Линейный алгоритм построения деревьев разводки сигнала

Т. Р. Сытдыков

В работе рассматривается задача построения дерева разводки сигнала с заданными величинами задержек сигнала до листьев дерева. Предложен алгоритм, который для заданного мультимножества натуральных чисел за линейное время строит дерево с величинами задержек до листьев дерева, совпадающими с элементами данного мультимножества, или говорит, что такое дерево построить нельзя.

Ключевые слова: синтез больших интегральных схем, разводка сигнала, дерево буферов.

1. Введение

При синтезе больших интегральных схем часто возникают сети с большим ветвлением, то есть ситуации, когда сигнал с выхода некоторого логического элемента надо подать на входы большого числа других элементов, например, когда результат некоторого вычисления может быть использован сразу во многих местах. Если при этом выход исходного управляющего элемента напрямую подать на входы управляемых элементов, то емкость на выходе управляющего элемента будет очень большой и задержка данного элемента станет не приемлемой. В таких случаях используют деревья разводки сигнала, которые состоят из буферов, то есть логических элементов, реализующих тождественную функцию и использующихся для усиления сигнала. Типичным примером сети с большим ветвлением является сеть синхронизации регистров, где регистр — это устройство, позволяющее сохранить результат вычисления предыдущего такта для использования в течении последующего такта. В сети синхронизации регистров управляющий контакт — это выход устройства, реализующего периодический сигнал (часы), а управляемые контакты — это управляющие входы регистров, которые указывают моменты, когда надо засасывать в регистр новое значение. Задача построения сети синхронизации регистров — задача построения такого дерева буферов, что сигнал от управляющего контакта до любого из управляемых контактов доходит за одинаковое время, то есть синхронно. Задача построения синхронизирующих деревьев описывается и исследуется, например, в [1, 2, 3, 4]. Теперь рассмотрим ситуацию, когда делается два последовательных вычисления, которые сохраняются на регистрах, причем первое вычисление сложное и задается формулой большой глубины, и результат этого вычисления подается на вход первого регистра, а второе вычисление простое, задается формулой малой глубины, одним из аргументов этой формулы является выход первого регистра, и результат второго вычисления сохраняется на втором регистре. Поскольку глубина формулы первого вычисления большая, а вычисление надо выполнить за один такт, то чтобы выполнить ограничения по таймингу придется использовать мощные дорогостоящие элементы для реализации этой формулы. Между тем если послать отпирающий сигнал на управляющий вход первого регистра с некоторой задержкой относительно второго регистра, то есть не синхронно, то время на вычисление первой формулы увеличится, а на время на вычисление второй формулы уменьшится, тем самым удовлетворить ограничения тайминга будет легче. Использование такого приема описано, например, в [5]. Тем самым асинхронная доставка отпирающего сигнала до регистров может существенно облегчить процесс синтеза чипов, делая их более дешевыми. В [1] можно найти и другие примеры, когда управляющий сигнал надо доставить до управляемых контактов за разное время, причем время задержки до каждого из управляемых контактов строго определенное.

В математической постановке эта задача может быть сформулирована следующим образом.

Пусть дано ориентированное корневое дерево. Будем считать, что от корня дерева к листьям вдоль ребер дерева распространяется сигнал. В каждой вершине этот сигнал испытывает задержку, равную количеству ребер, исходящих из данной вершины. Такое допущение оправдывается тем, что каждая вершина дерева это буфер, а задержка буфера в довольно хорошем приближении пропорциональна суммарной емкости контактов, подключенных к буферу. А суммарная емкость контактов пропорциональна числу контактов. На всем пути от корня к некоторой вершине α сигнал испытывает задержку, равную сумме задержек во всех вершинах, входящих в путь, исключая саму вершину α. Таким образом, для каждой вершины задержка сигнала будет целым неотрицательным числом, которое однозначно восстанавливается по структуре дерева. Для данного дерева можно составить мультимножество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, состоящее из величин задержек сигнала до листьев дерева, где n — число листьев.

Исследуемая задача заключается в следующем. Пусть дано мультимножество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ целых неотрицательных чисел. Требуется определить, существует ли дерево, мультимножество задержек сигнала до листьев которого совпадает с заданным мультимножеством. Если такое дерево существует, мультимножество назовем *реализуемым*, а соответствующее дерево — *реализующим* данное мультимножество.

При исследовании поставленной задачи получены следующие результаты.

Вводится характеристика мультимножества — числовая функция, время вычисления которой пропорционально количеству элементов мультимножества. Доказывается, что если характеристика мультимножества превосходит 1, то мультимножество не реализуемо. Если же характеристика мультимножества не превосходит $5/6$, то мультимножество реализуемо. В области $(5/6, 1]$ возможны оба варианта. Таким образом, характеристика дает нам достаточное условие реализуемости и необходимое условие реализуемости, но не дает необходимого и достаточного условия.

Также приводится алгоритм, решающий задачу о реализуемости в общем случае. Время его работы для заданного мультимножества линейно зависит от числа элементов мультимножества.

Автор выражает благодарность профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Под *мультимножеством* будем понимать множество с повторениями, в котором каждый элемент имеет кратность — целое неотрицательное число, причем если кратность некоторого элемента равна нулю, то будем считать, что данный элемент отсутствует в мультимножестве, а если кратность больше нуля, то в мультимножестве присутствует столько экземпляров элемента какова его кратность.

Через $M(A)$ обозначим максимальный элемент мультимножества A.

Будем использовать следующие формы записи мультимножества A:

- $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — перечисление элементов мультимножества с учетом кратности, то есть если кратность элемента равна k, то элемент повторяется в записи k раз;
- $(k_0, k_1, k_2, \ldots, k_m)$ — вектор кратностей элементов, входящих в мультимножество, где $m \geqslant M(A)$, k_i — количество элементов, равных i, в данном мультимножестве, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ — множество всех мультимножеств целых неотрицательных чисел, а через $E = \{0\}$ — тривиальное мультимножество.

Через $\mathfrak{D}$ обозначим множество всех ориентированных корневых деревьев, все ребра, которых ориентированы от корня к листьям. *Лист* — это вершина дерева, из которой не выходит ни одно ребро.

Если α — вершина дерева $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$, то через $out(\alpha)$ обозначим число ребер дерева $\mathbf{D}$, исходящих из вершины α.

Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — ориентированная цепь дерева $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$, где α_1 — корень дерева $\mathbf{D}$, то величину $z(\alpha) = \sum_{i=1}^{k-1} out(\alpha_i)$ будем называть задержкой сигнала до вершины α_k.

Если $\mathbf{D}$ — дерево из $\mathfrak{D}$, то через $\mathcal{L}(\mathbf{D})$ обозначим множество листьев дерева $\mathbf{D}$.

Если $\mathbf{D}$ — дерево из $\mathfrak{D}$, то мультимножество $J(\mathbf{D}) = \{z(\alpha) : \alpha \in \mathcal{L}(\mathbf{D})\}$ назовем мультимножеством, реализуемым деревом $\mathbf{D}$. Иными словами мультимножество, реализуемое деревом $\mathbf{D}$ состоит из задержек сигнала до листьев дерева $\mathbf{D}$.

Мультимножество A называется *реализуемым*, если такое существует дерево $\mathbf{D}$ из $\mathfrak{D}$, что $J(\mathbf{D}) = A$.

Через $\mathfrak{M}_p$ обозначим множество всех реализуемых мультимножеств.

Характеристикой числа a из $\mathbb{Z}_+$ назовем функцию $h\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$, определяемую следующим образом:

$$h(a) = \begin{cases} 1, & a = 0, 1 \\ 3^{-k}, & a = 3k, \text{ где } k = 1, 2, \ldots \\ 3^{-k} \cdot 2^{-1}, & a = 3k + 2, \text{ где } k = 0, 1, 2, \ldots \\ 3^{-k} \cdot 2^{-2}, & a = 3k + 4, \text{ где } k = 0, 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Характеристикой мультимножества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ из $\mathfrak{M}$ назовем функцию $S\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{Q}$, определяемую следующим образом:

$$S(A) = \sum_{i=1}^{n} h(a_i).$$

В частности, $S(E) = h(0) = 1$.

Будем писать $A(n) = O(B(n))$, если существуют такие константы c_1 и c_2, что, начиная с некоторого номера n_0, выполняются неравенства $c_1 B(n) \leqslant A(n) \leqslant c_2 B(n)$.

Пусть $A = (k_0, k_1, \ldots, k_m)$ — мультимножество из $\mathfrak{M}$, тогда величину $|A| = \sum_{i=0}^{m} k_i$ будем называть мощностью мультимножества A.

Основным результатом данной статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathfrak{M}$. Тогда, если $S(A) \leqslant \frac{5}{6}$, то $A \in \mathfrak{M}_p$; если $\frac{5}{6} < S(A) \leqslant 1$, то возможны оба варианта: $A \in \mathfrak{M}_p$ или $A \notin \mathfrak{M}_p$; если $S(A) > 1$, то $A \notin \mathfrak{M}_p$.*

Теорема 2. *Пусть $A \in \mathfrak{M}$. Тогда задача о реализуемости A решается за $O(|A|)$ арифметических операций над целыми числами.*

3. Простейшие свойства реализуемых мультимножеств

Пусть везде далее $A \in \mathfrak{M}$, $a \in \mathbb{Z}_+$.

