Условия полноты линейно-p-автоматных функций

А. А. Часовских

Ранее была решена проблема полноты для класса линейно-автоматных функций над полем $GF(2)$ с операциями композиции. В настоящей работе этот результат обобщен на класс линейно-автоматных функций над $GF(p)$ для простого p. В рассматриваемом классе найдены все предполные подклассы.

Ключевые слова: конечный автомат, линейный автомат, линейно-автоматная функция, операции композиции, проблема полноты, критерий полноты, предполные классы, сумматор, задержка.

1. Об А-полноте

В работе [5] решены задачи А-полноты и полноты для класса линейно-автоматных функций над полем $E_2 = \{0, 1\}$. В настоящей работе получено обобщение этого результата для конечно-автоматных функций над полем E_p, $E_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, где p — простое число.

Зафиксируем простое число p. Через $E_p[\xi]$ обозначим множество всех многочленов переменной ξ над полем E_p. Для множества всех многочленов из $E_p[\xi]$ с ненулевым свободным членом будем использовать обозначение $E'_p[\xi]$. Поле отношений многочленов из $E_p[\xi]$ принято обозначать $E_p(\xi)$, а его подкольцо

$$\left\{ \quad \frac{u(\xi)}{v(\xi)} \quad \Big| \quad u(\xi) \in E_p[\xi], v(\xi) \in E'_p[\xi] \quad \right\}$$

будем обозначать $E'_p(\xi)$. Множество всех формальных рядов переменной ξ с коэффициентами из E_p будем обозначать $R_p(\xi)$.

Пусть n — натуральное число. Отображение $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $R_p^n(\xi)$ в $R_p(\xi)$ называется линейно-p-автоматной функцией (л.-p-а.

функцией) над E_p, если найдутся μ_i, $\mu_i \in E'_p(\xi)$, $i = 0, 1, \dots, n$, такие, что для любых α_i, $\alpha_i \in R_p(\xi)$, $i = 1, 2, \dots, n$, выполнено следующее равенство

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i + \mu_0, \tag{1}$$

где операции «+» и «·» индуцированы операциями в E_p. Поэтому л.-р-а. функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задается выражением $\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0$.

Множество всех л.-р-а. функций над E_p обозначим L_p. В классе L_p рассмотрим оператор замыкания Σ по операциям суперпозиции [1] (стр. 161), а также аппроксимационный оператор замыкания A [2]. Следуя [1] (стр. 179), для ряда μ, $\mu \in R_p(\xi)$, $\mu = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots, a_i \in E_p$, $i = 1, 2, \dots, n$, и натурального числа τ, через ${}^{\tau}[\mu$ обозначим многочлен $a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_{\tau-1}\xi^{\tau-1}$.

Напомним, что для некоторого натурального числа τ две л.-р-а. функции $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называются τ-эквивалентными, если для любых α_i, $\alpha_i \in R_p(\xi)$, $i = 1, 2, \dots, n$, выполнено

$${}^{\tau}[f_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = {}^{\tau}[f_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Нетрудно видеть, что справедливо следующее

Замечание. τ-эквивалентность л.-р-а. функций $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{j,i} x_i + \mu_{j,0}$, $j = 1, 2$, равносильно выполнению всех равенств: ${}^{\tau}[\mu_{1,i} = {}^{\tau}[\mu_{2,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Л.-а. функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ А-выразима через множество M, $M \subseteq L_p$, в точности тогда, когда для любого натурального τ в $\Sigma(M)$ найдется функция $g_\tau(x_1, x_2, \dots, x_n)$ τ-эквивалентная $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Для множества M, $M \subseteq L_p$, через $A(M)$ обозначается множество всех л.-р-а. функций, А-выразимых через M. Класс M называется А-замкнутым, если выполнено равенство: $M = A(M)$. Класс M называется А-предполным, если он А-замкнут, $M \neq L_p$ и если для любого M', $M \subset M' \subseteq L_p$, $M' \neq M$, выполнено: $A(M') = L_p$.

Далее будут найдены все А-предполные классы в L_p, что позволит получить алгоритм проверки А-полноты в L_p для конечных систем л.-р-а. функций.

Рассмотрим следующие множества л.-р-а. функций.

Пусть $k \in E_p$,

$$T_k = \Big\{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad | \quad n \in N, \quad f \in L_p, \quad \text{из}$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0 \quad \text{следует}$$
$$\sum_{i=1}^{n} {}^1[\mu_i \cdot k + {}^1[\mu_0 = k\Big\}.$$

Таким образом, T_k — множество всех л.-р-а. функций, сохраняющих число k в первый момент времени.

Далее, положим

$$V_1 = \{ \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad | \quad n \in N, \quad f \in L_p,$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0,$$
$$\text{среди чисел} \quad {}^1[\mu_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\text{не более одного отличного от нуля}\}\,,$$

то есть V_1 — множество всех л.-р-а. функций, зависящих в 1-й момент не более чем от одной переменной.

Введем обозначение V_p для множества

$$\Big\{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad | \quad n \in N, \quad f \in L_p, \quad \text{и из}$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0 \quad \text{следует}$$
$$\sum_{i=1}^{n} {}^1[\mu_i = 1\Big\}.$$

Кроме того, положим

$$M\left(\xi^2\right) = \{ \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad | \quad n \in N, \quad f \in L_p, \quad \text{из}$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0 \quad \text{для любого}$$
$$i, i = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{следует} \quad \mu_i -^1[\mu_i \in \xi^2 E'_p(\xi)\}\,.$$

Через AJ_p обозначим следующее множество классов л.-р-а. функций.

$$AJ_p = \left\{ \quad V_1, V_p, M\left(\xi^2\right), T_k \quad \mid \quad k = 0, 1, \ldots, p-1 \right\}.$$

Теорема 1. *Множество AJ_p является приведенной A-критериальной системой A-замкнутых классов в L_p. То есть справедливы следующие три утверждения:*

1) *Для любого Θ, $\quad \Theta \in AJ_p$, выполнено: $A(\Theta) = \Theta$.*
2) *Для любого M, $\quad M \subseteq L_p$, равенство $A(M) = L_p$ выполнено в точности тогда, когда $M \nsubseteq \Theta$ для каждого Θ, $\quad \Theta \in AJ_p$.*
3) *Для любых Θ_1, Θ_2 — различных элементов множества AJ_p выполнено: $\Theta_1 \nsubseteq \Theta_2$.*

Следствие 1. *Каждый элемент множества AJ_p является A-предполным классом в L_p. A-предполных классов в L_p, не содержащихся в AJ_p, не существует.*

Лемма 1. *Пусть $M \subseteq L_p$ и $M \nsubseteq V_1$. Тогда в $A(M)$ содержится л.-р-а. функция 1-эквивалентная сумматору $x_1 + x_2 + \cdots + x_{p+1}$.*

Доказательство. Если $M \subseteq L_p$ и $M \nsubseteq V_1$, то в M найдется функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\quad f \notin V_1$. Тогда $n \geqslant 2$ и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0$. Не ограничивая общность рассуждений, будем предполагать, что ${}^1[\mu_i \neq 0, \quad i = 1, 2$. Через $g(x_1, x_2, x_3)$ обозначим функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_3 \ldots, x_3)$. Тогда для μ, $\quad \mu = \sum_{i=3}^{n} \mu_i$, выполнено:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu x_3 + \mu_0.$$

Через $g_1(x_1, x_2)$ и $g_2(x_1, x_2)$ обозначим, соответственно, функции $g(x_1, x_2, x_2)$ и $g(x_1, x_2, x_1)$.

По малой теореме Ферма [3] найдутся натуральные k_i, $\quad i = 1, 2$, такие, что

$$\left({}^1[\mu_i\right)^{k_i} = 1, \quad i = 1, 2.$$

Тогда для функции

$$h(x_1,x_2,x_3) = g\Bigg(\underbrace{g_1(\dots g_1(g_1(x_1,x_3),x_3),\dots,x_3)}_{k_1-1 \quad \text{раз} \quad g_1}, \underbrace{g_2(x_3,g_2(x_3,\dots g_2(x_3,x_2)\dots))}_{k_2-1 \quad \text{раз} \quad g_2}, x_3\Bigg)$$

в $E'_p(\xi)$ найдутся μ'_i, $\quad i=0,1,2,3$, такие, что $^1\Big[\mu'_j=1, \quad j=1,2$ и

$$h(x_1,x_2,x_3)=\mu'_1x_1+\mu'_2x_2+\mu'_3x_3+\mu'_0.$$

Поэтому л.-р-а. функция

$$\underbrace{h(h(\dots h(h(x_1,x_2,x_1),x_3,x_1),\dots,x_p,x_1),x_{p+1},x_1)}_{p \quad \text{раз} \quad h}$$

1-эквивалентна сумматору $x_1+x_2+\dots+x_{p+1}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $M\subseteq L_p$ *и для любого* Θ, $\quad \Theta\in AJ_p$, $\quad M\nsubseteq\Theta$. *Тогда* $A(M)$ *содержит л.-р-а. функции* $f_0,f_1,\dots,f_{p-1}$, *1-эквивалентные соответственно константам* $0,1,\dots,p-1$

Доказательство. Отождествив переменные л.-р-а. функции f, $f\in M$, $f\notin V_p$, получим л.-р-а. функцию f', $\quad f'(x)=\mu x+\mu'$. Число $^1[\mu$ обозначим через k. Из соотношения $f\notin V_p$ следует $k\neq 1$.

Далее решим относительно y уравнение

$$ky+(1-y)=0. \tag{2}$$

Получим $y=-(k-1)^{-1}\in E_p\setminus\{0\}$.

По лемме 1 в $A(M)$ содержится функция $g(x_1,x_2,\dots,x_{p+1})$ 1-эквивалентная сумматору $x_1+x_2+\dots+x_{p+1}$. Отсюда и из равенства (2) вытекает, что функция

$$h(x), \quad h(x)=g\Bigg(\underbrace{f'(x),\dots,f'(x)}_{y \quad \text{раз} \quad f'}, \underbrace{x,x,\dots,x}_{p+1-y \quad \text{раз} \quad x}\Bigg),$$

1-эквивалентная некоторой константе r, $r \in E_p$.

Учитывая, что $M \not\subseteq T_r$, в M найдется $g'(x_1, x_2, \ldots, x_{n'})$, что $h'(x)$, $h'(x) = g'(h(x), \ldots, h(x))$, 1-эквивалентна константе r' и $r \neq r'$.

Для каждого k', $k' \in E_p$, уравнение $r' \cdot y + r(1-y) = k'$ имеет решение $y = (k'-r)(r'-r)^{-1}$. Поэтому, подставляя на места первых $(k'-r)(r'-r)^{-1}$ переменных л.-р-а. функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ л.-р-а. функции $h'(x)$, а вместо остальных переменных — $h(x)$, получим функцию 1-эквивалентную константе и реализующую в 1-й момент k'. Лемма доказана.

Замечание. Справедливо равенство

$$A(A(M)) = A(M).$$

Поэтому в случае, когда для множества л.-р-а. функций M_1 доказано включение $M_1 \subseteq A(M)$ и $f \in A(M_1 \cup M)$, то $f \in A(M)$.

Лемма 3. *Пусть* $M \subseteq L_p$ *и для любого* Θ, $\Theta \in AJ_p$, $M \not\subseteq \Theta$. *Тогда*

1) *Для любого* a, $a \in E_p$, *в* $A(M)$ *содержится константа* μ_a, $^1[\mu_a = a$.
2) $x_1 + x_2 + \cdots + x_{p+1} \in A(M)$.
3) *В* $E'_p(\xi)$ *найдутся дроби* μ_1, μ_0 *такие, что*

$$\xi(1 + \xi\mu_1)x + \xi^2\mu_0 \in A(M).$$

Доказательство. 1. По лемме 2 для любого a, $a \in E_p$, найдутся $\mu_{a,i}$, $\mu_{a,i} \in E'_p(\xi)$, $i = 0, 1$, такие, что в $A(M)$ содержится функция $f_a(x)$,

$$f_a(x) = \xi \cdot \mu_{a,1}x + a + \xi \cdot \mu_{a,0}.$$

Тогда

$$\underbrace{f_a(f_a(\ldots f_a(f_a(x))\ldots))}_{\tau \ \text{раз} \ f_a} =$$

$$\xi^\tau \mu_{a,1}^\tau x + \sum_{i=0}^{\tau-1} (\xi\mu_{a,1})^i (a + \xi\mu_{a,0}).$$

Эта функция τ-эквивалентна константе

$$\sum_{i=0}^{\tau-1} (\xi\mu_{a,1})^i (a + \xi\mu_{a,0}),$$

которая, в свою очередь, τ-эквивалентна константе $\frac{a+\xi\mu_{a,0}}{1-\xi\mu_{a,1}}$. Следовательно, константа $\frac{a+\xi\mu_{a,0}}{1-\xi\mu_{a,1}}$ содержится в $A(M)$ и, как нетрудно видеть, в первый момент эта константа реализует число a.

Часть 1 леммы 3 доказана.

2. По лемме 1 в $A(M)$ содержится л.-р-а. функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$, 1-эквивалентная сумматору $x_1 + x_2 + \cdots + x_{p+1}$.

Ввиду части 1 леммы 3 найдется константа γ, $\quad \gamma \in A(M)$. Тогда, учитывая замечание, функции

$$g_1(x_1) = g(x_1, \gamma, \gamma \ldots, \gamma),$$
$$g_2(x_2) = g(\gamma, x_2, \gamma \ldots, \gamma),$$

содержатся в $A(M)$.

Для некоторых μ_i, $\mu_i \in E'_p(\xi)$, $i = 0, 1, \ldots, p+1$, [1] $[\mu_i = 1$, $i = 1, \ldots, p+1$ справедливо равенство

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} \mu_i x_i + \mu_0.$$

Поэтому найдутся константы γ_1, γ_2 такие, что

$$g_i(x_i) = \mu_i x_i + \gamma_i, \quad 1, 2.$$

Заметим, что для любого натурального k в $E'_p(\xi)$ найдутся μ'_1, μ'_2, γ'_1 и γ'_2, удовлетворяющие равенствам

$$g_i^{p^k}(x_i) = \left(1 + \xi^{p^k}\mu'_i\right) x_i + \gamma'_i.$$

Поэтому для некоторой константы γ''_k, $\quad \gamma''_k \in E'_p(\xi)$, выполнено:

$$g\left(g_1^{p^k-1}(x_1), g_2^{p^k-1}(x_2), \gamma, \ldots, \gamma\right) =$$
$$\left(1 + \xi^{p^k}\mu'_1\right) x_1 + \left(1 + \xi^{p^k}\mu'_2\right) x_2 + \gamma''_k.$$

Эта функция p^k-эквивалентна сумме $x_1 + x_2 + \gamma_k''$.

Для любого натурального k в $A(M)$, следовательно, содержится функция p^k-эквивалентная функции

$$x_1+\bigl(x_2+\bigl(x_3+\dots\bigl(x_{p-1}+\bigl(x_p+x_{p+1}+\gamma_k''\bigr)+\gamma_k''\bigr)\cdots+\gamma_k''\bigr)+\gamma_k''\bigr)+\gamma_k'',$$

которая p^k-эквивалентна сумматору $x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1}$.

Далее, для любого натурального τ найдется k, $\quad k \in N$, такое, что $p^k \geqslant \tau$. Поэтому $x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1} \in A(M)$. Часть 2 леммы 3 доказана.

Осталось доказать часть 3. Из соотношения $M \not\subseteq M(\xi^2)$ следует, что в M содержится л.-р-а. функция $f\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$f\,(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \gamma',$$

для которой найдется i_0, $\quad i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, такое, что для некоторого μ', $\quad \mu' \in E_p'(\xi) \setminus \{\xi\}E_p'(\xi)$, и некоторого c_0, $\quad c_0 \in E_p$, выполнено: $\mu_{i_0} = c_0 + \xi\mu'$.

По части 1 настоящей леммы в $A(M)$ найдется константа γ. Тогда для некоторой константы $\tilde\gamma$ выполнено:

$$f(\underbrace{\gamma,\dots,\gamma}_{i_0-1\ \text{раз}\ \gamma},x,\gamma,\dots,\gamma)=\bigl(c_0+\xi\mu'\bigr)\,x+\tilde\gamma\in A(M).$$

Далее,

$$\bigl(c_0+\xi\mu'\bigr)\,x+\tilde\gamma+\underbrace{x+\dots+x}_{p-c_0\ \text{раз}\ x}+\underbrace{\gamma+\dots+\gamma}_{c_0\ \text{раз}\ \gamma}=$$
$$\xi\mu'x+c_0\gamma+\tilde\gamma\quad\in\quad A(M).$$

Требуется построить функцию $g_2(x)$, 2-эквивалентную ξx.

