 1 изд. — М.: Физматлит, 2007.

[3] Пытьев Ю. П. Возможность. Элементы теории и применения. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[4] Пытьев Ю. П. Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений. 1. Мера возможности: определение, свойства // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. — 1997. — № 3. — С. 3–7.

[5] Dubois D., Prade H. Possibility theory: qualitative and quantitative aspects // Quantified Representation of Uncertainty and Imprecision / Ed. by D. M. Gabbay, P. Smets. — Kluwer Academic Publishers, 1998. — Vol. 1 of Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems. — P. 169–226.

[6] Dubois D. Possibility theory and statistical reasoning // Computational Statistics and Data Analysis. — 2006. — Vol. 51. — P. 47–69.

[7] Dubois D., Prade H. Formal representations of uncertainty // Decision-Making Process / Ed. by D. Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot, H. Prade. — London: Wiley-ISTE, 2009. — P. 85–156.

[8] Dubois D., Prade H. Unfair coins and necessity measures: towards a possibilistic interpretation of histograms // Fuzzy sets and Systems. — 1983. — Vol. 10. — P. 15–20.

[9] de Cooman G. Possibility theory I: the measure- and integral-theoretic groundwork // International Journal of General Systems. — 1997. — Vol. 25. — P. 291–323.

[10] Murofushi T., Uchino K., Asahina S. Conditions for Egoroff's theorem in non-additive measure theory // Fuzzy sets and Systems. — 2004. — Vol. 146. — P. 135–146.

[11] Li J., Mesiar R. Lusin's theorem on monotone measure spaces // Fuzzy sets and Systems. — 2011. — Vol. 175. — P. 75–86.

[12] Watanabe T., Tanaka T. On Lusin's theorem for non-additive measures that take values in an ordered topological vector space // Fuzzy sets and Systems. — 2014. — Vol. 244. — P. 41–50.

[13] Пытьев Ю. П. Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений. 4. Максимальное продолжение возможности // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. — 1998. — № 1. — С. 3–6.

[14] Пытьев Ю. П. Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений. 2. Мера необходимости: определение, свойства. Интегрирование по возможности и по необходимости // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. — 1997. — № 4. — С. 3–7.

[15] Пытьев Ю. П. Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений. 3. Независимость, условные возможность и необходимость. Условные относительно сигма-алгебры интеграл // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. — 1997. — № 6. — С. 3–5.

[16] Пытьев Ю. П. Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений. 5. Нечеткие элементы. Независимость. Условные распределения // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. — 1998. — № 2. — С. 3–8.

[17] de Cooman G. Possibility theory II: conditional possibility // International Journal of General Systems. — 1997. — Vol. 25. — P. 325–351.

[18] Пытьев Ю. П. О содержательном толковании возможности и необходимости // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. — 1999. — № 5. — С. 3–6.

[19] Пытьев Ю. П. О стохастических моделях возможности // Интеллектуальные системы. — 2001. — Т. 6, вып. 1–4. — С. 25–62.

[20] Yager R. R. Entailment Principle for Measure-Based Uncertainty // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 2012. June. — Vol. 20, no. 3. — P. 526–535.

[21] Пытьев Ю. П. Математические методы и алгоритмы эмпирического восстановления стохастических и нечетких моделей // Интеллектуальные системы. — 2007. — Т. 11, вып. 1–4. — С. 277–327.

[22] Пытьев Ю. П. Вероятность и возможность. Эмпирическая интерпретация и оценивание // Математические методы распознавания образов (ММРО–12). Доклады 12-й Всероссийской конференции. — МАКС Пресс, 2005. — С. 192–195.

[23] Пытьев Ю. П. Эмпирическое восстановление мер возможности и правдоподобия возможности в моделях экспертных решений // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 3. — С. 131–146.

[24] Dubois D., Prade H., Sandri S. On Possibility/Probability Transformations // Proceedings of Fourth IFSA Conference. — Kluwer Academic Publ, 1993. — P. 103–112.

[25] Masson M., Denoeux T. Inferring a possibility distribution from empirical data // Fuzzy sets and Systems. — 2006. V. 157. — P. 319–340.

[26] Yager R. R. Conditional Approach to Possibility-Probability Fusion // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 2012. February. — Vol. 20, no. 1. — P. 46–56.

[27] Dubois D., Nguyen H. T., Prade H. Possibility theory, probability and fuzzy sets: misunderstanding, bridges and gaps // Fundamental of Fuzzy Sets. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. — P. 343–438.

[28] Пытьев Ю. П. Оптимальные решения в теории возможностей // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. — 1999. — № 6. — С. 3–7.

[29] Папилин С. С., Пытьев Ю. П. Вероятностная и возможностная модели матричных игр двух субъектов // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22, № 12. — С. 144–160.