Будем писать $a \in A$, если кратность числа a в мультимножестве A больше нуля.

Мультимножество $A \cup \{a\}$ получается из мультимножества A увеличением кратности числа a в мультимножестве A на единицу. Мультимножество $A \setminus \{a\}$ получается из мультимножества A уменьшением кратности числа a в мультимножестве A на единицу, если $a \in A$, и $A \setminus \{a\} = A$, если $a \notin A$.

Пусть A — произвольное мультимножество, содержащее некоторое число a, и $v \in \mathbb{N}$. Введем следующий оператор $G(A, a, v) = A \cup \{a + v\} \setminus \{a\}$.

Если A — мультимножество, $a \in A$, $|A| \geqslant 2$, то введем оператор $H(A, a) = A \setminus \{a\}$.

Будем называть G *оператором увеличения элемента*, а H — *оператором удаления элемента.*

Если F_1, F_2 — операторы, то через $F_1 \cdot F_2$ будем обозначать композицию операторов F_1, F_2.

Утверждение 1. *Пусть $A \in \mathfrak{M}_p$, $B = F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_k(A)$, где F_i — либо оператор увеличения элемента, либо оператор удаления элемента, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда $B \in \mathfrak{M}_p$.*

Доказательство. Достаточно показать, что операторы увеличения элемента и удаления элемента не выводят из класса реализуемых мультимножеств.

1) Пусть a — произвольный элемент из A, $v \in \mathbb{N}$, $C = G(A, a, v)$. Рассмотрим дерево, реализующее A, и заменим лист, задержка которого равна a, на цепочку вершин длины v (см. рис. 1). Тогда полученное дерево реализует мультимножество $A \cup \{a+v\} \setminus \{a\} = G(A, a, v) = C$, то есть мультимножество C реализуемо.

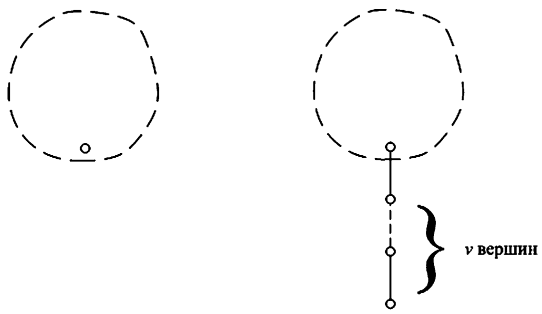

Рис. 1. Замена листа на цепочку вершин.

2) Пусть a — произвольный элемент из A, $C = H(A, a)$. Рассмотрим дерево $\mathbf{D}$, реализующее A, и возьмем лист α с задержкой a. Рассмотрим путь p от корня дерева к α. Так как оператор H определен

только при $|A| \geqslant 2$, то существует лист $\beta \in \mathbf{D}$, $\beta \neq \alpha$. Следовательно, существует такая вершина $\gamma \in p$, что $out(\gamma) \geqslant 2$. Без ограничения общности будем считать, что все вершины пути p, расположенные между γ и α, имеют исходящую степень, равную 1.

Удалим из $\mathbf{D}$ остаток пути от корня к α, расположенный после γ. Обозначим оставшуюся часть поддерева γ как $\mathbf{D}_1$. Тогда мультимножество задержек дерева изменится следующим образом: лист с задержкой a будет удален, задержки всех листьев из $\mathbf{D}_1$ уменьшатся на 1, а задержки остальных листьев не изменятся. Заменим все листья из $\mathbf{D}_1$ на цепочки длины 1 (см. рис. 2), тогда задержки листьев — концов этих цепочек примут соответствующие начальные значения задержек преобразованных листьев. Полученное в результате этих преобразований дерево будет реализовывать мультимножество $A \setminus \{a\} = H(A, a) = C$, то есть мультимножество C реализуемо.

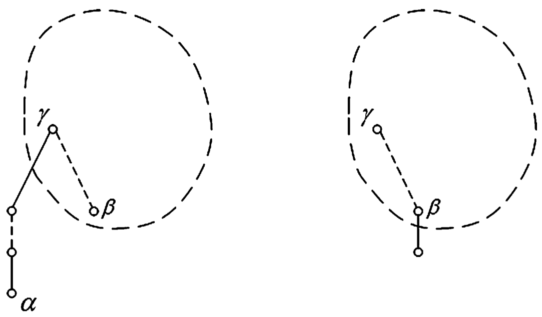

Рис. 2. Удаление вершины — случай $\beta \in \mathbf{D}_1$.

Утверждение 2. *Пусть A — реализуемое мультимножество. Тогда существует такое дерево $\boldsymbol{D} \in \mathfrak{D}$, что $J(\boldsymbol{D}) = A$, и для любой вершины $\alpha \in \boldsymbol{D}$ выполняется $out(\alpha) \leqslant 3$.*

Доказательство. Рассмотрим дерево $\mathbf{D}$, реализующее A. Пусть k — количество вершин $\mathbf{D}$ с исходящей степенью, превосходящей 3. Приведем конструктивную процедуру, перестраивающую $\mathbf{D}$ так, что реализуемое мультимножество не меняется, а число вершин с исходящей степенью, превосходящей 3, уменьшится на 1. Тогда, применив эту процедуру к $\mathbf{D}$ k раз, получим дерево $\mathbf{D}'$, реализующее A, любая вершина которого будет иметь полустепень исхода, не превосходящую 3, и лемма будет доказана.

Пусть $\alpha \in \mathbf{D}$, $out(\alpha) = v > 3$. Обозначим сыновей α как $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_v$, а соответствующие им поддеревья как $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots, \mathbf{D}_v$. Заменим α на следующую конструкцию: поставим вместо нее вершину α', $out(\alpha') = 2$, и обозначим сыновей α' как β_1 и β_2. В качестве сыновей β_1 возьмем γ_1 и γ_2, в качестве сыновей β_2 возьмем $\gamma_3, \gamma_4, \ldots, \gamma_v$. Посмотрим, какие изменения произошли с задержками вершин из $\mathbf{D}_i$, $i = 1, \ldots, v$.

Пусть $z_1(\lambda)$ — задержка вершины λ до преобразования, $z_2(\lambda)$ — задержка соответствующей λ вершины после преобразования.

Для любой вершины $\lambda \in \mathbf{D}_i, i = 3, \ldots, v$, имеем $z_2(\lambda) = z_1(\lambda) - v + 2 + (v - 2) = z_1(\lambda)$, то есть задержки остались прежними.

Для любой вершины $\lambda \in \mathbf{D}_i, i = 1, 2$, имеем $z_2(\lambda) = z_1(\lambda) - v + 2 + 2 = z_1(\lambda) - v + 4$. Так как $v > 3 \Rightarrow v \geqslant 4$, то $z_2(\lambda) \leqslant z_1(\lambda)$. Тогда, заменив все листья из $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ на цепочки длины $z_1(\lambda) - z_2(\lambda)$, получим новые листья с задержками, совпадающими с задержками их прообразов до преобразования (см. рис. 3).

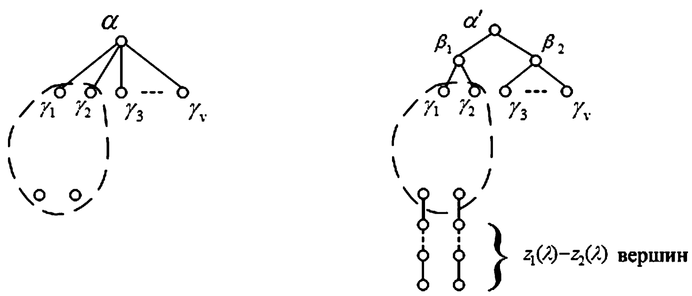

Рис. 3. Перестройка дерева с понижением степени вершины.

Следовательно, реализованное полученным деревом мультимножество есть A. При этом $out(\alpha') = 2$, $out(\beta_1) = 2$, $out(\beta_2) = v - 2$, в достроенных цепочках степени вершин не превосходят 1, степени остальных вершин не изменились. Таким образом, только для вершины β_2 $out(\beta_2) = v - 2$ может получиться больше 3, при этом $out(\beta_2)$ будет меньше $out(\alpha)$ на 2. Если $out(\beta_2) > 3$, то преобразуем поддерево вершины β_2 аналогично поддереву вершины α, как было описано выше, и будем действовать так до тех пор, пока среди новых добавленных вершин будет ровно одна вершина с исходящей степенью, превосходящей 3. Таким образом, получим дерево, реализующее A, в котором количество вершин со степенью, превосходящей 3, будет на 1 меньше, чем в $\mathbf{D}$.

Таким образом, для решения задачи о реализуемости достаточно рассматривать реализующие деревья с вершинами, полустепень исхода которых не превосходит 3.

4. Операторная формулировка задачи о реализуемости

Определим оператор g_i^j, действующий на мультимножествах, где $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Если $k_i \geqslant j$, $i \geqslant j$, то положим

$$g_i^j(A) = (k_0, k_1, \ldots, k_{i-j-1}, k_{i-j}+1, k_{i-j+1}, \ldots, k_{i-1}, k_i - j, k_{i+1}, \ldots, k_m),$$

в противном случае полагаем, что $g_i^j(A)$ не определен.