Пусть γ_i, $\quad i = 0, 1, \dots, p-1$ — константы из $A(M)$ такие, что ${}^1[\gamma_i = i$. Заметим, что γ_0 1-эквивалентна ξx.

Для некоторого c', $\quad c' \in E_p$, $\quad {}^1[(c_0\gamma + \tilde\gamma) = c'$. Тогда

$$\bigl(\xi\mu'x+c_0\gamma+\tilde\gamma\bigr)+\gamma_{p-c'}+\underbrace{\gamma_0,\dots,\gamma_0}_{p-1\ \text{раз}\ \gamma_0}\ =$$
$$\xi\mu'x+\bar\gamma\quad\in\quad A(M),$$

причем $\bar{\gamma} = a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots$.

Положим $g(x) = \xi\mu' x + \bar{\gamma}$.

Для некоторого c_1, $c_1 \in E_p \setminus \{0\}$, и некоторого μ'', $\mu'' \in E'_p(\xi)$ справедливо равенство $\mu' = c_1 + \xi\mu''$. Тогда найдутся $k, \mu''', \bar{\bar{\gamma}}$, $k \in E_p \setminus \{0\}$, $\mu''', \bar{\bar{\gamma}} \in E'_p(\xi)$, что для л.-р-а. функции $h(x)$,

$$h(x) = \underbrace{g(x) + \cdots + g(x)}_{k \quad \text{раз} \quad g} + \underbrace{\gamma_0 + \cdots + \gamma_0}_{p+1-k \quad \text{раз} \quad \gamma_0}$$

имеем $h(x) = \xi\left(1 + \xi\mu'''\right)x + \bar{\bar{\gamma}}$, ${}^1[\bar{\bar{\gamma}} = 0$.

Существует c, $c \in E_p$, такое, что константа $\bar{\bar{\gamma}}$ 2-эквивалентна константе $c\xi$. Тогда

$$h(x) + \underbrace{h(\gamma_1) + \cdots + h(\gamma_1)}_{p-c \quad \text{раз} \quad h} + \underbrace{h(\gamma_0) + \cdots + h(\gamma_0)}_{c \quad \text{раз} \quad h} =$$
$$\xi\left(1 + \xi\mu'''\right)x + \gamma^*,$$

где ${}^2[\gamma^* = 0, 0$.

Таким образом, $g_2(x)$, $g_2(x) = \xi\left(1 + \xi\mu'''\right)x + \gamma^*$ содержится в $A(M)$ и 2-эквивалентна задержке ξx. Часть 3 леммы, а, вместе с ней и вся лемма, доказаны.

Докажем утверждение 1 теоремы 1. Индукцией по построению нетрудно показать, что для любого Θ, $\Theta \in AJ_p$, выполнено: $\Sigma(\Theta) = \Theta$. Далее, пусть для некоторого Θ, $\Theta \in AJ_p$, каждый член последовательности f_1, f_2,..., f_k,... содержится в Θ и некоторая л.-р-а. функция f τ-эквивалентна f_τ, $\tau = 1, 2, \dots$. Из определения классов множества AJ_p следует, что включения $f \in \Theta$ и $f_2 \in \Theta$ равносильны. Поэтому получаем включение $f \in \Theta$. Следовательно, $A(\Theta) = \Theta$ и утверждение 1 теоремы доказано.

Далее докажем утверждение 2 теоремы 1, то есть что AJ_p — А-критериальная система. Для этого рассмотрим множество M, $M \subseteq L_p$, и $M \not\subseteq \Theta$, для любого Θ, $\Theta \in AJ_p$.

Докажем, что для любого натурального τ в $A(M)$ содержится л.-р-а. функция $g_\tau(x)$, которая τ-эквивалентна задержке ξx. Доказательство этого факта для $\tau = 1, 2$ содержится в предыдущем параграфе. Предположим, что для некоторого τ, $\tau > 2$, доказаны включения $g_i(x) \in A(M)$, $i = 1, 2, \dots, \tau - 1$. Тогда в $E'_p(\xi)$ найдутся μ и γ такие, что

$$g_{\tau-1}(x) = \left(\xi + \xi^{\tau-1}\mu\right)x + \xi^{\tau-1}\gamma.$$

Через $h_\tau(x)$ обозначим л.-р-а. функцию $g_{\tau-1}^{\tau-1}(x)$. Для некоторых μ' и γ', $\mu' \in E_p'(\xi), \gamma' \in E_p'(\xi)$, имеет место равенство:

$$h_\tau(x) = \left(\xi^{\tau-1} + \xi^\tau \mu'\right) x + \xi^{\tau-1}\gamma'.$$

Пусть ${}^1[\gamma' = c$. Как следует из части 1 леммы 3, в $A(M)$ содержится некоторая константа γ_{p-c} такая, что ${}^1[\gamma_{p-c} = p - c$. Тогда константа $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma} = h_\tau\left(\gamma_{p-c}\right)$ является τ-эквивалентной константе 0^∞.

Далее, найдется число k, $k \in E_p$, и найдется μ'', $\mu'' \in E_p'(\xi)$, такие, что

$$\mu = k + \xi\mu''.$$

Так как согласно пункту 1 леммы 3 $A(M)$ содержит константы, то пусть γ — какая-то из констант, содержащихся в $A(M)$. Тогда для функции $h_1(x)$,

$$h_1^*(x) = g_{\tau-1}(x) + \underbrace{h_\tau(x) + \cdots + h_\tau(x)}_{p-k \text{ раз } h} + \underbrace{\gamma + \cdots + \gamma}_{k \text{ раз } \gamma}$$

имеем для некоторых μ^* и γ^* из $E_p'(\xi)$:

$$h_1^*(x) = (\xi + \xi^\tau\mu^*)\, x + \gamma^* \quad \text{и} \quad h_1^*(x) \in A(M).$$

Поэтому л.-р-а. функция

$$h_1^*(x) + \underbrace{h_1^*\left(\bar{\gamma}\right) + \cdots + h_1^*\left(\bar{\gamma}\right)}_{p-1 \text{ раз } h_1} + \bar{\gamma}$$

τ-эквивалентна задержке ξx, то есть $g_\tau(x) \in A(M)$.

Последнее включение, выполненное для каждого натурального τ, означает, что $\xi x \in A(M)$, то есть задержка с нулевым начальным состоянием содержится в $A(M)$.

Л.-а, функция $\underbrace{\xi(\xi(\ldots\xi(x)\ldots))}_{\tau \text{ раз } \xi}$ является τ-эквивалентной константе 0. Поэтому, $0 \in A(M)$, откуда и из утверждения 2 леммы 3 для каждого n, $n \in N$, получаем

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \in A(M).$$

Для любого k, $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, одноместную функцию $f_k(x)$, $f_k(x) = k \cdot x$, получаем отождествлением всех переменных л.-р-а. функции $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$.

Далее, для любого μ, $\mu \in E'_p(\xi)$, и любого натурального τ найдутся числа a_i, $a_i \in E_p$, $i = 0, 1, \ldots, \tau - 1$, такие, что л.-р-а. функции μx и $\left(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_{\tau-1}\xi^{\tau-1}\right) x$ являются τ-эквивалентными. Но, имеют место соотношения

$$\left(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_{\tau-1}\xi^{\tau-1}\right) x =$$
$$f_{a_0}(x) + f_{a_1}(\xi x) + f_{a_2}\left(\xi^2 x\right) + \cdots + f_{a_{\tau-1}}\left(\xi^{\tau-1} x\right) \in A(M).$$

Поэтому

$$\mu x \in A(M) \tag{3}$$

для любого μ, $\mu \in E'_p(\xi)$.

По лемме 3 найдется константа γ_1, $\gamma_1 \in A(M)$, $^1[\gamma_1 = 1$, откуда $\gamma_1^{-1} \in E'_p(\xi)$ и из (3) имеем: $\gamma_1^{-1} \cdot x \in A(M)$. Поэтому константа $1 = \gamma_1^{-1} \cdot \gamma_1 \in A(M)$. Учитывая это и (3), для любой константы γ, $\gamma \in E'_p(\xi)$, получаем $\gamma \in A(M)$.

Рассмотрим произвольную л.-р-а. функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Имеет место разложение (1). По доказанному выше, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} \in A(M)$, $\mu_i(x) \in A(M)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\mu_0 \in A(M)$. Используя перечисленные функции и операцию подстановки, получим $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

А-критериальность системы AJ_p доказана. Таким образом, утверждение 2 теоремы 1 справедливо.

Докажем теперь утверждение 3 теоремы 1, то есть, что ни один из классов системы AJ_p не содержится в другом. Для этого рассмотрим множество л.-р-а. функций M,

$$M = \{ \ x_1 + x_2 + (p-1)x_3, x + 1, 0, x_1 + x_2 - k \ \mid$$
$$k = 0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Положим $AJ'_p = AJ_p \setminus \left\{M\left(\xi^2\right)\right\}$. Имеют место следующие утверждения:

1) $x_1 + x_2 - k \in T_k$ и для любого Θ, $\Theta \in AJ'_p \setminus \{T_k\}$, выполнено
$$x_1 + x_2 - k \notin \Theta.$$

2) $x_1 + x_2 + (p-1)x_3 \in V_p$, $x + 1 \in V_p$ и для любого Θ, $\Theta \in AJ'_p \setminus \{V_p\}$, справедливо:
$$\{x_1 + x_2 + (p-1)x_3, x + 1\} \not\subseteq \Theta.$$

3) $x+1 \in V_1, \quad 0 \in V_1$, но для любого $\Theta, \quad \Theta \in AJ'_p \setminus \{V_1\}$, справедливо:
$$\{x+1, 0\} \not\subseteq \Theta.$$

Таким образом, ни одно множество системы AJ'_p не содержится в другом.

Учитывая включение $M \subseteq M\left(\xi^2\right)$, получаем $M\left(\xi^2\right) \not\subseteq \Theta$ для любого $\Theta, \quad \Theta \in AJ'_p$. С другой стороны, через M' обозначим следующее множество л.-р-а. функций:

$$\{\quad f+\xi x \quad | \quad f \in M \quad\}.$$

Нетрудно видеть, что для любого $\Theta, \quad \Theta \in AJ'_p$, и любой л.-р-а. функции f включения $f \in \Theta$ и $f+\xi x \in \Theta$ выполняются или не выполняются одновременно. При этом ни одна из функций множества M' не содержится в $M\left(\xi^2\right)$. Поэтому для любого $\Theta, \quad \Theta \in AJ'_p$ в M' найдется функция $g, \quad g \in \Theta, g \notin M\left(\xi^2\right)$.

Отсюда получаем, что для любого $\Theta, \quad \Theta \in AJ'_p$, справедливо: $\Theta \not\subseteq M\left(\xi^2\right)$.

Таким образом, ни одно из множеств системы AJ_p не поглощается другим. Утверждение 3 теоремы 1 доказано.

Мы доказали, что AJ_p — приведенная критериальная система А-замкнутых классов в L_p [1].

Теорема доказана.

Доказательство следствия. Предполнота каждого из элементов множества AJ_p вытекает из доказанной теоремы. Действительно, пусть $\Theta \in AJ_p$ и $f \in L_p \setminus \Theta$. Каждому классу Θ', $\Theta' \in AJ_p \setminus \{\Theta\}$, сопоставим функцию $f_{\Theta'}$ из множества $\Theta \setminus \Theta'$, что возможно ввиду непустоты последнего множества по утверждению 2 теоремы 1.

Тогда множество

$$M, \quad M=\left\{f_{\Theta'} | \Theta' \in AJ_p \setminus \{\Theta\}\right\} \cup \{f\}$$

не содержится ни в одном из классов множества AJ_p, то есть по утверждению 2 теоремы $A(M)=L_p$ и предполнота класса Θ доказана.

Если замкнутый класс не содержится ни в одном из классов множества AJ_p, то он содержит подмножество, порождающее все L_p по операции А-замыкания. Поэтому предполных классов, отличных от элементов множества AJ_p нет. Следствие доказано.

2. О полноте в классе одноместных л.-р-а. функций, сохраняющих нулевую последовательность

В настоящем параграфе рассматривается подмножество $L^0_{p,1}$ множества L_p, состоящее из всех одноместных л.-р-а. функций из L_p, сохраняющих нулевую последовательность:

$$L^0_{p,1} = \{ \quad f \quad | \quad f \in L_p, \quad \text{в разложении} \quad (1): \quad n = 1, \mu_0 = 0\} .$$

Таким образом, множество $L^0_{p,1}$ совпадает с $E'_p(\xi)$, на котором рассмотрим следующие три операции:

1) Сложение «+» двух элементов из $E'_p(\xi)$.
2) Умножение «$\cdot$» двух элементов из $E'_p(\xi)$.
3) Если $\mu_1 \in E'_p(\xi)$ и $\mu_2 \in \{\xi\} \cdot E'_p(\xi)$, то через Об (μ_1, μ_2) обозначим следующее произведение: $\mu_1 \cdot (1-\mu_2)^{-1}$, где через $(1-\mu_2)^{-1}$ обозначен элемент μ поля $E_p(\xi)$, для которого выполнено:
$$(1-\mu_2)\,\mu = 1.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 4. *Операции «+», «$\cdot$» и «Об» не выводят из $E'_p(\xi)$.*

Доказательство. Утверждение леммы очевидно для операций сложения и умножения.

Пусть $\mu_1 \in E'_p(\xi)$ и $\mu_2 \in \{\xi\}E'_p(\xi)$. Тогда найдутся $u_i(\xi), v_i(\xi)$, $u_i(\xi) \in E_p[\xi]$, $v_i(\xi) \in E'_p[\xi]$, i=1,2, такие, что $\mu_1 = \frac{u_1(\xi)}{v_1(\xi)}$, $\mu_2 = \xi\frac{u_2(\xi)}{v_2(\xi)}$. Тогда

$$\left(1 - \xi\frac{u_2(\xi)}{v_2(\xi)}\right)^{-1} = \left(\frac{v_2(\xi) - \xi u_2(\xi)}{v_2(\xi)}\right)^{-1} = \frac{v_2(\xi)}{v_2(\xi) - \xi u_2(\xi)} \quad \in \quad E'_p(\xi),$$

так как $v_2(\xi) - \xi u_2(\xi) \in E'_p[\xi]$. Лемма доказана.

Замыкание множества M, $\quad M \subseteq E'_p(\xi)$, по перечисленным трем операциям обозначим $K^1(M)$.

Множество M, $\quad M \subseteq E'_p(\xi)$, называется K^1-замкнутым, если

$$K^1(M) = M.$$

Учитывая, что множество, состоящее из всех неприводимых в $E_p[\xi]$ приведенных многочленов, счетно [3], упорядочим эти многочлены некоторым образом:
$p_1(\xi), p_2(\xi), \ldots$ так, что $p_1(\xi) = \xi$.

Рассмотрим следующие подмножества множества $E'_p(\xi)$.

$$\begin{aligned} R_0^{(1)} \;=\; \Bigg\{ \;\frac{u(\xi)}{v(\xi)} \;\mid\; & u(\xi) \in E_p[\xi], \\ & v(\xi) \in E'_p[\xi], \quad \deg u(\xi) < \deg v(\xi) \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_i^{(1)} \;=\; \Bigg\{ \;\frac{u(\xi)}{v(\xi)} \;\mid\; & u(\xi) \in E_p[\xi], \quad v(\xi) \in E'_p[\xi], \\ & (u(\xi), v(\xi)) = 1, \quad p_i(\xi) | u(\xi) \Big\}, \quad i = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_0^{(1)} \;=\; \Bigg\{ \;\frac{u(\xi)}{v(\xi)} \;\mid\; & u(\xi) \in E_p[\xi], \quad v(\xi) \in E'_p[\xi], \\ & \text{найдется} \quad a, a \in E_p, \quad \text{что} \\ & \deg\left(u(\xi) - av(\xi)\right) < \deg v(\xi), \quad \text{и} \\ & u(\xi) - av(\xi) \in \{\xi\} \cdot E_p[\xi] \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_i^{(1)} \;=\; \Bigg\{ \;\frac{u(\xi)}{v(\xi)} \;\mid\; & u(\xi) \in E_p[\xi], \quad v(\xi) \in E'_p[\xi], \\ & \text{найдется} \quad a, a \in E_p, \quad \text{что} \\ & \xi p_i(\xi) | u(\xi) - av(\xi) \Big\}, \quad i = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Лемма 5. *Множество* $J^{(1)}$,

$$J^{(1)} = \Big\{ \quad R_i^{(1)}, \quad M_i^{(1)} \quad | \quad i = 0, 1, \ldots \quad \Big\}$$

состоит из K^1*-замкнутых в* $E'_p(\xi)$ *классов.*

Доказательство. Сначала докажем, что каждый элемент множества $J^{(1)}$ есть K^1-замкнутый класс в $E'_p(\xi)$.

Пусть $\mu_i \in R_0^{(1)}$, $i = 1, 2$. Тогда $\mu_i = \frac{u_i}{v_i}$, $u_i \in E_p[\xi]$, $v_i \in E'_p[\xi]$, $\deg u_i < \deg v_i$, $i = 1, 2$. Отсюда,

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{u_1 v_2 + u_2 v_1}{v_1 v_2} \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned}&\deg\left(u_1 v_2 + u_2 v_1\right) \leqslant \max\left(\deg\left(u_1 v_2\right), \deg\left(u_2 v_1\right)\right) = \\ &\max\left(\deg u_1 + \deg v_2, \deg u_2 + \deg v_1\right) < \\ &\max\left(\deg v_1 + \deg v_2, \deg v_2 + \deg v_1\right) = \\ &\deg v_1 + \deg v_2 = \deg\left(v_1 v_2\right),\end{aligned}$$

то есть $\mu_1 + \mu_2 \in R_0^{(1)}$.

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{u_1 u_2}{v_1 v_2} \quad \text{и}$$
$$\deg\left(u_1 u_2\right) = \deg u_1 + \deg u_2 < \deg v_1 + \deg v_2 = \deg\left(v_1 v_2\right),$$

следовательно, $\mu_1 \mu_2 \in R_0^{(1)}$.

Пусть для рассмотренных выше μ_i, $i = 1, 2$, определена $\text{Об}\left(\mu_1, \mu_2\right)$, то есть $u_2 = \xi u'_2$. Тогда

$$\text{Об}\left(\mu_1, \mu_2\right) = \frac{u_1(\xi) \cdot v_2(\xi)}{v_1(\xi)\left(v_2(\xi) - \xi u'_2(\xi)\right)}.$$

Из неравенства $\deg v_2(\xi) > \deg u_2(\xi)$ следует

$$\deg\big(v_2(\xi) - \xi u'_2(\xi)\big) = \deg v_2(\xi).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}&\deg\left(u_1(\xi) \cdot v_2(\xi)\right) = \deg\left(u_1(\xi)\right) + \deg\left(v_2(\xi)\right) < \\ &\deg\left(v_1(\xi)\right) + \deg\left(v_2(\xi)\right) = \deg\left(v_1(\xi)\right) + \deg\big(v_2(\xi) - \xi u'_2(\xi)\big) = \\ &\deg\big(v_1(\xi) \cdot \big(v_2(\xi) - \xi u'_2(\xi)\big)\big),\end{aligned}$$

следовательно, $\quad \text{Об}\left(\mu_1, \mu_2\right) \in R_0^{(1)}$.

Таким образом, $K^{(1)}\left(R_0^{(1)}\right) = R_0^{(1)}$ и $R_0^{(1)}$ является K^1-замкнутым классом.

Далее, пусть $\mu_i \in R_j^{(1)}, \quad i = 1,2$ для некоторого $j, \quad j \in N$. Тогда $\mu_i = \frac{u_i}{v_i}, \quad u_i = p_j u_i', \quad u_i' \in E_p[\xi], \quad v_i \in E_p'[\xi], \quad (v_i, p_j) = 1, \quad i = 1,2.$

Отсюда,

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{u_1 v_2 + u_2 v_1}{v_1 v_2} = \frac{p_j \left(u_1' v_2 + u_2' v_1\right)}{v_1 v_2} \in R_j^{(1)},$$

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{u_1 u_2}{v_1 v_2} = \frac{p_j u_1' u_2}{v_1 v_2} \in R_j^{(1)}.$$

Если к паре μ_1, μ_2 применима операция «Об», то

$$\text{Об}\,(\mu_1, \mu_2) = \frac{u_1 v_2}{v_1 \left(v_2 - u_2\right)} = \frac{p_j u_1' v_2}{v_1 \left(v_2 - p_j u_2'\right)} \in R_j^{(1)}.$$

Следовательно, $K^{(1)}\left(R_j^{(1)}\right) = R_j^{(1)}$ и класс $R_j^{(1)}$ K^1-замкнут.

Теперь рассмотрим множество $M_0^{(1)}$. Пусть $\mu_i \in M_0^{(1)}$, $\mu_i = \frac{u_i}{v_i}$, $u_i \in E_p[\xi]$, $v_i \in E_p'[\xi]$, $i = 1,2$. Тогда найдутся числа a_i, $i = 1,2$, такие, что $\deg\left(u_i - a_i v_i\right) < \deg v_i$ и $u_i - a v_i \in \{\xi\} \cdot E_p[\xi]$, $i = 1,2$.

Имеем:

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{u_1 v_2 + u_2 v_1}{v_1 v_2},$$

$$\begin{aligned}
&u_1 v_2 + u_2 v_1 - \left(a_1 + a_2\right) v_1 v_2 = \\
&v_2 \left(u_1 - a_1 v_1\right) + v_1 \left(u_2 - a_2 v_2\right) \in \{\xi\} E_2[\xi],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\deg\left(u_1 v_2 + u_2 v_1 - \left(a_1 + a_2\right) v_1 v_2\right) \leqslant \\
&\max\left(\deg\left(v_2\left(u_1 - a_1 v_1\right)\right), \deg\left(v_1\left(u_2 - a_2 v_2\right)\right)\right) = \\
&\max\left(\deg v_2 + \deg\left(u_1 - a_1 v_1\right), \deg v_1 + \deg\left(u_2 - a_2 v_2\right)\right) < \\
&\max\left(\deg v_2 + \deg v_1, \deg v_1 + \deg v_2\right) = \deg\left(v_1 v_2\right),
\end{aligned}$$

то есть $\mu_1 + \mu_2 \in M_0^{(1)}$.

Далее, $\mu_1 \mu_2 = \frac{u_1 u_2}{v_1 v_2}$, и, учитывая, что $\deg u_2 \leq \deg v_2$,

$$\begin{aligned}
&u_1 u_2 - \left(a_1 a_2\right) v_1 v_2 = u_2 \left(u_1 - a_1 v_1\right) + \\
&a_1 v_1 \left(u_2 - a_2 v_2\right) \in \{\xi\} E_2[\xi] \quad \text{и} \\
&\deg\left(u_1 u_2 - a_1 a_2 v_1 v_2\right) \leqslant \max\left(\deg u_2 + \deg\left(u_1 - a_1 v_1\right),\right. \\
&\left.\deg v_1 + \deg\left(u_2 - a_2 v_2\right)\right) < \\
&\max\left(\deg v_2 + \deg v_1, \deg v_1 + \deg v_2\right) = \deg\left(v_1 v_2\right).
\end{aligned}$$

Следовательно, $\mu_1\mu_2 \in M_0^{(1)}$.

Если определена Об (μ_1, μ_2), то Об $(\mu_1, \mu_2) = \mu_1$Об $(1, \mu_2)$. Докажем, что Об $(1, \mu_2) = \frac{v_2}{v_2 - u_2} \in M_0^{(1)}$. Действительно, $u_2 \in \{\xi\}E_2[\xi]$. Отсюда и из $u_2 - a_2 v_2 \in \{\xi\}E_2[\xi]$ следует равенство $a_2 = 0$. Следовательно, $\deg u_2 < \deg v_2$. Учитывая полученное и равенство $v_2 - (v_2 - u_2) = u_2$ получаем требуемые включения Об $(1, \mu_2) \in M_0^{(1)}$ и Об $(\mu_1, \mu_2) \in M_0^{(1)}$. Равенство $K^{(1)}\left(M_0^{(1)}\right) = M_0^{(1)}$ доказано.

Теперь докажем, что множества $M_j^{(1)}$ $\quad j = 1, 2, \ldots$ являются K^1-замкнутыми классами. Пусть для некоторого $j, \quad j \in N$, имеем: $\mu_i \in M_j^{(1)}, \quad \mu_i = \frac{u_i}{v_i}, \quad u_i \in E_p[\xi], \quad v_i \in E_p'[\xi], \quad i = 1, 2$ и найдутся числа $a_i, \quad i = 1, 2$, что $\xi p_j | \left(u_i - a_i v_i\right), \quad i = 1, 2$.

Тогда

$$\begin{aligned} &\xi p_j | u_1 v_2 + u_2 v_1 - \left(a_1 + a_2\right) v_1 v_2 = \\ &v_2 \left(u_1 - a_1 v_1\right) + v_1 \left(u_2 - a_2 v_2\right) \end{aligned}$$

и $\mu_1 + \mu_2 \in M_j^{(1)}$;

$$\begin{aligned} &\xi p_j | u_1 u_2 - a_1 a_2 v_1 v_2 = \\ &u_2 \left(u_1 - a_1 v_1\right) + a_1 v_1 \left(u_2 - a_2 v_2\right), \end{aligned}$$

то есть $\mu_1\mu_2 \in M_j^{(1)}$.

Далее, пусть определена Об (μ_1, μ_2). Тогда $\mu_2 \in \{\xi\}E_2'(\xi)$ и, как нетрудно видеть, $\xi p_j | u_2$. Поэтому $\xi p_j | v_2 - (v_2 - u_2)$, откуда,

$$\text{Об}\,(\mu_1, \mu_2) = \mu_1 \text{Об}\,(1, \mu_2) = \mu_1 \frac{v_2}{v_2 - u_2} \in M_j^{(1)}.$$

Таким образом, $K^{(1)}\left(M_j^{(1)}\right) = M_j^{(1)}$. Лемма 2 доказана.

Лемма 6. *Ни одно множество системы $J^{(1)}$ не содержится в другом.*

Доказательство. Через $J_1^{(1)}$ обозначим множество

$$\left\{ \quad R_i^{(1)} \quad | \quad i = 0, 1, \ldots \quad \right\},$$

а через $J_2^{(1)}$ обозначим множество

$$\left\{ \quad M_i^{(1)} \quad | \quad i = 0, 1, \ldots \quad \right\}.$$

Имеем: $J^{(1)} = J_1^{(1)} \cup J_2^{(1)}$. По определению классов $R_i^{(1)}$, для любого $i, \quad i = 0,1,\dots$, выполнено: $1 \notin R_i^{(1)}$. С другой стороны, для любого $i, \quad i = 0,1,\dots$, справедливо $1 \in M_i^{(1)}$. Следовательно, для любого $\Theta_1, \quad \Theta_1 \in J_1^{(1)}$, и для любого $\Theta_2, \quad \Theta_2 \in J_2^{(1)}$, справедливо: $\Theta_2 \not\subseteq \Theta_1$.

Далее, $\frac{\xi}{1+\xi^2} \in M_0^{(1)}$ и $\frac{\xi}{1+\xi^2} \notin M_i^{(1)}$ для любого $i, \quad i = 1,2,\dots$. Кроме того, для любого $i, \quad i = 1,2,\dots$ и любого $j, \quad , j = 0,1,\dots,i-1,i+1,i+2,\dots, \qquad \xi p_i \in M_i^{(1)}, \qquad \xi p_i \notin M_j^{(1)}$. Поэтому любой K^1-замкнутый класс из множества $J_2^{(1)}$ не содержится ни в каком другом классе из множества $J^{(1)}$.

Справедливо:

1) $\frac{1}{1+\xi} \in R_0^{(1)}$, для любого $\Theta, \quad \Theta \in J^{(1)} \setminus \{R_0^{(1)}\}, \qquad \frac{1}{1+\xi} \notin \Theta$;
2) $\frac{\xi}{1+\xi} \in R_1^{(1)}$, для любого $\Theta, \quad \Theta \in J^{(1)} \setminus \{R_1^{(1)}\}, \qquad \frac{\xi}{1+\xi} \notin \Theta$;
3) Для любого $k, \quad k = 2,3,\dots$

$$\{ \quad p_k, \quad \xi p_k \quad |\} \subseteq R_k^{(1)},$$

но $p_k \notin R_j^{(1)}$ для любого $j, \quad j = 0,1,\dots,k-1,k+1,k+2,\dots$,
$p_k \notin M_k^{(1)}, \quad \xi p_k \notin M_j^{(1)}, \qquad j = 0,1,\dots,k-1,k+1,k+2,\dots$.

Учитывая приведенные соотношения, заключаем, что никакой класс из $J^{(1)}$ не содержится ни в каком другом классе из $J^{(1)}$. Лемма 3 доказана.

Следствие 2. *Для любого Θ, $\Theta \in J^{(1)}$, выполнено: $\Theta \neq E_p'(\xi)$.*

Лемма 7. *1) Пусть $M \subseteq E_p'(\xi)$ и $M \not\subseteq R_i^{(1)}, \quad , i = 0,1, \qquad M \not\subseteq M_0^{(1)}$. Тогда $K^1(M)$ содержит л.-р-а. функцию $\frac{u}{v}, \quad u \in E_p[\xi]$, $v \in E_p'[\xi], \qquad \frac{u}{v} \in E_p'(\xi) \setminus \{\xi\}E_p'(\xi), \qquad \deg u > \deg v$.*

2) Пусть $M \subseteq E_p'(\xi)$ и для некоторого $i, \qquad i \in \{2,3,\dots\}$, справедливы: $M \not\subseteq R_i^{(1)}, \qquad M \not\subseteq M_i^{(1)}$. Тогда $K^1(M)$ содержит л.-р-а. функцию $\frac{u}{v}, \qquad u \in E_p[\xi], \quad v \in E_p'[\xi], \qquad (u,v) = 1, \qquad p_i(\xi)|v$.

Доказательство. Докажем утверждение 1 леммы. Пусть $M \subseteq E_p'(\xi), \qquad M \not\subseteq R_0^{(1)}, \qquad M \not\subseteq R_1^{(1)}$ и $M \not\subseteq M_0^{(1)}$.

Покажем, что в $K^1(M)$ содержится л.-р-а. функция, не содержащаяся в $R_0^{(1)}$ и $R_1^{(1)}$. По условию в M найдутся л.-р-а. функции μ_0,

$\mu_1, \quad \mu_i \notin R_i^{(1)}, \quad i = 0, 1$. Если $\mu_0 \notin R_1^{(1)}$ или $\mu_1 \notin R_0^{(1)}$, то требуемая функция найдена. Если $\mu_0 \in R_1^{(1)}$ и $\mu_1 \in R_0^{(1)}$, то из замкнутости $R_i^{(1)}, \quad i = 1, 2$, по операции сложения следует, что $\mu_0 + \mu_1 \notin R_i^{(1)}$ для $i = 0$ и для $i = 1$.

Докажем, что в $K^1(M)$ найдется л.-р-а. функция, не содержащаяся ни в одном из классов $R_0^{(1)}$, $R_1^{(1)}$, $M_0^{(1)}$. Пусть μ_2 — л.-р-а. функция из $K^1(M)$, не содержащаяся в $R_0^{(1)}$ и $R_1^{(1)}$. Требуется рассмотреть случай, когда $\mu_2 \in M_0^{(1)}$. Имеем: $\mu_2 = \frac{u_2}{v_2}$, $v_2 \in E'_p[\xi]$, $u_2 \in E'_p[\xi]$, $\deg u_2 = \deg v_2$. Кроме того, в M найдется л.-р-а. функция μ_3, $\mu_3 = \frac{u_3}{v_3}$, $u_3 \in E_p[\xi]$, $v_3 \in E'_p[\xi]$, $\mu_3 \notin M_0^{(1)}$.

Так как умножение числителя и знаменателя дроби на одно и то же число не изменяет дробь, то, не ограничивая общность рассуждений, будем считать, что свободные члены многочленов v_2 и v_3 равны 1.

Заметим, что μ_3 не может содержаться сразу и в классе $R_0^{(1)}$ и в классе $R_1^{(1)}$, так как в противном случае, $u_3 - 0 \cdot v_3 \in \{\xi\}E_p[\xi]$ и $\deg(u_3 - 0 \cdot v_3) < \deg v_3$, то есть $\mu_3 \in M_0^{(1)}$.