Обозначим множество операторов $g_i^j, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ как $\mathfrak{G}_m^n$.

Если $g_i^j(A)$ определен, будем говорить, что g_i^j *является допустимым преобразованием* или просто *преобразованием* для A.

Для цепочки преобразований $g_{i_1}^{j_1}, g_{i_2}^{j_2}, \ldots, g_{i_l}^{j_l}$ мультимножество $A' = g_{i_1}^{j_1}(g_{i_2}^{j_2}(\ldots g_{i_l}^{j_l}(A)\ldots))$ назовем *достижимым из* A, если все преобразования цепочки являются допустимыми для своих аргументов.

Пусть $A = (k_0, k_1, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}_p$, $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$, $J(\mathbf{D}) = A$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_v$ — листья $\mathbf{D}$, имеющие общего родителя α, причем $out(\alpha) = v$. Тогда $z(\lambda_1) = z(\lambda_2) = \cdots = z(\lambda_v) = a$ — некоторое число, не меньшее чем v.

Рассмотрим дерево $\mathbf{D}'$, полученное из $\mathbf{D}$ удалением листьев λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_v$. Тогда α станет листом $\mathbf{D}'$. Следовательно, $J(\mathbf{D}') = (k_0, k_1, \ldots, k_{a-v-1}, k_{a-v}+1, k_{a-v+1}, \ldots, k_{a-1}, k_a - v, k_{a+1}, \ldots, k_m) = g_a^v(A)$.

В дальнейшем подобное преобразование дерева $\mathbf{D}$ будем обозначать как $G_i^j(\mathbf{D})$, по аналогии с преобразованием реализуемого $\mathbf{D}$ мультимножества. Таким образом, $\mathbf{D}' = G_i^j(\mathbf{D})$

Можно продолжать преобразовывать $\mathbf{D}'$ аналогичным способом до получения тривиального дерева $\mathbf{D}_0$, состоящего из одного корня. При этом $J(\mathbf{D}_0) = \{0\} = E$ — мультимножество, состоящее из одного нуля. Тогда, если l — число вершин $\mathbf{D}$, не являющихся листьями, то для некоторых $i_1, i_2, \dots, i_l, j_1, j_2, \dots, j_l$ получим $E = g_{i_1}^{j_1}(g_{i_2}^{j_2}(\dots g_{i_l}^{j_l}(A)\dots))$.

Следовательно, реализуемость множества A можно свести к задаче получения E из A последовательным применением операторов из $\mathfrak{G}_m^n$, где m — максимальный элемент A, $n = |A|$.

Аналогично, задача получения E из заданного множества A применением операторов из $\mathfrak{G}_m^n$ может быть сведена к задаче о реализуемости A. Поэтому можно считать эти задачи эквивалентными и полагать, что задача получения E из множества A является операторной формулировкой задачи о реализуемости A.

В частности, из утверждения 2 следует, что задача о реализуемости заданного множества A эквивалентна задаче о получении E из A с использованием операторов из $\mathfrak{G}_m^3$, где m — максимальный элемент A.

5. Доказательство теоремы 1

Выпишем некоторые значения характеристики $h(a)$ и рассмотрим простейшие свойства этой функции.

$h(0) = 1$, $h(1) = 1$, $h(2) = \frac{1}{2}$, $h(3) = \frac{1}{3}$, $h(4) = \frac{1}{4}$, $h(5) = \frac{1}{6}$.

Свойство 1. *Для любого числа $a \in \mathbb{Z}_+$ выполнено $h(a) > 0$.*

Это непосредственно следует из определения h.

Свойство 2. *Для любого натурального a выполнено $h(a) \leqslant h(a-1)$.*

Доказательство. Для $a \leqslant 5$ это видно непосредственно по значениям h, выписанным выше.

Для $a > 5$ рассмотрим три случая.

1) $a = 3k$, $k \geqslant 2$. Тогда $h(a) = 3^{-k} < 3^{-k+1} \cdot 2^{-1} = h(3(k-1)+2) = h(a-1)$.

2) $a = 3k+2$, $k \geqslant 2$. Тогда $h(a) = 3^{-k} \cdot 2^{-1} < 3^{-k+1} \cdot 2^{-2} = h(3(k-1)+4) = h(a-1)$.

3) $a = 3k+4$, $k \geqslant 1$. Тогда $h(a) = 3^{-k} \cdot 2^{-2} < 3^{-k-1} = h(3(k+1)) = h(a-1)$.

Во всех рассмотренных случаях $h(a) \leqslant h(a-1)$.

Свойство 2 означает, что h — невозрастающая функция.

Свойство 3. *Если $a \to \infty$, то $h(a) \to 0$.*

Доказательство. Если $a \in \mathbb{Z}_+$, $a \to \infty$, то во всех трех возможных вариантах $a = 3k$, $a = 3k + 2$, $a = 3k + 4$ получим $k \to \infty$, но тогда $h(a) = 3^{-k} \cdot 2^{-c} \to 0$, $c \in \{0, 1, 2\}$.

Утверждение 3. *Для любых* $A = (k_0, k_1, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *если* $g_i^j(A)$ *определено, то* $S(g_i^j(A)) \geqslant S(A)$.

Доказательство. Пусть $A = (k_0, k_1, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}$. Рассмотрим варианты $j = 1, 2, 3$ и в каждом варианте покажем, что если $g_i^j(A)$ определен, то $S(g_i^j(A)) \geqslant S(A)$.

Из определения $g_i^j(A)$ следует, что $S(g_i^j(A)) - S(A) = h(i - j) - jh(i)$. Покажем, что во всех вариантах выражение $h(i - j) - jh(i)$ будет неотрицательным.

1) Пусть $j = 1$. Тогда $h(i - 1) - h(i) \geqslant 0$, так как h — невозрастающая функция.

Следовательно, $S(g_i^j(A)) \geqslant S(A)$.

2) Пусть $j = 2$. Здесь нужно рассмотреть различные варианты для i, учитывая, что g_i^2 определен при $i \geqslant 2$.

a) $i = 2$. Тогда $h(i) = h(2) = \frac{1}{2}$, $h(i - 2) = h(0) = 1$, следовательно $h(0) - 2h(2) = 1 - \frac{2}{2} = 0 \geqslant 0$.

b) $i = 3$. Тогда $h(i) = h(3) = \frac{1}{3}$, $h(i - 2) = h(1) = 1$, следовательно $h(1) - 2h(3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \geqslant 0$.

c) $i = 3k + 4$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда $h(i) = h(3k + 4) = \frac{1}{3^k \cdot 2^2}$, $h(i - 2) = h(3k + 2) = \frac{1}{3^k \cdot 2}$, следовательно $h(3k + 2) - 2h(3k + 4) = \frac{1}{3^k \cdot 2} - \frac{1}{3^k \cdot 2} = 0 \geqslant 0$.

d) $i = 3k + 2$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $h(i) = h(3k + 2) = \frac{1}{3^k \cdot 2}$, $h(i - 2) = h(3k) = \frac{1}{3^k}$, следовательно $h(3k) - 2h(3k + 2) = \frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^k} = 0 \geqslant 0$.

e) $i = 3k$, $k = 2, 3, \ldots$. Тогда $h(i) = h(3k) = \frac{1}{3^k}$, $h(i - 2) = h(3(k - 2) + 4) = \frac{1}{3^{k-2} \cdot 2^2}$, следовательно $h(3(k-2)+4) - 2h(3k) = \frac{1}{3^{k-2} \cdot 2^2} - \frac{2}{3^k} = \frac{3^2 - 2^3}{3^k \cdot 2^2} = \frac{1}{3^k \cdot 2^2} \geqslant 0$.

Во всех случаях $S(g_i^2(A)) \geqslant S(A)$.

3) Пусть $j = 3$. Здесь нужно рассмотреть различные варианты для i, учитывая, что g_i^3 определен при $i \geqslant 3$.

a) $i = 3$. Тогда $h(i) = h(3) = \frac{1}{3}$, $h(i - 3) = h(0) = 1$, следовательно $h(0) - 3h(3) = 1 - \frac{3}{3} = 0 \geqslant 0$.

b) $i = 4$. Тогда $h(i) = h(4) = \frac{1}{4}$, $h(i - 3) = h(1) = 1$, следовательно $h(1) - 3h(4) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \geqslant 0$.

c) $i = 3k+2$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $h(i) = h(3k+2) = \frac{1}{3^k \cdot 2}$, $h(i-3) = h(3(k-1)+2) = \frac{1}{3^{k-1} \cdot 2}$, следовательно $h(3(k-1)+2) - 3h(3k+2) = \frac{1}{3^{k-1} \cdot 2} - \frac{3}{3^k \cdot 2} = 0 \geqslant 0$.

d) $i = 3k$, $k = 2, 3, \ldots$. Тогда $h(i) = h(3k) = \frac{1}{3^k}$, $h(i-3) = h(3(k-1)) = \frac{1}{3^{k-1}}$, следовательно $h(3(k-1)) - 3h(3k) = \frac{1}{3^{k-1}} - \frac{3}{3^k} = 0 \geqslant 0$.

e) $i = 3k+4$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $h(i) = h(3k+4) = \frac{1}{3^k \cdot 2^2}$, $h(i-3) = h(3(k-1)+4) = \frac{1}{3^{k-1} \cdot 2^2}$, следовательно $h(3(k-1)+4) - 3h(3k+4) = \frac{1}{3^{k-1} \cdot 2^2} - \frac{3}{3^k \cdot 2^2} = 0 \geqslant 0$.