Если $\mu_3 \in R_0^{(1)}$ и $\mu_3 \notin R_1^{(1)}$, то $\mu_3 = \frac{c+\xi u'_3}{v_3}$ для некоторых c, u'_3, $c \in E_p \setminus \{0\}$, $u'_3 \in E_p[\xi]$, $\deg(c + \xi u'_3) < \deg v_3$. Пусть при этом $\mu_2 = \frac{d+\xi u'_2}{v_2}$. Тогда для μ_4, $\mu_4 = d\mu_3 - c\mu_2$, $\mu_4 = \frac{u_4}{v_4}$, имеем: $\mu_4 \in \{\xi\}E_p(\xi) \setminus \{0\}$, $\deg v_4 = \deg u_4$. Поэтому $\mu_4 = \frac{\xi u'_4 + c'\xi^r}{v'_4 + d'\xi^r}$, причем $u'_4 \in E_p[\xi]$, $v'_4 \in E'_p[\xi]$, $\deg \xi u'_4 < r$, $\deg v'_4 < r$, $c' \in E_p \setminus \{0\}$, $d' \in E_p \setminus \{0\}$.

Для функции $\mu_5 = \text{Об}\left(\mu_2, \frac{d'}{c'}\mu_4\right)$ имеем:

$$\mu_5 = \mu_2 \frac{v'_4 + d'\xi^r}{v'_4 - \frac{d'}{c'}\xi u'_4}.$$

Поэтому, $\mu_5 \notin R_0^{(1)}$, $\mu_5 \notin R_1^{(1)}$, $\mu_5 \notin M_0^{(1)}$.

Если $\mu_3 \notin R_0^{(1)}$ и $\mu_3 \in R_1^{(1)}$, то $\mu_3 = \frac{\xi u'_3}{v_3}$, $u'_3 \in E_2[\xi] \setminus \{0\}$, $v_3 \in E'_2[\xi]$. При этом в случае $\deg(\xi u'_3) > \deg v_3$, для л.-р-а. функции $\mu_6 = \mu_2 + \mu_3$ имеем: $\mu_6 \notin R_0^{(1)}$, $\mu_6 \notin R_1^{(1)}$, $\mu_6 \notin M_0^{(1)}$ и требуемая л.-р-а. функция найдена. В случае $\deg(\xi u') = \deg v_3$ задача построения нужной л.-р-а. функции сводится к рассмотренной выше.

Таким образом, в $K^1(M)$ содержится л.-р-а. функция $\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu} \notin \Theta$, для любого Θ, $\Theta \in \{R_0^{(1)}, R_1^{(1)}, M_0^{(1)}\}$. Для некоторых многочленов $\tilde{u}$, $\tilde{v}$

из $E'_p[\xi]$ выполнено: $\tilde{\mu} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}$. При этом $\deg \tilde{u} \geqslant \deg \tilde{v}$. Если $\deg \tilde{u} > \deg \tilde{v}$, то требуемая в п. 1 леммы функция получена. Если $\deg \tilde{u} = \deg \tilde{v}$, то из соотношения $\tilde{\mu} \notin M_0^{(1)}$ следует, что найдется число a, $a \in E_p$, такое, что $\tilde{u} - a\tilde{v} \in \{\xi\}E_p[\xi]$ и $\deg(\tilde{u} - a\tilde{v}) = \deg \tilde{v}$. Тогда для некоторого числа c, $c \in E_p$, л.а. функция $\bar{\mu}$, $\bar{\mu} = \text{Об}\,(\tilde{\mu}, c\,(\tilde{\mu} - a))$, обладает следующими свойствами: $\bar{\mu} \in E'_p(\xi) \setminus \{\xi\}E'_p(\xi)$, $\bar{\mu} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}}$, $\bar{u} \in E_p[\xi]$, $\bar{v} \in E_p[\xi]$, $\deg \bar{u} > \deg \bar{v}$.

Утверждение 1 леммы 7 доказано.

Докажем теперь утверждение 2. Пусть $M \subseteq E'_p(\xi)$ и для некоторого i, $i \in \{2, 3, \dots\}$, $M \not\subseteq R_i^{(1)}$, $M \not\subseteq M_i^{(1)}$. Через μ_1 обозначим л.-р-а. функцию из M, $\mu_1 \notin R_i^{(1)}$, а через μ_2 обозначим функцию из M, не содержащуюся в $M_i^{(1)}$. Если $\mu_1 \in M_i^{(1)}$ и $\mu_2 \in R_i^{(1)}$, то из замкнутости множеств $R_i^{(1)}$ и $M_i^{(1)}$ следует, что $\mu_1 + \mu_2 \notin R_i^{(1)}$ и $\mu_1 + \mu_2 \notin M_i^{(1)}$. Таким образом, в $K^1(M)$ найдется л.-р-а. функция μ_0, не содержащаяся ни в $R_i^{(1)}$, ни в $M_i^{(1)}$.

Найдутся многочлены u_0, v_0, $u_0 \in E_p[\xi]$, $v_0 \in E'_p[\xi]$ такие, что $\mu_0 = \frac{u_0}{v_0}$. Найдется такое a, $a \in E_p$, для которого выполнено: $u_0 - av_0 \in \{\xi\}E_p[\xi]$. Из соотношения $\mu_0 \notin M_i^{(1)}$ следует, что $u_0 - av_0$ не делится на $p_i(\xi)$. Тогда для л.-р-а. функции $\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu} = \mu_0\,(\mu_0 - a)$, имеем: $\tilde{\mu} \in K^1(M)$, $\tilde{\mu} = \frac{u_0(u_0 - av_0)}{v_0^2} \in \{\xi\}E'_p(\xi)$ и многочлен $u_0\,(u_0 - av_0)$ не делится на $p_i(\xi)$. Тогда для некоторых многочленов $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, выполнено: $\tilde{\mu} = \frac{\xi\tilde{u}}{\tilde{v}}$, $\tilde{u} \in E_p[\xi]$, $\tilde{v} \in E_p[\xi]$, причем $\tilde{u}$ не делится на $p_i(\xi)$.

Если $\tilde{v}$ делится на $p_i(\xi)$, то требуемая в утверждении 2 леммы 7 функция найдена. В противном случае, докажем, что найдется натуральное число T такое, что многочлен

$$\tilde{v}^T - (\xi\tilde{u})^T \quad \text{делится на} \quad p_i(\xi). \tag{4}$$

Для этого сначала покажем, что для любого многочлена u, $u \in E_p[\xi]$, взаимно простого с $p_i(\xi)$, найдется натуральное число $T(u)$, для которого выполнено утверждение:

$$u^{T(u)} - 1 \quad \text{делится на} \quad p_i(\xi). \tag{5}$$

Действительно, рассмотрим последовательность многочленов $r_j(\xi)$ таких, что $r_j(\xi)$ — остаток от деления u^j на $p_i(\xi)$. Все многочлены $r_j(\xi)$, $j = 1, 2, \dots$, имеют степень меньшую $\deg p_i(\xi)$. Таких попарно различных многочленов конечное число. Поэтому найдутся натуральные числа j_1 и j_2, $j_1 < j_2$, для которых выполнено: $r_{j_1}(\xi) = r_{j_2}(\xi)$. Поэтому многочлен $u^{j_2} - u^{j_1}$ делится на $p_i(\xi)$ и $u^{j_1}\left(u^{j_2-j_1} - 1\right)$ делится на $p_i(\xi)$. Так как u не делится на p_i, то $u^{j_2-j_1} - 1$ делится на $p_i(\xi)$. Утверждение (5) доказано.

Для многочленов $\tilde{v}$ и $\xi\tilde{u}$ из $(\tilde{v}, p_i) = 1$ и $(\xi\tilde{u}, p_i) = 1$ следует, что для некоторых натуральных чисел T_1 и T_2 справедливы утверждения: $\tilde{v}^{T_1} - 1$ делится на p_i и $(\xi\tilde{u})^{T_2} - 1$ делится на p_i. Так как $\tilde{v}^{T_1T_2} - 1$ делится на $\tilde{v}^{T_1} - 1$, а $(\xi\tilde{u})^{T_1T_2} - 1$ делится на $(\xi\tilde{u})^{T_2} - 1$, то многочлен $\tilde{v}^{T_1T_2} - (\xi\tilde{u})^{T_1T_2}$, равный $\tilde{v}^{T_1T_2} - 1 - \left((\xi\tilde{u})^{T_1T_2} - 1\right)$, делится на p_i.

Утверждение (4) доказано.

Теперь нетрудно видеть, что для л.-р-а. функции $\bar{\mu}$, $\bar{\mu} =$ Об $\left(\tilde{\mu}, \tilde{\mu}^T\right)$, $\bar{\mu} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}}$, $\bar{u} \in E_p[\xi]$, $\bar{v} \in E_p[\xi]$, $(\bar{u}, \bar{v}) = 1$ выполнено: $\bar{v} \in p_i E_p[\xi]$.

Лемма доказана.

Следующая лемма означает, что $J^{(1)}$ является критериальной системой в $E'_p(\xi)$.

Лемма 8. *Пусть $M \subseteq E'_p(\xi)$. Если для любого Θ, $\Theta \in J^{(1)}$, выполнено: $M \not\subseteq \Theta$, то $K^{(1)}(M) = E'_p(\xi)$.*

Доказательство. Рассмотрим множество M л.-р-а. функций, не содержащееся ни в одном классе Θ, $\Theta \in J^{(1)}$.

Замыкание множества M по операциям сложения, умножения и деления является полем P, которое есть простое алгебраическое расширение [3] поля E_p. Таким образом, найдется μ, $\mu \in P$, такое, что $P = E_p(\mu)$. Заметим, что $\deg \mu > 0$. Действительно, в противном случае выполнено: $\mu \in E_p$. Поэтому $E_p(\mu) \subseteq E_p$ и $M \subseteq K^{(1)}(M) \subseteq E_p \subseteq M_0$, что не выполнено по условию.

Из неравенства $\deg \mu > 0$ вытекает, что для любого числа c, $c \in E_p$, выполнены равенства:

$$E_p(\mu) = E_p(\mu + c) = E_p\left(\frac{1}{\mu} + c\right).$$

Поэтому, не ограничивая общность рассуждений, будем предполагать, что $\mu \in \{\xi\} \cdot E'_p(\xi)$.

Докажем, что $\deg \mu = 1$.

Если $\deg\mu > 1$, $\mu = \xi\frac{u}{v}$, $(\xi u, v) = 1$, то при $\deg u \geqslant 1$ найдется неприводимый многочлен $p_i(\xi)$, который делит u. Тогда, исходя из соотношения

$$K^{(1)}(M) \subseteq E_p(\mu),$$

для любого $\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu} \in K^{(1)}(M)$, найдутся числа k, n, a_0, a_1, $\ldots$, a_k, b_0, b_1, $\ldots$, b_n, $k \in N$, $n \in N$, $a_i \in E_p$, $b_j \in E_p$, $b_0 \neq 0$ такие, что:

$$\tilde{\mu} = \frac{a_0\mu^0 + a_1\mu^1 + \cdots + a_k\mu^k}{b_0 + b_1\mu^1 + \cdots + b_n\mu^n}.$$

Отсюда и из $\{\mu, 1\} \subseteq M_i$ получаем $\tilde{\mu} \in M_i$.

При $\deg u = 0$, то есть $u \in E_p \setminus \{0\}$, и $\deg\mu > 1$ имеем: $\deg v > 1$ и, поэтому, $\{1, \mu\} \subseteq M_0^{(1)}$. В этом случае любое $\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu} \in K^{(1)}(M)$, содержится в $M_0^{(1)}$. Полученное противоречие означает, что равенство $\deg\mu = 1$ доказано.

Таким образом, в E_p найдутся числа c_1, c_2, c_3, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, такие, что $\mu = \frac{c_1\xi}{c_2 + c_3\xi}$. Имеем: $1 = \frac{\mu}{\mu}$, поэтому для любого c, $c \in E_p$, выполнено: $c \in E_p(\mu)$.

Справедливо равенство:

$$\xi = \begin{cases} c_1^{-1}c_2\mu, \quad \text{если} \quad c_3 = 0, \\ \frac{c_1c_2}{c_3^2} \cdot \left(\left(\frac{c_1}{c_3} - \mu \right)^{-1} - \frac{c_3}{c_1} \right), \quad \text{если} \quad c_3 \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому $E_p(\mu) = E_p(\xi)$. Отсюда и из равенства $P = E_p(\mu)$ следует, что найдутся дроби μ_1 и μ_2, $\mu_i \in E'_p(\xi) \setminus \{0\}$, $i = 1, 2$, которые могут быть получены из л.-р-а. функций множества M с использованием лишь операций сложения и умножения, такие, что $\xi = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.

Из последнего утверждения получаем, что для некоторого μ_0, $\mu_0 \in E'_p(\xi) \setminus \{\xi\}E'_p(\xi)$, $\mu_0 = \frac{u_0}{v_0}$, $\quad (u_0, v_0) = 1$ и некоторого k, $k \in Z_+$, выполнено включение:

$$\left\{\xi^k\mu_0, \xi^{k+1}\mu_0\right\} \subseteq K^1(M).$$

По части 1 леммы 7 в $K^1(M)$ найдется л.-р-а. функция $\bar{\mu}$, $\bar{\mu} \in E'_p(\xi) \setminus \{\xi\}E'_p(\xi)$, $\bar{\mu} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}}$ $\deg\bar{u} > \deg\bar{v}$. Поэтому положим:

$$\mu_3 = \begin{cases} \mu_0, \quad \text{если} \quad \deg u_0 \geqslant \deg v_0, \\ \mu_0\,(\bar{\mu})^{\deg v_0 - \deg u_0}, \quad \text{если} \quad \deg u_0 < \deg v_0. \end{cases}$$

Тогда
$$\left\{\xi^k\mu_3, \xi^{k+1}\mu_3\right\} \subseteq K^1(M) \tag{6}$$
и для μ_3, $\mu_3 = \frac{u}{v}$, выполнено: $u \in E_p'[\xi]$, $v \in E_p'[\xi]$, $\deg u \geqslant \deg v$.

Далее докажем, что найдутся натуральные числа k_0 и T_0, что для любых k', T, $k' \in N$, $T \in N$, $k' \geqslant k_0$, $T \geqslant T_0$, выполнено:
$$\xi^{k'} \cdot \mu_3^T \in K^1(M). \tag{7}$$

Сначала заметим, что найдутся числа $a_0, a_1, \ldots, a_{n_1}, b_0, b_1, \ldots, b_{n_2}$, $a_i \in E_p$, $i = 0, 1, \ldots, n_1$, $b_j \in E_p$, $j = 0, 1, \ldots, n_2$, $a_0 \neq 0$, $a_{n_1} \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $b_{n_2} \neq 0$, $n_1 \geqslant n_2$, такие, что
$$\mu_3 = \frac{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_{n_1}\xi^{n_1}}{b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + \cdots + b_{n_2}\xi^{n_2}}.$$

Из последнего равенства вытекает следующее тождество:
$$\begin{gathered} a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_{n_1}\xi^{n_1} - \\ -b_0\mu_3 - b_1\mu_3\xi - b_2\mu_3\xi^2 - \cdots - b_{n_2}\mu_3\xi^{n_2} = 0, \end{gathered}$$

откуда
$$\begin{aligned} \xi^{n_1} \ = \ & (a_{n_1})^{-1} b_0\mu_3 + (a_{n_1})^{-1} b_1\mu_3\xi + (a_{n_1})^{-1} b_2\mu_3\xi^2 \\ & + \cdots + (a_{n_1})^{-1} b_{n_2}\mu_3\xi^{n_2} - (a_{n_1})^{-1} a_0 - (a_{n_1})^{-1} a_1\xi - \\ & (a_{n_1})^{-1} a_2\xi^2 - \cdots - (a_{n_1})^{-1} a_{n_1-1}\xi^{n_1-1} \end{aligned} \tag{8}$$

и
$$\begin{aligned} \mu_3 = {} & b_0^{-1}a_0 + b_0^{-1}a_1\xi + b_0^{-1}a_2\xi^2 \\ & + \cdots + b_0^{-1}a_{n_1}\xi^{n_1} - b_0^{-1}b_1\mu_3\xi - b_0^{-1}b_2\mu_3\xi^2 - \cdots - b_0^{-1}b_{n_2}\mu_3\xi^{n_2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Положим
$$A_0 = \{(i,j) | i \in N, i \geqslant k + n_1 - 1, j \in N, k \cdot i \leqslant j \leqslant (k+1)i\},$$
$$A_t = \{(i,j) | i \in N, i \geqslant k + n_1 - 1, j \in N, j = (k+1)i + t\}, \ \ t = 1, 2, \ldots,$$
$$A_t' = \bigcup_{t' \leqslant t} A_{t'}, \ \ t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Нетрудно видеть, что

$$A'_t = \{(i,j) | i \in N, i \geqslant k + n_1 - 1, j \in N, k \cdot i \leqslant j \leqslant (k+1)i + t\}.$$

Из (6) для любой пары (i,j), $(i,j) \in A'_0$:

$$\xi^j \mu_3^i \in K^{(1)}(M). \tag{10}$$

Предположим, что для некоторого t, $t \in Z_+$ и для любой пары (i,j), $(i,j) \in A'_t$ выполнено: $\xi^j \mu_3^i \in K^{(1)}(M)$. Пусть $(i,j) \in A_{t+1}$. Тогда из равенства (8) имеем:

$$\begin{aligned} \xi^j \mu_3^i \quad = \quad & a_{n_1}^{-1} b_0 \xi^{j-n_1} \mu_3^{i+1} + a_{n_1}^{-1} b_1 \xi^{j-n_1+1} \mu_3^{i+1} + a_{n_1}^{-1} b_2 \xi^{j-n_1+2} \mu_3^{i+1} + \\ & \cdots + a_{n_1}^{-1} b_{n_2} \xi^{j-n_1+n_2} \mu_3^{i+1} - a_{n_1}^{-1} a_0 \xi^{j-n_1} \mu_3^i - a_{n_1}^{-1} a_1 \xi^{j-n_1+1} \times \\ & \mu_3^i - a_{n_1}^{-1} a_2 \xi^{j-n_1+2} \mu_3^i - \cdots - a_{n_1}^{-1} a_{n_1-1} \xi^{j-1} \mu_3^i. \end{aligned} \tag{11}$$

Из $(i,j) \in A_{t+1}$ следуют соотношения: $i \geqslant k + n_1 - 1$, $j = (k+1)i + t + 1$. Отсюда получаем: $i + 1 \geqslant k + n_1$,
$j - n_1 = (k+1)i + t + 1 - n_1 \geqslant ki + t + 1 + k - 1 \geqslant k(i+1)$ и $j - n_1 + n_2 \leqslant j + k = (k+1)i + t + 1 + k = (k+1)(i+1) + t$.

Из полученных неравенств вытекает включение

$$\{(i+1, j-n_1), (i+1, j-n_1+1), \ldots, (i+1, j-n_1+n_2)\} \subseteq A'_t.$$

Из соотношений $i \geqslant k + n_1 - 1$, $j - n_1 \geqslant ki$, $j - 1 = (k+1)i + t$ получаем:

$$\{(i, j-n_1), (i, j-n_1+1), \ldots, (i, j-1)\} \subseteq A'_t.$$

Таким образом, из $\{\xi^j \mu_3^i | (i,j) \in A'_t\} \subseteq K^1(M)$ следует, что

$$\{\xi^j \mu_3^i | (i,j) \in A_{t+1}\} \subseteq K^1(M).$$

Отсюда и из утверждения (10), используя метод математической индукции, получаем, что для любой пары (i,j), $(i,j) \in A'$, $A' = \bigcup_{t=0}^{\infty} A'_t$, справедливо:

$$\xi^j \mu_3^i \in K^1(M).$$

Если $k = 0$, то включение (7) доказано для любых T и k', $T \geqslant k + n_1 - 1$, $k' \geqslant 0$.

Пусть $k > 0$. Положим

$$B_0 = A',$$
$$B_t = \{(i,j) | i \in N, j \in N, j \geqslant k\,(k + n_1 - 1)\,, j = ki - t\}\,, \quad t = 1,2,\ldots,$$
$$B'_t = \bigcup_{t' \leqslant t} B_{t'}, \quad t = 0,1,2,\ldots.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} B'_t \;\; = \;\; & \{(i,j) | i \in N, i \geqslant k + n_1 - 1, j \in N, \\ & j \geqslant \max\left(k \cdot i - t, k\,(k + n_1 - 1)\right)\}\,. \end{aligned}$$

Умножая левую и правую части равенства (9) на $\xi^j \mu_3^{i-1}$, получаем:

$$\begin{aligned} \xi^j \mu_3^i \;\; = \;\; & b_0^{-1} a_0 \xi^j \mu_3^{i-1} + b_0^{-1} a_1 \xi^{j+1} \mu_3^{i-1} + b_0^{-1} a_2 \xi^{j+2} \mu_3^{i-1} + \\ & \cdots + b_0^{-1} a_{n_1} \xi^{j+n_1} \mu_3^{i-1} - b_0^{-1} b_1 \xi^{j+1} \mu_3^i - b_0^{-1} b_2 \xi^{j+2} \mu_3^i - \\ & \cdots - b_0^{-1} b_{n_2} \xi^{j+n_2} \mu_3^i. \end{aligned} \tag{12}$$

Из включения $(i,j) \in B_{t+1}$ следуют ограничения: $j \geqslant k\,(k + n_1 - 1)$, $j = ki - t - 1$. Поэтому $i \geqslant k + n_1 - 1 + (t+1)/k$, откуда $i - 1 \geqslant k + n_1 - 1$. Кроме этого, $j \geqslant k(i-1) - t$ и $j \geqslant \max\left(k \cdot (i-1) - t, k\,(k + n_1 - 1)\right)$.

Отсюда,

$$\{(i-1,j),(i-1,j+1),\ldots(i-1,j+n_1)\} \subseteq B'_t \tag{13}$$

Далее из $(i,j) \in B_{t+1}$ имеем: $i \geqslant k + n_1 > k + n_1 - 1$, $j + 1 > j \geqslant k\,(k + n_1 - 1)$, $j + 1 = ki - t$, откуда получаем

$$\{(i,j+1),(i,j+2),\ldots,(i,j+n_2)\} \subseteq B'_t. \tag{14}$$

Из последнего включения, включения (13) и соотношения (12) заключаем, что для любого (i,j), $(i,j) \in B'$, $B' = \bigcup_{t=0}^{\infty} B'_t$, выполнено: $\xi^j \mu_3^i \in K^1(M)$.

Нетрудно видеть, что

$$B' = \{(i,j) | i \in N, i \geqslant k + n_1 - 1, j \geqslant k(k + n_1 - 1)\}.$$

Таким образом, для любого (i,j), $(i,j) \in B'$, справедливо включение $\xi^j \mu_3^i \in K^1(M)$. Обозначим $k\,(k+n_1-1)$ через T_1, а $k+n_1-1$ через T_2. Доказано, что для любых i,j, $i \in N$, $j \in N$, $i \geqslant T_2$, $j \geqslant T_1$:

$$\xi^j \mu_3^i \in K^1(M).$$

Через $\tilde{\Omega}(T,\mu)$, где $T \in Z_+, \mu \in E'_p(\xi)$, обозначим множество

$$\left\{\xi^j \mu | j \in Z_+, j \geqslant T\right\}.$$

Доказано, что для некоторых T_1, T_2, μ_3, $T_1 \in Z_+$, $T_2 \in Z_+$, $\mu_3 \in E'_p(\xi) \setminus \xi E'_p(\xi)$, выполнено:

$$\tilde{\Omega}\left(T_1, \mu_3^{T_2}\right) \subseteq K^1(M). \tag{15}$$

Найдутся многочлены $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ из $E'_p(\xi) \setminus \xi E'_p(\xi)$, удовлетворяющие равенству $\mu_3^{T_2} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}$. Из (15) следует $\tilde{\Omega}\left(T_1, \mu_3^{T_2}\tilde{v}\right) \subseteq K^1(M)$. Поэтому

$$\tilde{\Omega}\,(T_1, \tilde{u}) \subseteq K^1(M). \tag{16}$$

Через I обозначим $\{\quad i \quad | \quad p_i(\xi) \quad \text{делит} \quad \tilde{u}\}$. По утверждению 2 леммы 7 для каждого i, $i \in I$, в $K^1(M)$ найдется л.-р-а. функция $\tilde{\mu}_i$, $\tilde{\mu}_i = \frac{\tilde{u}_i}{\tilde{v}_i}$, $\tilde{u}_i \in E_p[\xi]$, $\tilde{v}_i \in E_p[\xi]$, $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) = 1$, $p_i(\xi)|\tilde{v}_i$.

Пусть число k_i, $i \in I$, таково, что $p_i^{k_i}|\tilde{u}$, но $p_i^{k_i+1}$ не делит $\tilde{u}$. Из определения множества I следует, что $k_i \geqslant 1$.

Из (16) получаем

$$\tilde{\Omega}\left(T_1, \tilde{u}\cdot\left(\tilde{\mu}_i^{k_i}\right)\right) \subseteq K^1(M).$$

Поэтому для любого i, $i \in I$, найдется многочлен $\tilde{\tilde{u}}_i$ взаимно простой с p_i, для которого $\tilde{\Omega}\left(T_1, \tilde{\tilde{u}}_i\right) \subseteq K^1(M)$.

Так как 1 — наибольший общий делитель многочленов из множества $\left\{\tilde{u}, \tilde{\tilde{u}}_i | i \in I\right\}$, то найдутся многочлены $\bar{u}_0$, $\bar{u}_i$, $i \in I$, для которых выполнено:

$$\bar{u}_0 \tilde{u} + \sum_{i \in I} \bar{u}_i \tilde{\tilde{u}}_i = 1.$$

Поэтому

$$\bar{u}_0 \tilde{\Omega}\,(T_1, \tilde{u}) + \sum_{i \in I} \bar{u}_i \tilde{\Omega}\left(T_1, \tilde{\tilde{u}}_i\right) = \tilde{\Omega}\,(T_1, 1) \subseteq K^1(M).$$

Таким образом, для любого j, $j \geqslant T_1$, $\xi^j \in K^1(M)$. При доказательстве леммы 7 отмечалось, что для ненулевого многочлена $\tilde{u}'(\xi)$ и неприводимого многочлена $p(\xi)$, не делящего $\tilde{u}'(\xi)$, найдется натуральное число $T\left(\tilde{u}'\right)$, для которого $\left(\tilde{u}'\right)^{T(\tilde{u}')} - 1$ делится на $p(\xi)$. Незначительно изменив доказательство, можно обосновать, что для двух ненулевых взаимно простых многочленов $\tilde{u}'$ и $\tilde{u}''$ найдется натуральное число $T\left(\tilde{u}', \tilde{u}''\right)$, для которого $\tilde{u}'' | \left(\tilde{u}'\right)^{T(\tilde{u}', \tilde{u}'')} - 1$.

Отсюда, для любого μ, $\mu \in E'_p(\xi)$, найдутся T и u, $T \in N$, $u \in E_p[\xi]$, такие, что $\mu = \frac{u}{\xi^T - 1}$. При этом, не ограничивая общность рассуждений, будем предполагать, что $T \geqslant T_1$, так как для любого i, $i \in N$, выполнено: $\xi^T - 1 | \xi^{iT} - 1$.

Из равенства

$$\xi^{T_1}\mu = -\text{Об}\left(\xi^{T_1}u, \xi^T\right)$$

получаем:

$$\xi^{T_1}\mu \in K^1\left(\tilde{\Omega}\left(T_1, 1\right)\right) \subseteq K^1(M).$$

Следовательно,

$$\xi^{T_1} \cdot E'_p(\xi) \subseteq K^1(M). \tag{17}$$

Из соотношения $M \not\subseteq R_1^{(1)}$ вытекает, что найдется μ_1, $\mu_1 \in M$, $\mu_1 \in E'_p(\xi) \setminus \xi E'_p(\xi)$. Кроме того, в M найдется μ_2, $\mu_2 \not\subseteq M_1^{(1)}$. Для некоторых многочленов u_2, v_2 из $E_p[\xi]$, $(u_2, v_2) = 1$, выполнено: $\mu_2 = \frac{u_2}{v_2}$. Если $u_2 \in \xi E_p[\xi]$, то $u_2 \notin \xi^2 E_p[\xi]$. В противном случае найдется a, $a \in E_p \setminus \{0\}$, что $av_2 - u_2 \in \xi E_p[\xi] \setminus \xi^2 E_p[\xi]$. Тогда $a\mu_2 - \mu_2^2 \in \xi E'_p(\xi) \setminus \xi^2 E'_p(\xi)$. Таким образом, в $K^1(M)$ найдется л.-р-а. функция μ'_2, $\mu'_2 \in \xi E'_p(\xi) \setminus \xi^2 E'_p(\xi)$.

Индукцией по T нетрудно доказать, что для любого многочлена $u(\xi)$, $\deg u(\xi) < T$, найдется μ_u, $\mu_u \in E'_p(\xi)$, для которой $u(\xi) + \xi^T \mu_u \in K^1\left(\{\mu_1, \mu'_2\}\right)$. Отсюда и из включения (17) вытекает включение $E'_p(\xi) \subseteq K^1(M)$. Лемма 8 доказана.

Теорема 2. *Множество $J^{(1)}$ является приведенной критериальной системой в $E'_p(\xi)$, то есть множеством, состоящим из замкнутых классов, каждый из которых не содержится ни в каком другом и для любого M, $M \subseteq E'_p(\xi)$, равенство $K^1(M) = E'_p(\xi)$ выполнено в точности тогда, когда для любого θ, $\theta \in AJ^{(1)}$, имеет место: $M \not\subseteq \theta$.*

Теорема 2 вытекает из лемм 5, 6 и 8.

Отсюда и из рассуждений, приведенных в [1], получаем также

Следствие 3. *Каждый элемент множества $J^{(1)}$ является предполным классом в $E'_p(\xi)$.*

Имеет место также

Следствие 4. *Каждый предполный класс в $E'_p(\xi)$ является элементом множества $J^{(1)}$.*

Доказательство. Пусть θ — замкнутый класс в $E'_p(\xi)$, не совпадающий ни с одним предполным классом множества $J^{(1)}$. Тогда $\theta \nsubseteq M_1^{(1)}$. Поэтому найдется μ, $\mu \in \theta \setminus M_1^{(1)}$. Л.-а. функция μ, как нетрудно видеть, может содержаться лишь в конечном множестве S предполных классов из $J^{(1)}$. Для любого θ' — элемента множества S, в θ найдется л.-р-а. функция μ', не содержащаяся в θ'. По теореме 2 в θ содержится полное в $E'_p(\xi)$ подмножество $\{\mu\} \cup \{\mu' | \mu' \in \theta \setminus \theta', \theta' \in S\}$. Поэтому $\theta = E'_p(\xi)$ и θ не является предполным классом в $E'_p(\xi)$. Следствие доказано.

Теорема 3. *Задача проверки K^1-полноты конечных подмножеств из $E'_p(\xi)$ алгоритмически разрешима.*

Доказательство. Проверить включение $\mu \in R_i^{(1)}$, $i = 0, 1, \ldots,$ несложно. При $i = 0$ для этого достаточно сравнить степени числителя и знаменателя дроби μ. Далее, приведя μ к несократимой дроби $\frac{u}{v}$, найдем множество P неприводимых многочленов p, на которые делится u. Если $p_i \notin P$, то $\mu \notin R_i^{(1)}$. Если $p_i \in P$, то $\mu \in R_i^{(1)}$. Из конечности множества P для неравной 0 л.-р-а. функции μ следует существование алгоритма проверки всех включений $\mu \in R_i^{(1)}$, $\quad i = 0, 1, \ldots.$ Если же $\mu = 0$, то $\mu \in R_i^{(1)}$ для любого i, $i = 0, 1, \ldots.$

Проверить включение $\mu \in M_0^{(1)}$ можно следующим образом. Пусть $\mu = \frac{u}{v}$, $u \in E_p[\xi]$, $v \in E_p[\xi]$, $(u, v) = 1$. Тогда $v \in E'_p[\xi]$. Существует единственное a, $a \in E_p$, что $u - av \in \xi E_p[\xi]$. Если для этого a выполнено: $\deg(u - av) < \deg v$, то $\mu \in M_0^{(1)}$. В противном случае, $\mu \notin M_0^{(1)}$.

При $i \in N$ включение $\mu \in M_i^{(1)}$ проверяем следующим образом. Представим μ в виде несократимой дроби: $\mu = \frac{u}{v}$, $u \in E_p[\xi]$, $v \in E_p[\xi]$.

Тогда найдется единственное число a, $a \in E_p$, для которого $u - av$ делится на ξ. Если при этом $u - av$ делится на ξp_i, то $\mu \in M_i^{(1)}$. В противном случае, $\mu \notin M_i^{(1)}$.

Очевидно, что любая константа из E_p содержится в любом классе $M_i^{(1)}$, $i = 0, 1, \ldots$. Если же $\mu \in E'_p(\xi) \setminus E_p$, $\mu = \frac{u}{v}$, то потребуется конечное число проверок включений $\mu \in M_i^{(1)}$, так как многочлен $u - av$ может делиться лишь на многочлены, ξp_i, удовлетворяющие неравенству $\deg(\xi p_i) \leq \deg(u - av)$.

Теорема 3 доказана.