Во всех случаях $S(g_i^3(A)) \geqslant S(A)$. Утверждение доказано.

Заметим, что в процессе доказательства были установлены следующие соотношения.

Следствие 1. *Пусть* $A = (k_0, k_1, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}$, $g_i^3 \in \mathfrak{G}(A)$, $i > 4$. *Тогда* $S(g_i^3(A)) = S(A)$.

Следствие 2. *Пусть* $A = (k_0, k_1, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}$, $g_i^2 \in \mathfrak{G}(A)$, $i > 3$. *Тогда при* $i = 3k+4$ *или* $i = 3k+2$ *получим* $S(g_i^2(A)) = S(A)$, *а при* $i = 3k$ $S(g_i^2(A)) = S(A) + \frac{1}{3^k \cdot 2^2}$.

Доказательство. Оба следствия были фактически доказаны при рассмотрении вариантов 3) и 2) доказательства утверждения 3.

Утверждение 4. *Для любого реализуемого мультимножества* A *выполнено* $S(A) \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $A = (k_0, k_1, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}_p$. Тогда существуют такие преобразования $g_{i_1}^{j_1}, g_{i_2}^{j_2}, \ldots, g_{i_l}^{j_l} \in \mathfrak{G}_m^3$, что $g_{i_1}^{j_1}(g_{i_2}^{j_2}(\ldots g_{i_l}^{j_l}(A)\ldots)) = E$. Так как $S(E) = 1$ и по утверждению 3 для любых $i = 0, 1, \ldots, m$, $j = 1, 2, 3$ выполнено $S(g_i^j(A)) \geqslant S(A)$, то есть $S(E) \geqslant S(A)$, или $S(A) \leqslant S(E) = 1$.

Эквивалентной формулировкой утверждения 4 является следующее утверждение: *если* $A \in \mathfrak{M}$ *и* $S(A) > 1$, *то* $A \notin \mathfrak{M}_p$.

Легко подобрать мультимножество $A \in \mathfrak{M}_p$ такое, что $S(A) = 1$, например $A = \{2, 2\}$, то есть оценка $S(A) \leqslant 1$ является неулучшаемой. Покажем, что существуют мультимножества с характеристикой, не превосходящей 1, и не являющиеся реализуемыми.

Утверждение 5. *Для любого вещественного числа* $a > \frac{5}{6}$ *существует такое мультимножество* $A \in \mathfrak{M}$, *что* $S(A) < a$ *и* $A \notin \mathfrak{M}_p$.

Доказательство. Пусть $a = \frac{5}{6} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. По свойству 3 характеристики числа существует такое натуральное число m, что $h(m) < \varepsilon$. Можно считать, что $m > 3$.

Рассмотрим $A = \{2, 3, m\}$ — мультимножество, состоящее из трех элементов. Имеем $S(A) = h(2) + h(3) + h(m) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + h(m) = \frac{5}{6} + h(m) < \frac{5}{6} + \varepsilon = a$. При этом нетрудно убедиться, что данное мультимножество не является реализуемым. В самом деле, рассмотрим допустимые преобразования $g_i^j \in \mathfrak{G}_m^3$ для A. Таких преобразований будет всего три: g_2^1, g_3^1, g_m^1. Но $S(g_2^1(A)) = 1+\frac{1}{3}+h(m) > 1$, $S(g_3^1(A)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + h(m) = 1 + h(m) > 1$, то есть данные преобразования, согласно утверждению 4, приводят к нереализуемым мультимножествам. Если же последовательно применять $g_m^1, g_{m-1}^1, \dots, g_4^1$, то получим мультимножество $A' = \{2, 3, 3\}$, $S(A') = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{7}{6} > 1$, то есть A' также не является реализуемым. Таким образом, никакими допустимыми преобразованиями из A невозможно получить E. Значит, $S(A) < a$, $A \notin \mathfrak{M}_p$.

Утверждение 6. *Если* $A \in \mathfrak{M}$ *и* $S(A) \leqslant \frac{5}{6}$, *то* $A \in \mathfrak{M}_p$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{M}$, $S(A) \leqslant \frac{5}{6}$. Разобьем доказательство на две части.

1) Покажем, что существуют такие преобразования $g_{i_1}^{j_1}, g_{i_2}^{j_2}, \dots, g_{i_l}^{j_l} \in \mathfrak{G}_m^3$, что $g_{i_1}^{j_1}(g_{i_2}^{j_2}(\dots g_{i_l}^{j_l}(A)\dots)) = A_4$, где A_4 удовлетворяет следующим свойствам:

a) $M(A_4) \leqslant 4$;

b) $S(A_4) < \frac{13}{12}$.

2) Непосредственным перебором всех мультимножеств, удовлетворяющим свойствам a) и b), покажем, что такие мультимножества реализуемы.

1) Если $M(A) \leqslant 4$, то A удовлетворяет a) и в силу того, что $S(A) \leqslant \frac{5}{6} < \frac{13}{12}$, A удовлетворяет b).

Пусть $M(A) = m > 4$. Используя допустимые преобразования, будем последовательно получать из A мультимножества $A_m, A_{m-1}, A_{m-2}, \dots, A_4$ так, что $M(A_i) \leqslant i$ и A_4 будет удовлетворять условиям a) и b).

Положим $A_m = A$, тогда $M(A_m) = M(A) = m \leqslant m$. Покажем, как получить A_{i-1} из A_i при $i = m, m-1, \dots, 5$.

Пусть $v = 3k + b$ — количество элементов A_i, равных i, $b < 3$. Определим оператор t: $t = e$ (тождественный оператор), если $b = 0$, и

$t = g_i^b$ в противном случае. Положим $A_{i-1} = (t*(g_i^3)^k)(A_i)$. Тогда A_{i-1} не будет содержать элементов, равных i. Следовательно, $M(A_{i-1}) \leqslant i-1$.

Из утверждения 3 следует, что $S(A_4) \geqslant S(A_5) \geqslant \cdots \geqslant S(A_m) = S(A)$. Используя это, оценим разность $S(A_4) - S(A)$.

$S(A_4) - S(A) = S(A_4) - S(A_5) + S(A_5) - S(A_6) + \cdots + S(A_{m-1}) - S(A_m)$.

Оценим разность $S(A_{i-1}) - S(A_i)$, $i = 5, 6, \ldots, m$.

$S(A_{i-1}) - S(A_i) = S((t*(g_i^3)^k)(A_i)) - S(A_i) = S((t*(g_i^3)^k)(A_i)) - S((g_i^3)^k(A_i)) + S((g_i^3)^k(A_i)) - S(A_i)$.

Так как $i \geqslant 5$, то по следствию 1 утверждения 3 $S(g_i^3(A)) = S(A)$, откуда $S((g_i^3)^k(A_i)) = S(A_i)$. Тогда $S(A_{i-1}) - S(A_i) = S((t*(g_i^3)^k)(A_i)) - S((g_i^3)^k(A_i))$.

Рассмотрим все допустимые варианты для t. При $t = e$ получим $S((t*(g_i^3)^k)(A_i)) = S((g_i^3)^k(A_i))$.

При $t = g_i^1$ получим $S((t*(g_i^3)^k)(A_i)) - S((g_i^3)^k(A_i)) = h(i-1) - h(i)$.

При $t = g_i^2$, учитывая, что $i \geqslant 5$, и применяя следствие 2 утверждения 3, при $i \neq 3k$ получим $S((t*(g_i^3)^k)(A_i)) = S((g_i^3)^k(A_i))$ и при $i = 3k$ получим $S((t*(g_i^3)^k)(A_i)) - S((g_i^3)^k(A_i)) = \frac{1}{3^k \cdot 2^2} < \frac{1}{3^k \cdot 2} = \frac{3-2}{3^k \cdot 2} = \frac{1}{3^{k-1} \cdot 2} - \frac{1}{3^k} = h(3(k-1)+2) - h(3k) = h(i-1) - h(i)$.

Во всех случаях получим $S(A_{i-1}) - S(A_i) \leqslant h(i-1) - h(i)$.

Тогда $S(A_4) - S(A) = S(A_4) - S(A_5) + S(A_5) - S(A_6) + \cdots + S(A_{m-1}) - S(A_m) \leqslant h(4) - h(5) + h(5) - h(6) + \cdots + h(m-1) - h(m) = h(4) - h(m) < h(4) = \frac{1}{4}$, откуда $S(A_4) < S(A) + \frac{1}{4} \leqslant \frac{5}{6} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$.

Таким образом, первая часть утверждения доказана.

2) Покажем, что все мультимножества, удовлетворяющие свойствам a) и b), реализуемы.

На рисунке 4 выписаны все эти мультимножества непосредственно и приведены реализующие их деревья.

Таким образом, утверждение доказано.

Комбинируя утверждения 4, 5 и 6, получим теорему 1.

6. Доказательство теоремы 2

Определим множество $\mathfrak{M}^{so} = \{A \mid M(A) \leqslant 2(|A|-1)\}$.

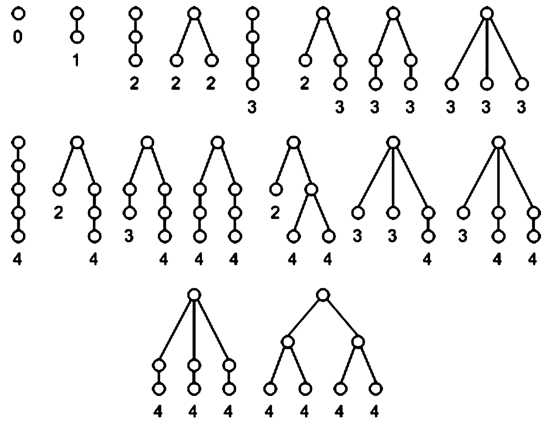

Рис. 4. Все мультимножества, для которых $M(A) \leqslant 4$, $S(A) < \frac{13}{12}$, и реализующие деревья.

Утверждение 7. *Пусть $A \in \mathfrak{M}_p$. Тогда существует такое дерево $\boldsymbol{D}$, что $J(\boldsymbol{D}) = A$, и если $\alpha \in \boldsymbol{D}$, $out(\alpha) = 1$, и из вершины α в вершину β ведет ребро, то $out(\beta) \leqslant 1$.*

Доказательство. Пусть дерево $\mathbf{D}$ реализует A. Предположим, что существует такая вершина α дерева $\mathbf{D}$, что $out(\alpha) = 1$, из α в β ведет ребро, и $out(\beta) > 1$.

Преобразуем дерево $\mathbf{D}$ следующим образом. Удалим вершину β, подвесив всех ее сыновей к α. Все листья потомки α заменим на цепочки из двух вершин (одна вершина степени 1, вторая — потомок первой — лист). Отождествим новые листья дерева с прежними (удаленными) листами. Посмотрим, как изменятся задержки до листьев дерева после преобразования.

Задержки до листьев не потомков α не изменятся. Задержки до листьев потомков α уменьшатся на 1 (из-за удаления β) и увеличатся на 1 (в силу замены каждого листа на цепочку из двух вершин), то есть не изменятся. Таким образом, после преобразования также имеем $J(\mathbf{D}) = A$. При этом количество вершин дерева, нарушающих условие утверждения, уменьшилось на 1. Но тогда, применяя описанное преобразование многократно, получим дерево $\mathbf{D}_0$, удовлетворяющее условию утверждения.

Утверждение 8. *Пусть* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in \mathfrak{M}_p$, *и для некоторого числа* i *из* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *выполнено* $a_i > 2(n-1)$. *Тогда* $A \cup \{2(n-1)\} \setminus \{a_i\} \in \mathfrak{M}_p$.

Доказательство. Согласно утверждению 7, существует такое дерево $\mathbf{D}$, что $J(\mathbf{D}) = A$, и если $\alpha \in \mathbf{D}$, $out(\alpha) = 1$, и из вершины α в вершину β ведет ребро, то $out(\beta) \leqslant 1$. Рассмотрим лист α такой, что $z_\alpha = a_i$, и обозначим путь от корня дерева $\mathbf{D}$ до α как $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k = \alpha)$. Тогда, в соответствии со свойством дерева $\mathbf{D}$, существует такое число s из $\{1, 2, \ldots, k\}$, что $out(\beta_1) > 1$, $out(\beta_2) > 1, \ldots, out(\beta_{s-1}) > 1$, $out(\beta_s) = out(\beta_{s+1}) = \cdots = out(\beta_{k-1}) = 1$, $out(\beta_k) = out(\alpha) = 0$.

Пусть x — количество вершин $\mathbf{D}$ с исходящей степенью 2, то есть вершин, из которых выходит 2 ребра, y — количество вершин $\mathbf{D}$ с исходящей степенью 3. Тогда верно соотношение $x + 2y = n - 1$. Это следует из того, что для $x = y = 0$ возможно только $n = 1$, при увеличении x на 1 n также увеличивается на 1, при увеличении y на 1 n увеличивается на 2, то есть соотношение $x + 2y = n - 1$ инвариантно относительно появления в дереве новых вершин степени 2 и 3. Также оно инвариантно относительно появления новых вершин степени 1, так как все три величины x, y, n при этом не меняются.

Имеем $z_{\beta_s} = \sum_{j=1}^{s-1} out(\beta_j) \leqslant 2x + 3y = 2(x + 2y) - y \leqslant 2(x + 2y) = 2(n-1)$. С другой стороны, $z_{\beta_k} = a_i > 2(n-1)$. Так как $out(\beta_s) = out(\beta_{s+1}) = \cdots = out(\beta_{k-1}) = 1$, то существует такое число t, что $s \leqslant t < k$ и $z_{\beta_t} = 2(n-1)$. Тогда, если удалить из дерева $\mathbf{D}$ вершины $\beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \ldots, \beta_k$, то получим дерево, реализующее $A \cup \{2(n-1)\} \setminus \{a_i\}$.

Утверждение 9. *Пусть* $A \in \mathfrak{M}_p$, $|A| = n$ *и мультимножество* $A' \in \mathfrak{M}^{so}$ *получено из* A *заменой всех элементов, превышающих* $2(n-1)$, *на* $2(n-1)$. *Тогда задача о реализуемости* A *сводится к задаче о реализуемости* A' *за* $O(n)$ *действий.*

Доказательство. Из утверждения 8 следует, что если A реализуемо, то A' также реализуемо. Так как A получается из A' увеличением элементов, то если A' реализуемо, то A также реализуемо. Таким образом, можно вместо задачи о реализуемости A рассматривать задачу о реализуемости A'.

По построению A' имеем $A' \in \mathfrak{M}^{so}$. Общее число действий при получении A' линейно зависит от n (фактически, не более n замен элементов из A). Следовательно, задача о реализуемости A сведена к задаче о реализуемости $A' \in \mathfrak{M}^{so}$ за $O(n)$ действий. Утверждение доказано.

Пусть дано дерево $\mathbf{D}$. Обозначим через $K_i(\mathbf{D})$ подмножество вершин $\mathbf{D}$ таких, что задержка сигнала до каждой из них равна i, то есть $K_i(\mathbf{D}) = \{\alpha \in \mathbf{D} \mid z_\alpha = i\}$. В частности, у любого дерева множество K_0 будет содержать только корень дерева.

Утверждение 10. *Пусть* $A=(k_0, k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}_p$, $k_i \geqslant 2$. *Тогда* $B = (k_0, k_1, \ldots, k_{i-2}, k_{i-1}+1, k_i-2, k_{i+1}, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}_p$.

Доказательство. Рассмотрим дерево $\mathbf{D}$, реализующее A. Так как $k_i \geqslant 2$, то существуют вершины $\alpha_1, \alpha_2 \in K_i(\mathbf{D})$, что α_1, α_2 — листья дерева. Разберем все возможные варианты комбинаций предков вершин из $K_i(\mathbf{D})$ (фактически, преобразований, примененных к вершинам из $K_i(\mathbf{D})$). Разобьем их на 3 случая.

1) Пусть существует вершина $\gamma \in K_i(\mathbf{D})$ такая, что при преобразованиях $\mathbf{D}$ к γ применялось преобразование G_i^1. В силу неразличимости вершин с одинаковыми задержками можно считать, что $\gamma = \alpha_1$. Рассмотрим полученное после преобразования G_i^1 дерево, и сравним реализуемое им мультимножество $A' = g_i^1(A)$ с мультимножеством B. Так как $A' = (k_0, k_1, \ldots, k_{i-2}, k_{i-1}+1, k_i-1, k_{i+1}, \ldots, k_m)$, $B = (k_0, k_1, \ldots, k_{i-2}, k_{i-1}+1, k_i-2, k_{i+1}, \ldots, k_m)$, то B получается из A' удалением элемента i, то есть получим, что B реализуемо.

2) Пусть существуют вершины $\gamma_1, \gamma_2 \in K_i(\mathbf{D})$ такие, что при преобразованиях $\mathbf{D}$ к γ_1, γ_2 применялось преобразование G_i^2. Снова в силу неразличимости вершин дерева с одинаковыми задержками можно считать, что $\gamma_1 = \alpha_1$, $\gamma_2 = \alpha_2$. Рассмотрим полученное после этого преобразования дерево, и сравним реализуемое им мультимножество $A' = g_i^2(A)$ с мультимножеством B. Так как $A' = (k_0, k_1, \ldots, k_{i-3}, k_{i-2}+1, k_{i-1}, k_i-2, k_{i+1}, \ldots, k_m)$, $B = (k_0, k_1, \ldots, k_{i-2}, k_{i-1}+1, k_i-2, k_{i+1}, \ldots, k_m)$, то B получается из A' увеличением элемента $i-2$ на 1, то есть получим, что B реализуемо.