3. О полноте в классе L_p

Лемма 9. *Пусть для некоторого M, $M \subseteq L_p$, справедливы следующие 3 утверждения.*

1) *Для любого Θ, $\Theta \in AJ_p$, множество M не содержится в Θ.*
2) *В $K(M)$ содержится сумматор $x_1 + x_2 + \cdots + x_{p+1}$.*
3) *В $E'_p(\xi)$ найдутся такие μ' и μ'_0, что л.-р-а. функция $\xi x_1 + \mu' x_2 + \mu'_0$ содержится в $K(M)$.*

Тогда $K(M) = L_p$.

Доказательство. Пусть некоторое множества M л.-р-а. функций обладает всеми тремя свойствами, сформулированными в условии леммы 9.

Вместо переменной x_i сумматора $x_1 + x_2 + \cdots + x_{p+1}$ подставим функцию $\xi x_i + \mu' x_{p+1} + \mu'_0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, Тогда получим л.-р-а. функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1})$,

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}) = \xi x_1 + \xi x_2 + \cdots + \xi x_p + x_{p+1}.$$

Из того, что для любого Θ, $\Theta \in AJ_p$, множество M не содержится в Θ и леммы 3 параграфа 1 следует, что в $K(M)$ содержатся константы μ'_0 и μ'_1, генерирующие в первый момент соответственно 0 и 1, то есть

$${}^{1}\left[\mu'_i = i, \quad i = 0, 1.\right.$$

Тогда для некоторых многочленов u_i, v_i, $i = 1, 2$ из $E_p[\xi]$ таких, что $(u_i, v_i) = 1$, $i = 0, 1$, выполнены равенства:

$$\mu_i' = \frac{u_i}{v_i}.$$

Нетрудно видеть, что $u_0 \in \{\xi\}E_p[\xi]$ и $u_1 \notin \{\xi\}E_p[\xi]$.

Имеет место тождество

$$u_1 v_0 \mu_0' - u_0 v_1 \mu_1' = 0. \tag{18}$$

Для многочленов $u_1 v_0$ и $u_0 v_1$ и некоторых чисел a_i, b_i, $i = 0, 1, \ldots s$, из E_p справедливы равенства

$$u_1 v_0 = \sum_{i=0}^{s} a_i \xi^i,$$
$$u_0 v_1 = \sum_{i=0}^{s} b_i \xi^i,$$

причем $a_0 \neq 0$ и $b_0 = 0$. Умножением левой и правой частей тождества (18) на ненулевую константу можно добиться, чтобы для некоторых многочленов u' и u'' из $\{1\} + \{\xi\}E_p'(\xi)$ и $\{\xi\}E_p'(\xi)$ соответственно было выполнено тождество

$$u' \mu_0' - u'' \mu_1' = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{i=0}^{s} a_i' \xi^i \mu_0' + \sum_{i=0}^{s} b_i' \xi^i \mu_1' = 0,$$

где $a_0' = 1$ и $b_0' = 0$.

Выберем натуральное число t такое, что $t \cdot p + 1 \geqslant 2s + 2$. из сумматора с $p + 1$ входом с использованием операции подстановки получим сумматор с $t \cdot p + 1$ входами:

$$f_+^{(tp+1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{tp+1}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{tp+1}.$$

Через $g^{(i)}(x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,p}, x_{2s+3})$ обозначим л.-р-а. функцию

$$\underbrace{g\left(g\left(\ldots g\left(x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,p}, x_{2s+3}\right),\right.\right.}_{i \text{ раз } g}$$
$$\left.\left.\ldots x_{2s+3}, \ldots, x_{2s+3}, x_{2s+3}\right), x_{2s+3}, \ldots, x_{2s+3}, x_{2s+3}\right),$$

где $i \in \{1, 2, \ldots s\}$.

Нетрудно видеть, что для некоторого $\tilde{\mu}_i$ из $\{1\}+\{\xi\}E'_p(\xi)$ выполнено тождество

$$g^{(i)}(x_{i,1},x_{i,2},\dots,x_{i,p},x_{2s+3})=\xi^i x_{i,1}+\xi^i x_{i,2}+\dots+\xi^i x_{i,p}+\tilde{\mu}_i x_{2s+3}.$$

Поэтому для некоторых μ'_i и μ''_i из $\{1\}+\{\xi\}E'_p(\xi)$ имеют место равенства:

$$g^{(i)}(\underbrace{x_i,x_i,\dots,x_i}_{a'_i \text{ раз } x_i}x_{2s+3},\dots,x_{2s+3})=a'_i\xi^i x_i+\mu'_i x_{2s+3},$$
$$g^{(i)}(\underbrace{y_i,y_i,\dots,y_i}_{b'_i \text{ раз } y_i}x_{2s+3},\dots,x_{2s+3})=b'_i\xi^i y_i+\mu''_i x_{2s+3}.$$

Вместо переменной x_1 сумматора $f_+^{(tp+1)}(x_1,x_2,\dots,x_{tp+1})$ подставим константу μ'_0. Для каждого i, $i=1,2,\dots,s$ вместо переменной x_{2i+1} этого же сумматора подставим $a'_i\xi^i\mu'_0+\mu'_i x$, а вместо переменной x_{2i+2} подставим функцию $b'_i\xi^i\mu'_1+\mu''_i x$. Кроме того, вместо переменных x_2, x_{2s+3}, x_{2s+4}, …, x_{tp+1} этой же функции подставим переменную x. В результате получим л.-р-а. функцию $h(x)$. Применяя операцию обратной связи к переменной x функции $h(x)$ получим нулевую константу 0.

Далее, подстановкой нулевой константы вместо переменных x_3, x_4, …, x_{p+1} сумматора $x_1+x_2+\dots+x_{p+1}$ получаем сумматор $f_+^{(2)}(x_1,x_2)=x_1+x_2$. Кроме того, $g(x,0,0,\dots,0)=\xi x$.

Нетрудно видеть, что, используя л.-р-а. функции x_1+x_2, ξx и операции подстановки, для любого μ, $\mu\in E'_p(\xi)$, можно получить л.-р-а. функцию μx. В частности, $\frac{v_1}{u_1}x\in K(M)$. Поэтому $\frac{v_1}{u_1}\mu'_1=1\in K(M)$.

Следовательно, для любой константы μ_0 имеем $\mu_0=\mu_0\cdot 1\in K(M)$.

Рассмотрим какую-либо л.-р-а. функцию, удовлетворяющую равенству

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\xi)x_i+\mu_0(\xi). \tag{19}$$

Из доказанного ранее следует, что $\{\mu_0,\mu_i x_i|\quad i=1,2,\dots,n\}\subset K(M)$. Сумматор $x_1+x_2+\dots+x_{n+1}$ от $n+1$ переменной нетрудно получить из x_1+x_2, используя операции суперпозиции. Подставляя вместо переменной x_i этого сумматора функцию $\mu_i x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а вместо переменной x_{n+1} этого же сумматора константу μ_0, поучим функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Лемма доказана.

Введем некоторые обозначения. По определению л.-р-а. функции для любой $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f \in L_p$, найдутся $\mu_i(\xi)$, $\mu_i(\xi) \in E'_p(\xi)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, такие что имеет место (19).

При этом, согласно с [5], через $U(f)$ будем обозначать множество $\{\mu_i(\xi) | i = 1, 2, \ldots, n\}$. Для множества M, $M \subseteq L_p$, положим

$$U(M) = \bigcup_{f \in M} U(f).$$

Пусть далее

$$\tilde{R}_0^{(1)} = \left\{\mu | \mu \in E'(\xi), \mu = \frac{u}{v}, \deg u \leqslant \deg v\right\},$$
$$\tilde{R}_i^{(1)} = \left\{\mu | \mu \in E'(\xi), \mu = \frac{u}{v}, (v, p_i) = 1\right\}, \quad i = 2, 3, \ldots.$$

Рассмотрим л.-р-а. функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую равенству (19). Переменную x_i этой функции будем называть существенной, если $\mu_i \neq 0$. Переменную x_j этой функции будем называть непосредственной, если $\mu_j \notin \{\xi\} E'_p(\xi)$.

Введем следующие множества л.-р-а. функций.

$$M_i = \left\{f | \quad f \in L_p, \quad U(f) \subset M_i^{(1)}\right\}, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

$$\begin{aligned} R_i^{\text{С}} = \{f | \quad & f \in L_p, \quad \text{для любого} \quad \mu, \mu \in U(f), \quad \text{выполнено} \\ & \mu \in \tilde{R}_i^{(1)}, \quad \text{если} \quad \mu \quad \text{соответствует единственной} \\ & \text{существенной переменной} \quad f, \quad \text{и} \quad \mu \in R_i^{(1)}, \\ & \text{в противном случае}\}, \quad i = 0, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_i^{\text{Н}} = \{f | \quad & f \in L_p, \quad \text{для любого} \quad \mu, \mu \in U(f), \quad \text{выполнено} \\ & \mu \in \tilde{R}_i^{(1)}, \quad \text{если} \quad \mu \quad \text{соответствует единственной} \\ & \text{непосредственной переменной} \quad f, \quad \text{и} \quad \mu \in R_i^{(1)}, \\ & \text{в противном случае}\}, \quad i = 0, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Через J_p обозначим множество

$$\{T_0, T_1, \dots, T_{p-1}, V_1, V_p, M_i, \quad i = 0, 1, \dots, \\ R_j^{\text{с}}, R_j^{\text{н}}, \quad j = 0, 2, 3, \dots\}.$$

Имеет место

Теорема 4. *Множество J_p состоит из попарно различных замкнутых в L_p классов.*

Доказательство. Замкнутость каждого из элементов множества J_p можно установить с использованием индукции по построению.

Каждому замкнутому классу Θ из J_p сопоставим множество л.-р-а. функций $\hat{\Theta}$ следующим образом. Для каждого a, $a \in E_p$, положим

$$\hat{T_a} = \{a, x_1 + x_2 - a, \xi x + a\}.$$

Пусть далее

$$\hat{V_1} = \{x + 1, \xi x_1 + \xi x_2, \},$$
$$\hat{V_p} = \{x + 1, x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1}, x_1 + \xi x_2\},$$
$$\hat{M_0} = \left\{x + 1, x_1 + x_2, \frac{\xi}{1 - \xi^2} x\right\},$$
$$\hat{M_1} = \left\{x + 1, x_1 + x_2, \xi^2 x\right\},$$
$$\hat{R_0^{\text{с}}} = \left\{x + 1, \frac{1}{1 - \xi} x_1 + \frac{1}{1 - \xi} x_2, \frac{\xi}{1 - \xi} x\right\},$$
$$\hat{R_0^{\text{н}}} = \left\{x + 1, \frac{1}{1 - \xi} x_1 + \frac{1}{1 - \xi} x_2, x_1 + \frac{\xi}{1 - \xi^2} x_2\right\}.$$

Кроме этого, для любого i, $i = 2, 3, \dots$, положим

$$\hat{M_i} = \{x + 1, x_1 + x_2, \xi p_i x_1 + \xi p_i x_2, \},$$
$$\hat{R_i^{\text{с}}} = \{x + 1, p_i x_1 + p_i x_2, \xi x, \},$$
$$\hat{R_i^{\text{н}}} = \{x + 1, p_i x_1 + p_i x_2, \xi p_i x_1 + x_2\}.$$

Нетрудно видеть, что для любого Θ, $\Theta \in J_p$, справедливо включение:

$$\hat{\Theta} \subset \Theta.$$

Имеют место следующие соотношения.

$$
\begin{gathered}
a \notin T_b, \quad b \in E_p \setminus \{a\}, \\
x + 1 \notin T_a, \quad a = 0, 1, \dots, p-1, \\
x_1 + x_2 - a \notin V_1 \cup V_p, \quad a = 0, 1, \dots, p-1, \\
\xi x_1 + \xi x_2 \notin V_p, \\
x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1} \notin V_1, \\
x_1 + x_2 \notin V_1 \cup V_p, \\
\frac{1}{1-\xi} x_1 + \frac{1}{1-\xi} x_2 \notin V_1 \cup V_p, \\
p_i x_1 + p_i x_2 \notin V_1 \cup V_p, \\
\xi x + a \notin M_i, \quad a = 0, 1, \dots, p-1, \quad i = 0, 1, \dots, \\
\xi x_1 + \xi x_2 \notin M_i, \quad i = 0, 1, \dots, \\
x_1 + \xi x_2 \notin M_i, \quad i = 0, 1, \dots, \\
\frac{\xi}{1-\xi^2} x \notin M_i, \quad i = 1, 2, \dots, \\
\xi^2 x \notin M_i, \quad i = 0, 2, 3, \dots, \\
\frac{1}{1-\xi} x_1 + \frac{1}{1-\xi} x_2 \notin M_i, \quad i = 0, 1, \dots, \\
\xi p_i x_1 + \xi p_i x_2 \notin M_j, j = 0, 1, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, \quad i = 2, 3, \dots, \\
\xi x \notin M_i, \quad i = 0, 1, \dots, \\
\xi p_i x_1 + x_2 \notin M_j, \quad j = 0, 1, \dots, i-1, i+1, i+2 \dots, \quad i = 2, 3, \dots, \\
p_i x_1 + p_i x_2 \notin M_i, \\
x_1 + x_2 - a \notin R_i^{\text{С}} \cup R_i^{\text{Н}}, \quad i = 0, 2, 3, \dots, \quad a = 0, 1, \dots, p-1, \\
\xi x_1 + \xi x_2 \notin R_i^{\text{С}} \cup R_i^{\text{Н}}, \quad i = 0, 2, 3, \dots, \\
x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1} \notin R_i^{\text{С}} \cup R_i^{\text{Н}}, \quad i = 0, 2, 3, \dots, \\
x_1 + x_2 \notin R_i^{\text{С}} \cup R_i^{\text{Н}}, \quad i = 0, 2, 3, \dots, \\
\frac{1}{1-\xi} x_1 + \frac{1}{1-\xi} x_2 \notin R_i^{\text{С}} \cup R_i^{\text{Н}}, \quad i = 2, 3, \dots, \\
\frac{\xi}{1-\xi} x \notin R_0^{\text{Н}}, \\
x_1 + \frac{\xi}{1-\xi^2} x_2 \notin R_0^{\text{С}},
\end{gathered}
$$

$$p_ix_1 + p_ix_2 \notin R_j^{\text{с}} \cup R_j^{\text{н}},$$
$$i = 2, 3, \dots, \quad j = 0, 2, 3, \dots i-1, i+1, i+2, \dots,$$

$$\xi x \notin R_i^{\text{н}}, \quad i = 0, 2, 3, \dots,$$
$$\xi p_ix_1 + x_2 \notin R_i^{\text{с}}, \quad i = 0, 2, 3, \dots.$$

Из приведенных соотношений следует, что для любого Θ', $\Theta' \in J_p \setminus \{\Theta\}$, справедливо
$$\hat{\Theta} \not\subseteq \Theta'.$$

Таким образом, замкнутые классы из множества J_p попарно различны. Теорема доказана.

Пусть
$$\hat{R}_0^{(1)} = \left\{\mu | \mu \in E'(\xi), \mu = \frac{u}{v}, \deg u > \deg v\right\},$$
$$\hat{R}_i^{(1)} = \left\{\mu | \mu \in E'(\xi), \mu = \frac{u}{p_iv}, (u, p_i) = 1\right\}, \quad i = 2, 3, \dots.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 10. *1) Пусть $M \subseteq L_p$ и для некоторого i, $i \in \{0, 2, 3, \dots\}$, выполнены соотношения:*

$$M \not\subseteq M_i, \tag{20}$$
$$M \not\subseteq R_i^{н}, \tag{21}$$
$$M \not\subseteq R_i^{c}. \tag{22}$$

Тогда в $E_p'(\xi)$ найдутся функции μ, μ_1, μ_0 такие, что $\mu \in \hat{R}_i^{(1)}$, и
$$\mu x + \mu_1x_1 + \mu_0 \in K(M).$$

2) Пусть $M \subseteq L_p$, а также выполнены соотношения:

$$M \not\subseteq M_1, \tag{23}$$
$$M \not\subseteq V_1. \tag{24}$$

Тогда в $E_p'(\xi)$ найдутся функции μ, μ_1, μ_0 такие, что $\mu = \xi\frac{u}{v}$, ξ не делит u и
$$\mu x + \mu_1x_1 + \mu_0 \in K(M).$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение 1 леммы.

Если в M содержится функция $f(x_1,\dots,x_n)$, удовлетворяющая равенству (19), такая, что

$$U(f)\cap \hat{R}_i^{(1)}\neq\varnothing, \tag{25}$$

то без ограничения общности рассуждений можно считать, что $\mu_1\in \hat{R}_i^{(1)}$. Тогда для функции $f(x,x_1,x_1,\dots,x_1)$ имеет место равенство

$$f(x,x_1,x_1,\dots,x_1)=\mu x+\left(\sum_{i=2}^{n}\mu_i\right)x_1+\mu_0.$$

Поэтому в случае (25) утверждение 1 леммы имеет место.