3) Пусть ко всем $\gamma \in K_i(\mathbf{D})$ применялось преобразование G_i^3. Тогда $|K_{i-1}(\mathbf{D})| = 3 \cdot l$, $l \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует такая вершина $\alpha_3 \in K_i(\mathbf{D})$, что $\alpha_3 \neq \alpha_1$, $\alpha_3 \neq \alpha_2$ (возможно, α_3 имеет непустое поддерево; без ограничения общности мы будем считать, что α_3 — лист, так как в противном случае достаточно предварительно применить к поддереву α_3 все преобразования вершин и свести этот вариант к случаю, где α_3 — лист). В силу неразличимости

вершин с одинаковыми задержками можно считать, что к $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ было применено общее преобразование G_i^3. Обозначим $A' = g_i^3(A)$. Так как $A' = (k_0, k_1, \dots, k_{i-4}, k_{i-3} + 1, k_{i-2}, k_{i-1}, k_i - 3, k_{i+1}, \dots, k_m)$, $B = (k_0, k_1, \dots, k_{i-2}, k_{i-1} + 1, k_i - 2, k_{i+1}, \dots, k_m)$, то A' достижимо из B, так как $\{i-3\}$ получается из $\{i-1, i\}$ двумя преобразованиями g_i^1 и g_{i-1}^2 (рис. 5). Следовательно, B реализуемо.

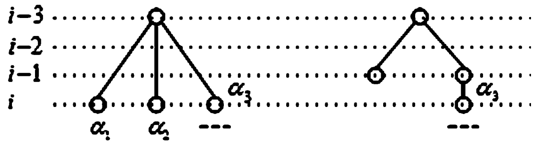

Рис. 5. Утверждение 10, случай 3. Фрагменты деревьев, реализующих A и B.

Таким образом, во всех вариантах B реализуемо, то есть утверждение доказано.

Утверждение 11. *Пусть* $A = (k_0, k_1, \dots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \dots, k_m) \in \mathfrak{M}_p$, $k_i \geqslant 5$. *Будем считать, что* $m \geqslant i+2$ *(этого можно добиться, приписав справа к вектору кратностей* A *некоторое число нулей). Тогда* $B = (k_0, k_1, \dots, k_{i-2}, k_{i-1} + 1, k_i - 5, k_{i+1}, k_{i+2} + 7, k_{i+3}, \dots, k_m) \in \mathfrak{M}_p$.

Доказательство. Рассмотрим дерево $\mathbf{D}$, реализующее A. Так как $k_i \geqslant 5$, то существуют вершины $\alpha_j \in K_i(\mathbf{D})$, $j = 1, \dots, 5$, что α_j — листья дерева. Разберем все возможные варианты комбинаций предков вершин из $K_i(\mathbf{D})$ (фактически, преобразований, примененных к вершинам из $K_i(\mathbf{D})$).

1) Пусть существует вершина $\gamma \in K_i(\mathbf{D})$ такая, что при преобразованиях $\mathbf{D}$ к γ применялось преобразование G_i^1. В силу неразличимости вершин с одинаковыми задержками можно считать, что $\gamma = \alpha_1$. Обозначим $A' = g_i^1(A) = (k_0, k_1, \dots, k_{i-2}, k_{i-1} + 1, k_i - 1, k_{i+1}, k_{i+2}, k_{i+3}, \dots, k_m)$. Рассмотрим $B' = (k_0, k_1, \dots, k_{i-2}, k_{i-1} + 1, k_i - 2, k_{i+1}, k_{i+2} + 1, k_{i+3}, \dots, k_m)$. Так как B' получается из A' увеличением i на 2, то оно реализуемо. Но B' достижимо из B тремя преобразованиями g_{i+2}^2 (рис. 6), то есть B также реализуемо.

2) Пусть существуют вершины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in K_i(\mathbf{D})$ такие, что при преобразованиях $\mathbf{D}$ к $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ применялось преобразование G_i^3. В силу неразличимости вершин с одинаковыми задержками можно считать, что $\gamma_j = \alpha_j$, $j = 1, 2, 3$. Обозначим $A' = g_i^3(A) =$

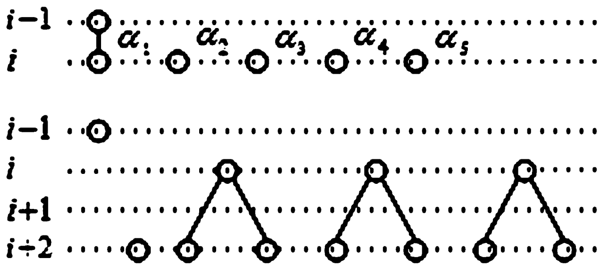

Рис. 6. Утверждение 11, случай 1. Фрагменты деревьев, реализующих A и B.

$(k_0, k_1, \ldots, k_{i-4}, k_{i-3}+1, k_{i-2}, k_{i-1}, k_i - 3, k_{i+1}, k_{i+2}, k_{i+3}, \ldots, k_m)$. Так как $A' = g_{i-1}^2(g_{i+2}^3(g_{i+2}^2(g_{i+2}^2(B))))$ (рис. 7), то B реализуемо.

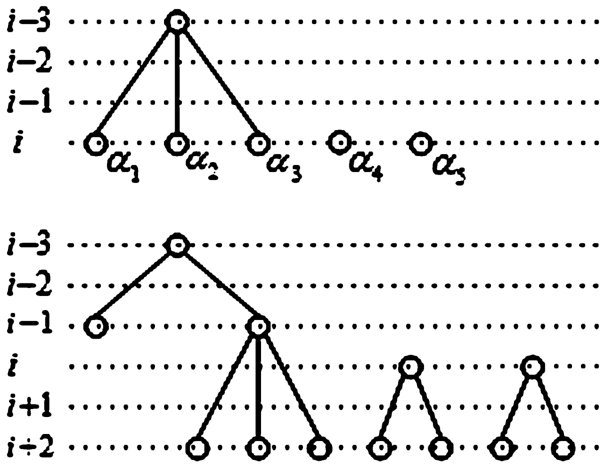

Рис. 7. Утверждение 11, случай 2. Фрагменты деревьев, реализующих A и B.

3) Пусть ко всем $\gamma \in K_i(\mathbf{D})$ применялось преобразование G_i^2. Тогда $|K_i(\mathbf{D})| = 2 \cdot l, l \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует такая вершина $\alpha_6 \in K_i(\mathbf{D})$, что $\alpha_6 \neq \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, 5$ (возможно, α_6 имеет непустое поддерево; без ограничения общности мы будем считать, что α_6 — лист, так как в противном случае достаточно предварительно применить к поддереву α_6 все преобразования вершин и свести этот вариант к случаю, где α_6 — лист). Тогда можно счи-

тать, что к $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ были применены 3 преобразования G_i^2. Обозначим полученные в результате этих преобразований три вершины из $K_{i-2}(\mathbf{D})$ как $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, а также положим $A'' = ((g_i^2)^3)(A) = (k_0, k_1, \ldots, k_{i-3}, k_{i-2}+3, k_{i-1}, k_i-6, k_{i+1}, k_{i+2}, k_{i+3}, \ldots, k_m)$. Здесь необходимо рассмотреть все варианты комбинаций предков вершин из $K_{i-2}(\mathbf{D})$ (фактически, преобразований, примененных к вершинам из $K_{i-2}(\mathbf{D})$).

3a) Пусть существует вершина $\delta \in K_{i-2}(\mathbf{D})$ такая, что при преобразованиях $\mathbf{D}$ к δ применялось преобразование G_{i-2}^1. В силу неразличимости вершин с одинаковыми задержками можно считать, что $\delta = \gamma_1$. Обозначим $A' = g_{i-2}^1(A'') = (k_0, k_1, \ldots, k_{i-4}, k_{i-3}+1, k_{i-2}+2, k_{i-1}, k_i - 6, k_{i+1}, k_{i+2}, k_{i+3}, \ldots, k_m)$. Рассмотрим $B' = (k_0, k_1, \ldots, k_{i-4}, k_{i-3}+1, k_{i-2}+1, k_{i-1}, k_i - 5, k_{i+1}, k_{i+2}, k_{i+3}, \ldots, k_m)$. Так как B' получается из A' увеличением $i-2$ на 2, то оно реализуемо. Но $B' = g_{i-1}^2(g_i^2(g_{i+2}^3(g_{i+2}^2(g_{i+2}^2(B)))))$ (рис. 8), то есть B также реализуемо.

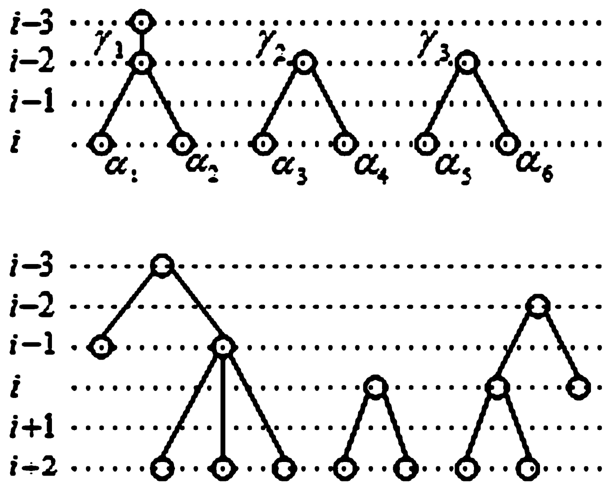

Рис. 8. Утверждение 11, случай 3a. Фрагменты деревьев, реализующих A и B.