Пусть соотношение (25) не выполнено, но в M содержится л.-р-а. функция $f(x_1,\dots,x_n)$, удовлетворяющая равенству (19), $\mu_k=\frac{u_k}{v_k}$, $k=0,1,\dots n$, с не менее чем двумя существенными переменными, одна из которых x_j такова, что

$$\mu_j\in\big(\{\xi\}E_p'(\xi)\big)\cap\tilde{R}_i^{(1)},$$

а другая существенная переменная — x_t, $t\neq j$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $j=1$ и $t=2$. Используя доказательство леммы 7 параграфа 2, заключаем, что при $i\in\{2,3,\dots\}$ найдется натуральное число T такое, что неравный нулю многочлен $v_1^T-u_1^T$ делится на $p_i(\xi)$.

При $i=0$ согласно малой теореме Ферма старшие коэффициенты многочленов v_1^{p-1} и u_1^{p-1} равны 1. Тогда, положив в этом случае $T=p-1$, имеем $\deg(v_1^T-u_1^T)<\deg(v_1^T)$.

Положим $g(x,x_1,x_2)=f(x,x_1,x_2,x_2,\dots x_2)$.

Пусть k — целое неотрицательное число. Применив к переменной x функции

$$\underbrace{g(g(\dots g(}_{Tp^k\ \text{раз}\ g}x,x_2,x_2)\dots,x_2,x_2),x_1,x_2),$$

операцию обратной связи, получим л.-р-а. функцию $h(x_1,x_2)$,

$$h(x_1,x_2)=\mu_1'x_1+\mu_2'x_2+\mu_0',$$

причем

$$\mu_1' = \mu_2 \frac{(v_1^T)^{p^k}}{\left(v_1^T - u_1^T\right)^{p^k}}.$$

Из изложенного выше следует, что каково бы ни было i для некоторого целого неотрицательного k:

$$\mu_1' \in \hat{R}_i^{(1)}.$$

Следовательно утверждение 1 леммы 10 в рассматриваемом случае справедливо.

Пусть не имеет места ни один из двух рассмотренных выше случаев. Ввиду (20)–(22) в M найдутся л.-р-а. функции $f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}\right)$, $f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_2}\right)$, $f_3\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_3}\right)$, не содержащиеся соответственно в M_i, $R_i^{\text{Н}}$, $R_i^{\text{С}}$. Предположим также, что выполнены соотношения:

$$f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_2}\right) \in R_i^{\text{С}}, \tag{26}$$

$$f_3\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_3}\right) \in R_i^{\text{Н}}. \tag{27}$$

Из сделанных предположений вытекает, что л.-р-а. функция f_2 имеет единственную существенную переменную. Без ограничения общности поэтому будем предполагать, что $n_2 = 1$ и $f_2(x) = \mu x + \mu_0$. При этом $\mu = \frac{u}{v}$, $\mu \in \{\xi\}E_p'(\xi)$ и μ не содержится в $R_i^{(1)}$.

Кроме того, л.-р-а. функция f_3 имеет единственную непосредственную переменную и не менее двух существенных переменных. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что переменная x_1 является непосредственной переменной функции f_3, а переменная x_2 — ее существенной переменной. Если при этом

$$f_3\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_3}\right) = \sum_{j=1}^{n_3} \mu_j x_j + \mu_0,$$

то $\mu_1 \notin R_i^{(1)}$, но для любого j, $j = 2, 3, \ldots, n_3$ выполнено: $\mu_j \in R_i^{(1)} \setminus \{0\}$.

Рассмотрим л.-р-а. функцию $g\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_3}\right)$,

$$g\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_3}\right) = f_3\left(f_2\left(x_1\right), x_2, \ldots, x_{n_3}\right),$$

$$g\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_3}\right) = \sum_{j=1}^{n_3} \mu_j' x_j + \mu_0'.$$

Переменные x_1 и x_2 функции g являются существенными и при этом справедливо соотношение:

$$\mu_1' \in \big(\{\xi\}E_p'(\xi)\big) \cap \tilde{R}_i^{(1)}.$$

Как было показано выше, отсюда вытекает справедливость утверждения 1 доказываемой леммы.

Предположим теперь, что не имеет места ни один из рассмотренных при доказательстве этой леммы случаев. Тогда в M содержится л.-р-а. функция $h\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$h\,(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j + \mu_0,$$

имеющая не менее двух непосредственных переменных и при этом найдется такое j_0, $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, что $\mu_{j_0} \notin R_i^{(1)}$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что переменные x_1 и x_2 являются непосредственными. Если при этом выполнены соотношения $\mu_j \in R_i^{(1)}$ для $j = 1$ и $j = 2$, то для л.-р-а. функции $h'\,(x_1, x_2, x_3)$,

$$h'\,(x_1, x_2, x_3) = h\left(x_1, x_2, \underbrace{x_3, x_3, \dots, x_3}_{j_0-3 \quad \text{раза} \quad x_3}, x_2, x_3, x_3, \dots, x_3\right)$$

найдутся такие μ_j', $j = 0, 1, 2, 3$, что

$$h'\,(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^{3} \mu_j' x_j + \mu_0',$$

кроме того, x_1 — непосредственная переменная л.-р-а. функции h' и $\mu_2' \notin R_i^{(1)}$. При этом случай $\mu_2' \in \{\xi\}E_p'(\xi)$ был рассмотрен выше. Поэтому будем предполагать в дальнейшем, что x_2 — также непосредственная переменная л.-р-а. функции h'.

Определим последовательность л.-р-а. функций $h_k\big(x_1, \dots, x_{2^k+2}\big)$, $k = 1, 2, \dots$ положив для $k = 1$:

$$h_1\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = h'\left(h'\,(x_4, x_1, x_4)\,, h'\,(x_2, x_3, x_4)\,, x_4\right),$$

а также для любого k, $k = 2, 3, \dots$, положив:

$$\begin{aligned} h_k\left(x_1, \dots, x_{2^k+2}\right) &= h_{k-1}\left(h_1\left(x_1, x_2, x_{2^k+2}, x_{2^k+2}\right), \dots, \right. \\ &\left. h_1\left(x_{2^k-1}, x_{2^k}, x_{2^k+2}, x_{2^k+2}\right), x_{2^k+1}, x_{2^k+2}\right). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для л.-р-а. функции h_{p-1} найдутся такие μ_j^*, $j = 0, 1, 2, 3$, что

$$h_{p-1}\left(x_1, \dots, x_{2^{p-1}+2}\right) = \sum_{j=1}^{2^{p-1}} \mu_1^* x_j + \mu_2^* x_{2^{p-1}+1} + \mu_3^* x_{2^{p-1}+2} + \mu_0^*,$$

причем

$$\mu_j^* \notin \{\xi\} E_p'(\xi), \quad j = 1, 2, \tag{28}$$

$$\mu_2^* \notin R_i^{(1)}.$$

Из малой теоремы Ферма следует что $\mu_1^* \in \{1\} + \{\xi\} E_p'(\xi)$.

Без ограничения общности рассуждений будем предполагать для л.-р-а. функции

$$f_1\left(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\right),$$

удовлетворяющей соотношению $f_1 \notin M_i$, что для некоторых $\tilde{\mu}_j$, $j = 0, 1, \dots, n_1$ выполнены:

$$f_1\left(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\right) = \sum_{j=1}^{n_1} \tilde{\mu}_j x_j + \tilde{\mu}_0,$$

$\tilde{\mu}_1 \notin M_i^{(1)}$. Положим

$$\tilde{f}\left(x_1, x_2\right) = f_1\left(x_1, x_2, x_2, \dots, x_2\right).$$

В $E_p'(\xi)$ найдутся л.-р-а. функции μ', μ_0' такие, что

$$\tilde{f}\left(x_1, x_2\right) = \tilde{\mu}_1 x_1 + \mu' x_2 + \mu_0'.$$

Для завершения доказательства части 1 леммы 10 следует рассмотреть следующие 2 случая.

Случай 1. $\mu_1^* \in R_i^{(1)}$

Случай 2. $\mu_1^* \notin R_i^{(1)}$

В случае 1 для некоторого числа a, $a \in E_p$, и л.-р-а. функции $\bar{\mu}'_2$ имеем: $\mu^*_2 = a + \xi\bar{\mu}'_2$. Заметим, что ввиду (28) выполнено: $a \neq 0$. Положим

$$a' = p - a.$$

Нетрудно видеть, что для л.-р-а. функции f'',

$$f'' = h_{p-1}\left(\underbrace{x, x, \ldots x}_{a' \quad \text{раз} \quad x} x_1, x_2, \ldots, x_2, x, x_2\right),$$

найдутся μ''_j, $j = 0, 1, 2, 3$, такие, что

$$f''(x, x_1, x_2) = \mu''_1 x + \mu''_2 x_1 + \mu''_3 x_2 + \mu''_0,$$

$\mu''_1 \in \{\xi\}E'_p(\xi) \setminus R^{(1)}_i$, $\mu''_2 \neq 0$. Справедливость части 1 леммы 10 тогда следует из предыдущих рассуждений.

Пусть имеет место случай 2. Для некоторого числа a, $a \in E_p$, и л.-р-а. функции $\bar{\mu}'$ имеем: $\tilde{\mu}_1 = a + \xi\bar{\mu}'$.

Положим

$$a' = \begin{cases} p - a, & \text{если} \quad a \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad a = 0. \end{cases}$$

Тогда для л.-р-а. функции $\bar{f}(x_1, x_2, x_3)$,

$$\bar{f}(x_1, x_2, x_3) = h_{p-1}\left(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{a' \quad \text{раз} \quad x_1}, \tilde{f}(x_1, x_3), x_2, x_3, x_3, \ldots, x_3\right)$$

в $E'_p(\xi)$ найдутся такие $\bar{\mu}_j$, $j = 0, 1, 2, 3$, что $\bar{\mu}_1 \in \{\xi\}E'_p(\xi) \setminus M^{(1)}_i$, $\bar{\mu}_2 \neq 0$, что выполнено:

$$\bar{f}(x_1, x_2, x_3) = \bar{\mu}_1 x_1 + \bar{\mu}_2 x_2 + \bar{\mu}_3 x_3 + \bar{\mu}_0.$$

Как следует из приведенных ранее рассуждений, утверждение 1 леммы 10 справедливо и в случае 2.

Часть 1 леммы 10 доказана.

Докажем теперь часть 2 леммы.

Рассмотрим множество M л.-р-а. функций, удовлетворяющее соотношениям (23) и (24).

Тогда в множестве M найдется л.-р-а. функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которой выполнено: $U(f) \not\subseteq M_1^{(1)}$.

В соответствии с (19) разложим f в сумму одноместных л.-р-а. функций. Без ограничения общности, будем считать, что

$$\mu_1 \notin M_1^{(1)}. \tag{29}$$

Тогда для л.-р-а. функции $g(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, x_2, \ldots, x_2)$ в $E_p'(\xi)$ найдутся элементы μ' и μ_0' такие, что

$$g(x_1, x_2) = \mu_1 x_1 + \mu' x_2 + \mu_0'.$$

Для некоторых взаимно простых многочленов u_1 и v_1 из $E_p[\xi]$ выполнено равенство $\mu_1 = \frac{u}{v}$. При этом из (29) и определения множества $M_1^{(1)}$ следует, что найдется число a, $a \in E_p$ такое, что $u{+}av \in \{\xi\}E_p[\xi] \backslash \{\xi^2\}E_p[\xi]$. Поэтому для л.-р-а. функции μ, $\mu = a{+}\mu_1$, имеет место следующее соотношение

$$\mu \in \{\xi\}E_p'(\xi) \setminus \{\xi^2\}E_p'(\xi). \tag{30}$$

Далее, в M найдется л.-р-а. функция $h(x_1, \ldots, x_m)$, не содержащаяся в V_1. Поэтому h имеет не менее двух непосредственных переменных. Не ограничивая общности рассуждений, будем предполагать, что переменные x_1 и x_2 являются непосредственными переменными л.-р-а. функции h. Для некоторых одноместных л.-р-а. функций μ_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ имеет место следующее разложение функции h:

$$h(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i + \mu_0.$$

Положим

$$h^*(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2, x_3, x_3, \ldots, x_3).$$

Тогда для некоторых μ^* и μ_0^* из $E_p'(\xi)$ имеем:

$$h^*(x_1, x_2, x_3) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu^* x_3 + \mu_0^*.$$

Далее положим

$$h'(x_1, x_2, x_3) = h^*(h^*(x_3, x_1, x_3), h^*(x_2, x_3, x_3), x_3).$$

Тогда для некоторых μ'', μ_0'' из $E_p'(\xi)$ выполнено следующее равенство.

$$h'(x_1, x_2, x_3) = \tilde{\mu}x_1 + \tilde{\mu}x_2 + \mu'' x_3 + \mu_0'',$$

где $\tilde{\mu} = \mu_1\mu_2$ и, следовательно, $\tilde{\mu} \notin \{\xi\}E_p'(\xi)$. Поэтому переменные x_1 и x_2 л.-р-а. функции $h'(x_1, x_2, x_3)$ являются непосредственными.

Определим последовательность л.-р-а. функций $h_k\big(x_1, \ldots, x_{2^k+1}\big)$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$, положив для $k = 1$:

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = h'(x_1, x_2, x_3),$$

а для любого k, $k = 2, 3, \ldots p-1$, положив:

$$\begin{aligned} h_k\big(x_1, \ldots, x_{2^k+1}\big) &= h_{k-1}\big(h_1\big(x_1, x_2, x_{2^k+1}\big), \ldots, \\ &\ h_1\big(x_{2^k-1}, x_{2^k}, x_{2^k+1}\big), x_{2^k+1}\big). \end{aligned}$$

Тогда для некоторых $\tilde{\mu}'$ и $\tilde{\mu}_0'$ из $E_p'(\xi)$ и $\bar{\mu}$, $\bar{\mu} = \tilde{\mu}^{p-1}$, справедливо равенство:

$$h_{p-1}(x_1, \ldots, x_{2^{p-1}+1}) = \bar{\mu}x_1 + \bar{\mu}x_2 + \cdots + \bar{\mu}x_{2^{p-1}} + \tilde{\mu}'x_{2^{p-1}+1} + \tilde{\mu}_0',$$

при этом по малой теореме Ферма имеет место: $\bar{\mu} \in \{1\} + \{\xi\}E_p'(\xi)$.

Рассмотрим л.-р-а. функцию $\bar{h}(x, x_1)$,

$$\bar{h}(x, x_1) = h_{p-1}\Bigg(\underbrace{x, \ldots, x,}_{a \quad \text{раз} \quad x} g(x, x_1), x_1, \ldots x_1\Bigg).$$

Для некоторых $\bar{\mu}'$ и $\bar{\mu}_0'$ имеет место следующее равенство.

$$\bar{h}(x_1, x_2, x_3) = (a + \mu_1)\bar{\mu}x + \bar{\mu}'x_1 + \bar{\mu}_0'.$$

Нетрудно видеть, что

$$(a + \mu_1)\bar{\mu} = \mu\bar{\mu} \in \{\xi\}E_p'(\xi) \setminus \{\xi\}^2 E_p'(\xi).$$

Таким образом, часть 2 леммы 10, а вместе с этим и лемма 10, доказана.

Индукцией по построению несложно доказывается следующая

Лемма 11. *Пусть* $M \subseteq E'_p(\xi)$, $M \neq \varnothing$. *Тогда для любого* μ, $\mu \in K^{(1)}(M)$, *найдутся такие* η_1 *и* η_2, *получаемые из элементов множества* M *с использованием лишь операции сложения и умножения, что* $\mu = Об(\eta_1, \eta_2)$.

Положим
$$J'_p = J_p \setminus \{T_0, T_1, \dots T_{p-1}, V_p\}.$$

Лемма 12. *Пусть* $M \subseteq L_p$, *для любого* Θ, $\Theta \in J'_p$, *справедливо:* $M \nsubseteq \Theta$. *Тогда*
$$x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1} \in K(M). \tag{31}$$

Доказательство. Пусть множество л.-р-а. функций M не содержится ни в одном из замкнутых классов множества J'_p. Согласно рассуждениям, приведенным при доказательстве леммы 10, для некоторой μ, $\mu \notin \{\xi\}E'_p(\xi)$, некоторых μ', μ'_0 из $E'_p(\xi)$ и любого натурального k в $K(M)$ содержится л.-р-а. функция $h_k\left(x_1, x_2, \dots, x_{2^k}, x_{2^k+1}\right)$
$$h_k\left(x_1, x_2, \dots, x_{2^k}, x_{2^k+1}\right) = \sum_{i=1}^{2^k} \mu^k x_i + \mu' x_{2^k+1} + \mu'_0.$$

Следует рассмотреть два следующих случая.