3b) Пусть существуют вершины $\delta_1, \delta_2, \in K_{i-2}(\mathbf{D})$ такие, что при преобразованиях $\mathbf{D}$ к δ_1, δ_2 применялось преобразование G_{i-2}^2. В силу неразличимости вершин с одинаковыми задержками можно считать, что $\delta_j = \gamma_j$, $j = 1, 2$. Обозначим $A' = g_{i-2}^2(A'') = (k_0, k_1, \ldots,$

$k_{i-5}, k_{i-4}+1, k_{i-3}, k_{i-2}+1, k_{i-1}, k_i-6, k_{i+1}, k_{i+2}, k_{i+3}, \ldots, k_m)$. Так как $A' = g^3_{i-1}(g^2_i(g^1_i(g^3_{i+2}(g^2_{i+2}(g^2_{i+2}(B))))))$ (рис. 9), то B реализуемо.

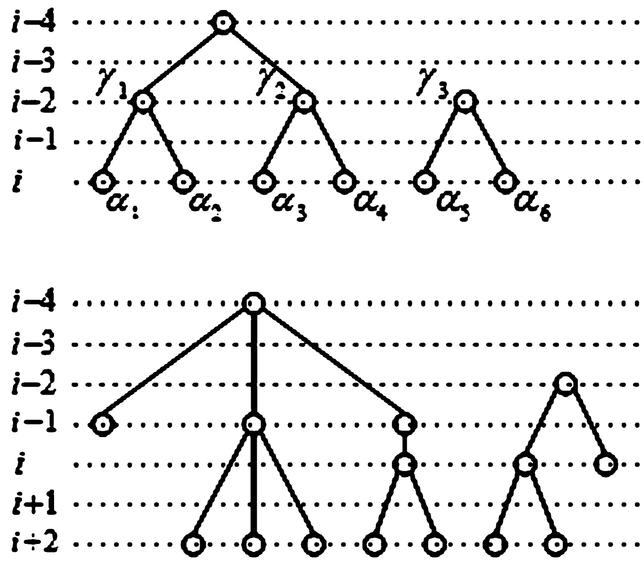

Рис. 9. Утверждение 11, случай 3b. Фрагменты деревьев, реализующих A и B.

3c) Пусть ко всем $\delta \in K_{i-2}(\mathbf{D})$ применялось преобразование G^3_{i-2}. В силу неразличимости вершин с одинаковыми задержками можно считать, что к $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ было применено одно преобразование G^3_{i-2}. Обозначим $A' = g^3_{i-2}(A'') = (k_0, k_1, \ldots, k_{i-6}, k_{i-5}+1, k_{i-4}, k_{i-3}, k_{i-2}, k_{i-1}, k_i - 6, k_{i+1}, k_{i+2}, k_{i+3}, \ldots, k_m)$. Так как $A' = g^2_{i-3}(g^2_{i-1}(g^3_i(g^3_{i+2}(g^2_{i+2}(g^2_{i+2}(B))))))$ (рис. 10), то B реализуемо.

Таким образом, во всех вариантах B реализуемо.

Утверждение 12. *Пусть* $A = (k_0, k_1, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}_p$, $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $k_i \geqslant 10$. *Тогда* $A' = (k_0, k_1, \ldots, k_{i-4}, k_{i-3}+1, k_{i-2}, k_{i-1}, k_i - 3, k_{i+1}, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}_p$.

Доказательство. Пусть дерево $\mathbf{D}$ реализует A. Так как $k_i \geqslant 10$, то существуют листья $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10} \in K_i(\mathbf{D})$. Рассмотрим все допустимые преобразования $K_i(\mathbf{D})$ и покажем, что во всех случаях можно перестроить дерево так, что к $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ будет применено преобра-

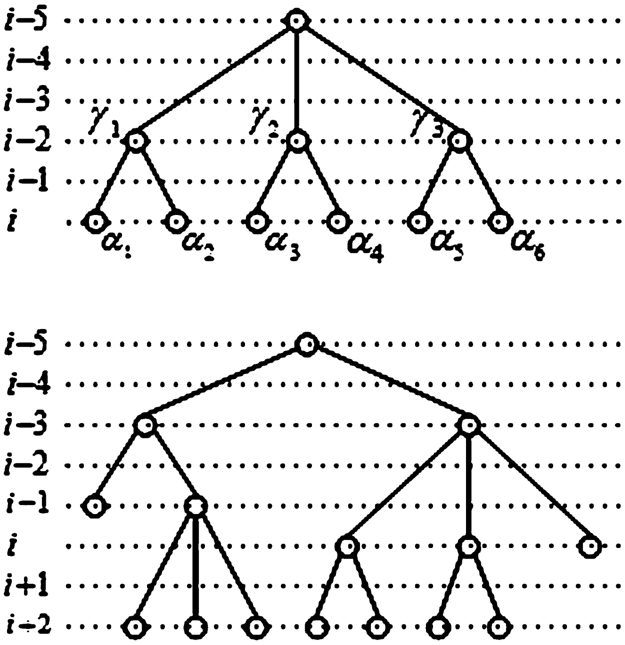

Рис. 10. Утверждение 11, случай 3с. Фрагменты деревьев, реализующих A и B.

зование G_i^3, и тогда $A' = (k_0, k_1, \ldots, k_{i-4}, k_{i-3} + 1, k_{i-2}, k_{i-1}, k_i - 3, k_{i+1}, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}_p$.

1) Пусть существуют листья $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in K_i(\mathbf{D})$, к которым было применено преобразование G_i^3. Тогда можно считать, что $\gamma_j = \alpha_j,\ j = 1, 2, 3$, то есть A' реализуемо.

2) Пусть ко всем вершинам из $K_i(\mathbf{D})$ применялись преобразования G_i^1 и G_i^2. Воспользуемся результатами утверждений 10 и 11.

Пусть количество вершин, к которым применялись преобразования G_i^1, не меньше 2. В силу неразличимости вершин с одинаковыми задержками можно считать, что две такие вершины — листья дерева. Перестроим дерево преобразованием G_i^2 к этим двум листьям, и обозначим полученное дерево как $\mathbf{D}'$. По утверждению 10, мультимножество $J(\mathbf{D}')$ будет реализуемо. Таким образом, рассмотрение двух преобразований G_i^1 сводится к рассмотрению одного преобразования G_i^2. Применяя эти рассуждения многократно, получим, что кол-во вершин, к которым применялось преобразование G_i^1, не превосходит 1.

Следовательно, количество вершин, к которым применялось преобразование G_i^2, равняется $|K_i(\mathbf{D})| - (|K_i(\mathbf{D})| \mod 2) \geqslant 10$, так как $|K_i(\mathbf{D})| \geqslant k_i \geqslant 10$. В силу неразличимости вершин с одинаковыми задержками можно считать, что по крайней мере 10 из этих вершин являются листьями. Рассмотрим мультимножество $A' = (g_i^2)^5(A)$, полученное после применения преобразований к этим 10 листьям. Оно будет иметь вектор кратностей $(k_0, k_1, \ldots, k_{i-3}, k_{i-2}+5, k_{i-1}, k_i - 10, k_{i+1}, \ldots, k_m)$. Но тогда, согласно утверждению 11, мультимножество $A'' = (k_0, k_1, \ldots, k_{i-4}, k_{i-3}+1, k_{i-2}, k_{i-1}, k_i - 3, k_{i+1}, \ldots, k_m)$ будет реализуемо. Утверждение доказано.

Обозначим $\mathfrak{M}^{oo} = \{A = (k_0, k_1, \ldots, k_m) \mid A \in \mathfrak{M},\ k_i \leqslant 9,\ i = 0, 1, \ldots, m\}$.

Утверждение 13. *Пусть $A \in \mathfrak{M}^{so}$, $|A| = n$. Тогда существует алгоритм, который за $O(n)$ действий либо сводит задачу о реализуемости A к задаче о реализуемости некоторого мультимножества $A' \in \mathfrak{M}^{oo}$, либо определяет, что A' не реализуемо.*

Доказательство. Пусть $m = M(A)$. Составим следующий алгоритм.

Шаг 1. Положить $i = m$.

Шаг 2. Сравнить k_i и 10. Если $k_i \geqslant 10$ и $i < 3$, сообщить, что A не реализуемо, и завершить работу. Если $k_i \geqslant 10$ и $i \geqslant 3$, положить $k_i = k_i - 3, k_{i-3} = k_{i-3} + 1$ и повторить шаг 2. Если $k_i < 10$, положить $i = i - 1$ и перейти к шагу 3.

Шаг 3. Если $i < 0$, завершить работу, иначе перейти к шагу 2.

Преобразования A на шаге 2 есть $g_i^3(A)$. Так как они совершается при $i \geqslant 3$, то они являются допустимыми. При этом после работы алгоритма, если выход был осуществлен на шаге 3, то для любого $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ $k_i < 10$, то есть если обозначить за A' мультимножество, полученное из A после всех преобразований, имеем $A' \in \mathfrak{M}^{oo}$.

Для доказательства утверждения осталось показать следующее:

1) Вывод о нереализуемости A происходит, когда A не реализуемо.