Случай 1. $\mu \in E_p$.

Случай 2. $\mu \notin E_p$.

В случае 1 имеем $\mu^{p-1} = 1$ и
$$h_{p-1}\left(x_1, x_2, \dots, x_{2^{p-1}}, x_{2^{p-1}+1}\right) = x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{p-1}} + \mu' x_{2^{p-1}+1} + \mu'_0.$$

Поэтому для л.-р-а. функции $h\left(x_1, x_2, x_3\right)$,
$$h\left(x_1, x_2, x_3\right) = h_{p-1}\left(x_1, x_2, x_3, x_3, \dots, x_3\right)$$
найдутся некоторые одноместные л.-р-а. функции $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\mu}_0$ такие, что имеют место следующее равенство.
$$h\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1 + x_2 + \tilde{\mu} x_3 + \tilde{\mu}_0.$$

Таким образом, л.-р-а. функция
$$\underbrace{h(h(\dots h(h(}_{p \text{ раз } h} x_1, x_2, x), x_3, x), \dots x_p, x), x_{p+1}, x)$$

совпадает с сумматором $x_1+x_2+\dots+x_{p+1}$. Таким образом, в случае 1 лемма доказана.

Пусть имеет место случай 2.

Каждому классу Θ из $J_p^{(1)}$ сопоставим целое неотрицательное число $\kappa(\Theta)$, положив $\kappa(M_i^{(1)}) = i$, $i = 0,1,\dots$, а также $\kappa(R_i^{(1)}) = i$, $i = 0,2,3,\dots$.

Через $J^{(1)}(\mu)$ обозначим множество, состоящее из всех элементов множества $J^{(1)}$, которые содержат μ. Из соотношения $\mu \notin E_p$ следует неравенство $\left|J^{(1)}(\mu)\right| < \infty$.

Положим

$$\kappa(\mu) = \left\{ \quad \kappa(\Theta) \quad | \quad \Theta \in J^{(1)}(\mu) \quad \right\}.$$

Из леммы 10 вытекает, что для любого i, $i \in \kappa(\mu)$, в $K(M)$ найдется л.-р-а. функция $f_i(x_1,x_2)$, $f_i = \mu_i x_1 + \mu_i' x_2 + \mu_i^*$, такая, что $\mu_i \in \hat{R}_i^{(1)}$ при $i \neq 1$ и $\mu_i = \xi \frac{u_1}{v_1}$, где $(u_1,\xi) = 1$, при $i = 1$. Нетрудно видеть, что для любого i, $i \in \kappa(\mu) \setminus \{1\}$, найдется натуральное число n_i такое, что $\mu\,(\mu_i)^{n_i} \in \hat{R}_i^{(1)}$. В случае $1 \in \kappa(\mu)$ также справедливо: $\mu\mu_1 \notin M_1^{(1)}$, то есть $n_1 = 1$.

Множество M',

$$M' = \{\mu, \mu\,(\mu_i)^{n_i}\,|i \in \kappa(\mu)\},$$

не содержится ни в одном классе множества $J^{(1)}$ и поэтому

$$K^{(1)}\left(M'\right) = E_p'(\xi).$$

В частности, из предыдущей леммы, для некоторых η_i, $i = 1,2$, получаемых из элементов множества M' с использованием лишь операций сложения и умножения, имеет место равенство

$$\frac{\eta_1}{1-\eta_2} = 1.$$

Из этого равенства получаем:

$$\eta_1 + \eta_2 = 1.$$

Отсюда, для некоторых л.-р-а. функций Π_j, $j = 1,2,\dots,k$, каждая из которых может быть получена из элементов множества M' с использованием лишь операции умножения или равна 1, имеем:

$$\sum_{j=1}^{k} \mu\Pi_j = 1.$$

Отсюда, для любого целого неотрицательного числа t имеем:

$$\sum_{j=1}^{k} \mu^{p^t} \Pi_j^{p^t} = 1.$$

Заметим теперь, что для любой л.-р-а. функции Π, получаемой из элементов множества M' с использованием лишь операции умножения, в $E'_p(\xi)$ найдутся такие элементы μ'_Π и μ^*_Π, что функция $g_\Pi(x_1, x_2)$, $g_\Pi(x_1, x_2) = \Pi x_1 + \mu'_\Pi x_2 + \mu^*_\Pi$, содержится в $K\,(M')$.

Положим

$$g'_\Pi(x_1, x_2) = \begin{cases} g_\Pi(x_1, x_2), & \text{если} \quad \Pi \neq 1, \\ 1, & \text{если} \quad \Pi = 1. \end{cases}$$

Далее, выберем натуральное число s такое, что $2^{p^s} \geqslant 2k$. Рассмотрим л.-р-а. функцию $h\,(x_1, x_2, x)$,

$$h\,(x_1, x_2, x) = h_{p^s}\Big(g'_{\Pi_1^{p^s}}(x_1, x), g'_{\Pi_2^{p^s}}(x_1, x), \ldots, g'_{\Pi_k^{p^s}}(x_1, x),$$

$$g'_{\Pi_1^{p^s}}(x_2, x), g'_{\Pi_2^{p^s}}(x_2, x), \ldots, g'_{\Pi_k^{p^s}}(x_2, x), x, x, \ldots, x\Big).$$

Для некоторых μ'' и μ^{**} из $E'_p(\xi)$ имеем:

$$h\,(x_1, x_2, x) = x_1 + x_2 + \mu'' x + \mu^{**}.$$

Используя рассуждения, которыми завершалось рассмотрение случая 1 настоящей леммы, заключаем, что (31) имеет место. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Пусть $M \subseteq L_p$, и для любого $\Theta \in J'_p$ справедливо:*

$$M \not\subseteq \Theta. \tag{32}$$

Тогда для любого $\mu \in E'(\xi)$ в $E'(\xi)$ найдутся μ' и μ_0 такие, что имеет место:

$$\mu x_1 + \mu' x_2 + \mu_0 \in K(M).$$

Доказательство. Пусть для любого Θ, $\Theta \in J'_p$, справедливо соотношение (32). Покажем сначала, что тогда имеет место:

$$K^{(1)}(U(M)) \subseteq U(K(M)). \tag{33}$$

Пусть $\mu \in U(K(M))$, $\mu' \in U(K(M))$. Тогда для некоторых μ_i, μ_i', $i = 0, 1$, из $E_p'(\xi)$ в $K(M)$ найдутся л.-р-а. функции $f(x_1, x_2)$ и $f'(x_1, x_2)$, что

$$f(x, x_1) = \mu x + \mu_1 x_1 + \mu_0,$$
$$f'(x, x_1) = \mu' x + \mu_1' x_1 + \mu_0'.$$

Тогда

$$\mu + \mu' \in U\left(f(x, x_1) + f'(x, x_2) + x_3 + \cdots + x_{p+1}\right),$$
$$\mu\mu' \in U\left(f\left(f'(x, x_1), x_1\right)\right),$$

В случае $\mu' \in \{\xi\} E_p'(\xi)$ через g обозначим л.-р-а. функцию, получаемую применением операции обратной связи к переменной x' л.-р-а. функции $f(x, x_1) + f'(x', x_2) + x_3 + \cdots + x_{p+1}$. Нетрудно видеть, что

$$\text{Об}\left(\mu, \mu'\right) \in U(g).$$

С использованием этих рассуждений, соотношение (33) доказывается индукцией по построению элементов множества $K^{(1)}(U(M))$.

Заметим далее, что для любого Θ, $\Theta \in J_p^{(1)}$, множество $U(M)$ не содержится в Θ. Отсюда и по теореме 2 параграфа 2 получаем следующее равенство.

$$K^1(U(M)) = E_p'(\xi).$$

Поэтому и ввиду включения (33) утверждение леммы справедливо. Лемма 13 доказана.

Теперь сформулируем и докажем основные результаты настоящей работы.

Теорема 5. *J_p — критериальная система в L_p, состоящая из предполных классов и любой предполный в L_p класс содержится в J_p.*

Доказательство. Если некоторое множество M л.-р-а. функций не содержится ни в одном замкнутом классе из множества J_p, то по леммам 9, 12, 13 множество M полно в L_p.

Отсюда и из теоремы 4 следует, что J_p — приведенная критериальная система в L_p.

Доказательство того, что каждый класс из J_p является предполным может быть проведено так же, как и в [1] для приведенной критериальной системы множества $P_{\text{о.д.}}$ всех конечных автоматов.

Заметим далее, что не содержащееся ни в одном из классов J_p множество л.-р-а. функций M, включает функции f_i, $i = 1, 2$ такие, что $f_1 \notin V_1$ и $f_2 \notin M_1$. Множество, состоящее из всех классов системы J_p, каждый из которых не содержит множество $\{f_1, f_2\}$, конечно. Поэтому M содержит конечное полное в L_p подмножество, то есть M не является предполным классом. Таким образом, все предполные в L_p классы содержатся в J_p. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Проблема полноты конечных подмножеств из L_p алгоритмически разрешима.*

Доказательство. Рассмотрим конечное множество л.-р-а. функций M. Найдется натуральное число k и найдутся л.-р-а. функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, такие, что $M = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$. Для каждого i из $\{1, 2, \ldots, k\}$ найдутся л.-р-а. функции $\mu_{i,j}$, $j = 0, 1, \ldots, n_i$, такие, что справедливо разложение

$$f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}\right) = \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{i,j} x_j + \mu_{i,0}.$$

Пусть каждая дробь $\mu_{i,j}$ представлена в виде несократимой дроби $\mu_{i,j} = \frac{u_{i,j}}{v_{i,j}}$. При этом переменная x_j л.-р-а. функции f_i является непосредственной в точности тогда, когда $^1[u_{i,j} \neq 0$.

Если каждая функция множества M либо имеет одну непосредственную переменную либо вовсе не имеет непосредственных переменных, то $M \subset V_1$ и $K(M) \neq L_p$.

Поэтому следует рассмотреть случай, когда найдется g, $g \in M$, $g = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n + \mu_0$, такая, что g имеет не менее двух непосредственных переменных. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что x_1 — непосредственная переменная функции g.

Пусть при этом $\mu_1 = \frac{u_1}{v_1}$, $(u_1, v_1) = 1$. Разложим многочлен u_1 в произведение неприводимых многочленов $u_1 = p_{k_1} p_{k_2} \ldots p_{k_t}$. Нетрудно видеть, что для любого натурального i, $i \geqslant 2$, не содержащегося в множестве $\{k_1, k_2, \ldots, k_t\}$, функция g не содержится ни в $R_i^{\text{с}}$, ни в $R_i^{\text{н}}$.

Если при этом найдется m, $m \in \{1, 2, \ldots, t\}$, такое, что для любого i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, и любого j, $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$, многочлен $v_{i,j}$ не делится на p_{k_m}, если x_j — единственная существенная переменная функции f_i, и многочлен $u_{i,j}$ делится на p_{k_m}, в противном случае, то $M \subset R^{\text{С}}_{k_m}$ и M не полно в L_p.

Если найдется m, $m \in \{1, 2, \ldots, t\}$, такое, что для любого i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, и любого j, $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$, многочлен $v_{i,j}$ не делится на p_{k_m}, если x_j — единственная непосредственная переменная функции f_i, и многочлен $u_{i,j}$ делится на p_{k_m}, в противном случае, то $M \subset R^{\text{Н}}_{k_m}$, поэтому M не полно в L_p.

Далее, пусть для любого i, $i \in \{2, 3, \ldots\}$ справедливы следующие соотношения.

$$M \not\subset R^{\text{С}}_i,$$
$$M \not\subset R^{\text{Н}}_i.$$

Для каждого i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, для любого j, $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$, и числа $a_{i,j}$, $a_{i,j} = \left(p - ^1 [u_{i,j}]\right) \left({}^1[v_{i,j}]\right)^{-1}$, выполнено следующее включение: $u_{i,j} + a_{i,j} v_{i,j} \in \{\xi\} E_p[\xi]$.

Если при этом для любого i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, и для любого j, $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$, выполнено:

$$u_{i,j} + a_{i,j} v_{i,j} \in \{\xi^2\} E_p[\xi],$$

то $M \subseteq M_1$ и M не является полным в L_p.

Поэтому будем предполагать, что в M найдется л.-р-а. функция h и найдется μ, $\mu = \frac{u}{v}$, $(u, v) = 1$, $\mu \in U(h)$, такие что для некоторого числа a из E_p и для некоторого $v' \notin \{\xi\} E_p[\xi]$ выполнено: $u + av = \xi v'$.

Заметим, что для любого i, $i \in \{2, 3, \ldots\}$, если неприводимый над E_p многочлен p_i не делит v', то $M \not\subseteq M_i$.

Разложим многочлен v' в произведение неприводимых над E_p многочленов.

$$v' = p_{i_1}^{s_1} p_{i_2}^{s_2} \ldots p_{i_r}^{s_r},$$

$i_j < i_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, r - 1$.

Если найдется m, $m \in \{1, 2, \ldots, r\}$, такое, что для любого i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, и любого j, $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$, многочлен $u_{i,j} + a_{i,j} v_{i,j}$ делится на p_{i_m}, то $M \subset M_{i_m}$ и M не полно в L_p.

В противном случае $M \not\subseteq M_i$ для каждого i, $i = 2, 3, \ldots$.

Далее остается проверить соотношения

$$M \not\subseteq \Theta$$

для всех Θ из конечного множества предполных классов $\hat{J}_p$,

$$\hat{J}_p = \left\{T_0, \ldots, T_{p-1}, V_p, M_0, R_0^{\text{С}}, R_0^{\text{Н}}\right\}.$$

Если для какого-нибудь a из множества E_p для любого i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ выполнено

$$\sum_{j=1}^{n_i} {}^1[\mu_{i,j} a +^1 [\mu_{i,0} = a,$$

то $M \subseteq T_a$. Если такого a не существует, то $M \not\subseteq T_a$, $a = 0, 1, \ldots, p-1$.

Если для любого i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, выполнено: $\sum_{j=1}^{n_i} {}^1[\mu_{i,j} = 1$, то $M \subseteq V_p$. В этом случае M не является полным в L_p.

В противном случае, для любого i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и любого j, $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$, проверим справедливость следующего свойства: если x_j — единственная существенная переменная функции f_i, то $\deg u_{i,j} \leqslant \deg v_{i,j}$, а если x_j — существенная переменная функции f_i, но эта функция имеет еще хотя-бы одну существенную переменную, то $\deg u_{i,j} < \deg v_{i,j}$. Включение $M \subseteq R_0^{\text{С}}$ выполнено в точности тогда, когда для каждой пары i, j проверяемое свойство имеет место.

Включение $M \subseteq R_0^{\text{Н}}$ справедливо если и только если для каждой пары i, j, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, выполнено неравенство $\deg u_{i,j} \leqslant \deg v_{i,j}$, когда x_j — единственная непосредственная переменная функции f_i, или неравенство $\deg u_{i,j} < \deg v_{i,j}$, когда x_j не является единственной непосредственной переменной функции f_i.

Каждой дроби $\mu_{i,j}$ из конечного множества $U(M)$, сопоставим многочлен $\tilde{u}_{i,j}$, $\tilde{u}_{i,j} = u_{i,j} + a_{i,j} \cdot v_{i,j}$.

Включение $M \subseteq M_0$ выполнено в точности тогда, когда для любого i, $i \in \{1, 2, \ldots k\}$, и любого j, $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$, справедливо неравенство $\deg \tilde{u}_{i,j} < \deg v_{i,j}$.

Таким образом, получен алгоритм проверки полноты конечных систем из L_p. Теорема 6 доказана.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[2] Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания А-полноты для о.-д. функций // Мат. заметки. — М.: Наука, 1972. — Вып. 6. — С. 687–697.

[3] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1976.

[4] Гилл А. Линейные последовательные машины. — М.: Наука, 1974.

[5] Часовских А. А. О полноте в классе линейных автоматов // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1991. — Вып. 3. — С. 140–166.

[6] Часовских А. А. О выразимости систем с сумматором в классе линейных автоматов // Вестник Московского университета. Сер. 1. Мат., мех. — М.: Изд. Моск. ун-та, 1990. — № 4. — С. 31–34.

[7] Часовских А. А. Замкнутые классы линейно-автоматных функций // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 2004. — Вып. 13. — С. 113–136.