2) Если A реализуемо и совершается преобразование $g_i^3(A)$, то полученное мультимножество также является реализуемым.

3) Суммарное количество выполненных шагов линейно зависит от n.

Покажем сперва 2) — это непосредственно следует из утверждения 12 и условий, при которых преобразование совершается на шаге 2 алгоритма.

Для того, чтобы показать 1), достаточно заметить, что если $k_i \geqslant 10$ при $k \leqslant 2$, то $S(A) \geqslant 10 \cdot h(i) \geqslant 10/2 = 5 > 1$, откуда по утверждению 4 A не реализуемо.

3) Оценим количество выполненных действий. Шаг 1 выполняется 1 раз за все время работы алгоритма. При каждом выполнении шага 2, не завершающем работу алгоритма, происходит одно из двух действий: либо i уменьшается на 1, либо выполняется преобразование $g_i^3(A)$, то есть $|A|$ уменьшается на 2. Так как $A \in \mathfrak{M}^{so}$, то количество уменьшений i не превосходит $m+1 \leqslant 2n-2+1 = 2n-1$. Количество уменьшений $|A|$ на 2 не превосходит $|A|/2 = n/2$. Одно выполнение шага 2 могло стать финальным перед завершением работы. Шаг 3 выполняется столько же раз, сколько происходило уменьшение i на шаге 2.

Следовательно, суммарное количество выполненных шагов не превосходит $1 + 2n - 1 + n/2 + 1 + 2n - 1 = 9n/2 = O(n)$. Учитывая, что время выполнения каждого шага занимает константное время, получим, что суммарное время работы алгоритма есть $O(n)$. Утверждение доказано.

Алгоритм, описанный в ходе доказательства утверждения 13, в дальнейшем будем называть *алгоритмом спуска по 3*.

Произвольное допустимое преобразование мультимножества $G = g_{i_1}^{j_1} \cdot g_{i_2}^{j_2} \cdot \dots \cdot g_{i_l}^{j_l}$, где $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_l$, для любых $i \in \{i_1, i_1+1, \dots, i_l\}$ оператор g_i^1 встречался не более 1 раз, а оператор g_i^2 — не более четырех раз, будем называть *почти троичным преобразованием*. Из утверждений 11 и 12 следует, что для решения задачи о реализуемости достаточно рассматривать почти троичные преобразования мультимножеств.

Пусть $A \in \mathfrak{M}^{oo}$. Определим множество $\mathfrak{L}_p(A) = \{A' \in \mathfrak{M} \mid M(A') \leqslant p$ и существует почти троичное преобразование $G = g_{i_1}^{j_1} \cdot g_{i_2}^{j_2} \cdot \dots \cdot g_{i_l}^{j_l}$, где $p < i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_l$, такое, что $A' = g_{i_1}^{j_1}(g_{i_2}^{j_2}(\dots g_{i_l}^{j_l}(A)\dots))\}$.

Рассмотрим произвольное $A' = (k'_0, k'_1, \dots, k'_p) \in \mathfrak{L}_p(A)$. В силу того, что в цепочке преобразований $g_{i_1}^{j_1}, g_{i_2}^{j_2}, \dots, g_{i_l}^{j_l}$, преобразующей A в A', для любого $s \in \{1, 2, \dots, l\}$ выполнено $i_s > p,\ j_s \in \{1, 2, 3\}$, получим, что $k'_q = k_q$ при $q = 0, 1, \dots, p-3$, $k'_q \geqslant k_q$ при $q = p-2, p-1, p$. Таким образом, для кодирования мультимножеств из $\mathfrak{L}_p(A)$ достаточно знать 3 числа $(k'_p - k_p, k'_{p-1} - k_{p-1}, k'_{p-2} - k_{p-2})$. Для фиксированного

A' будем обозначать эти числа соответственно как $K(A') = (a, b, c)$. Для удобства вместо $A' \in \mathfrak{L}_p(A)$ нередко будем применять запись $(a, b, c) \in \mathfrak{L}_p(A)$.

По определению, $\mathfrak{L}_{M(A)}(A) = \{(0, 0, \dots, 0)\}$.

Если $(a, 0, 0) \in \mathfrak{L}_0(A)$, $a + k_0 = 1$, то $A \in \mathfrak{M}_p$ (так как получим, что E достижимо из A). При этом верно обратное (из определения $\mathfrak{L}_0(A)$). Таким образом, задачу о реализуемости мультимножества A можно решать путем нахождения множеств $\mathfrak{L}_p(A)$, $0 \leqslant p \leqslant m = M(A)$, и проверки множества $\mathfrak{L}_0(A)$ на наличие вектора $(a, 0, 0)$.

Рассмотрим $A' \in \mathfrak{L}_p(A)$, $p = 0, 1, \dots, m-1$, и пусть $A' = g_{i_1}^{j_1}(g_{i_2}^{j_2}(\dots g_{i_l}^{j_l}(A)\dots))$. Тогда возможны два варианта: либо $i_1 > p+1$, либо существует такое s, что $i_s = p+1, i_{s+1} > p+1$. В первом случае $A' \in \mathfrak{L}_{p+1}(A)$, во втором $g_{i_{s+1}}^{j_{s+1}}(\dots g_{i_l}^{j_l}(A)\dots) \in \mathfrak{L}_{p+1}(A)$. Таким образом, элементы $\mathfrak{L}_p(A)$ получаются из элементов $\mathfrak{L}_{p+1}(A)$ соответствующими преобразованиями. Следовательно, для получения $\mathfrak{L}_p(A)$ достаточно, имея $\mathfrak{L}_{p+1}(A)$, перебрать почти троичные преобразования g_{p+1}^j всех элементов, равных $p+1$, принадлежащих мультимножествам из $\mathfrak{L}_{p+1}(A)$.

Утверждение 14. *Пусть $A = (k_0, k_1, \dots, k_m) \in \mathfrak{M}^{oo}$. Если для $p > 0$ имеется $\mathfrak{L}_p(A)$, то существует способ выполнить построение $\mathfrak{L}_{p-1}(A)$ за $O(|\mathfrak{L}_p(A)|)$ действий.*

Доказательство. Положим $\mathfrak{L}_{p-1}(A) = \varnothing$. Затем рассмотрим все $A' \in \mathfrak{L}_p(A)$ (то есть соответствующие тройки (a, b, c)) — получится $|\mathfrak{L}_p(A)|$ троек. Покажем, как каждую тройку обработать за $O(1)$.

Рассмотрим почти троичные преобразования элементов A', равных p (таких элементов будет $k'_p = k_p + a$). По определению почти троичных преобразований $G = (g_p^{j_1}, g_p^{j_2}, \dots, g_p^{j_l})$, количество преобразований g_p^2 не будет превосходить 4, а количество g_p^1 не будет превосходить 1. Если перебрать количество преобразований g_p^2 (от 0 до 4) (обозначим его как t), то количество g_p^1 однозначно определится из остатка от деления $k'_p - 2 \cdot t$ на 3. Если этот остаток равен 0 или 1, получим 0 или 1 преобразование g_p^1, то есть количество g_p^1 и g_p^3 определится однозначно, если же остаток равен 2, рассматриваемый вариант не соответствует почти троичному преобразованию. Таким образом, количество рассмотренных вариантов не превзойдет количества рассмотренных значений t, то есть получим не более 5 вариантов, или $O(1)$. В каждом варианте результирующую тройку (a', b', c') для мультимножества из $\mathfrak{L}_{p-1}(A)$ легко получить из количеств преобразований g_p^1, g_p^2, g_p^3 (v_1, v_2, v_3 соответственно) — достаточно положить $a' = b + v_1$, $b' = c + v_2$, $c' = v_3$. Выполняя при этом объединение $\mathfrak{L}_{p-1}(A) = \mathfrak{L}_{p-1}(A) \cup \{(a', b', c')\}$, получим в итоге построение $\mathfrak{L}_{p-1}(A)$ за $O(|\mathfrak{L}_p(A)|)$.

Утверждение 15. *Пусть* $A = (k_0, k_1, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}^{oo}$, $M(A) = m$. *Тогда для любого* $p \in \{0, 1, \ldots, m\}$ *выполнено* $|\mathfrak{L}_p(A)| \leqslant 924$.

Доказательство. Покажем по индукции, что для любого числа $p \in \{0, 1, \ldots, m\}$ и любого мультимножества $A' \in \mathfrak{L}_p(A)$, где $K(A') = (a, b, c)$, выполнено $a \leqslant 11$, $b \leqslant 10$, $c \leqslant 6$. Тогда получим $|\mathfrak{L}_p(A)| \leqslant (11 + 1) \cdot (10 + 1) \cdot (6 + 1) = 924$.

1) Для $p = m$ имеем $\mathfrak{L}_m(A) = \{(0, 0, 0)\}$, то есть $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$, $c \leqslant 0$, следовательно $a \leqslant 11$, $b \leqslant 10$, $c \leqslant 6$.

2) Пусть для $p > 0$ утверждение верно. Рассмотрим процедуру получения $\mathfrak{L}_{p-1}(A)$ из $\mathfrak{L}_p(A)$ и покажем, что для $p - 1$ утверждение также будет верно. Рассмотрим произвольное $A' = (k'_0, k'_1, \ldots, k'_p) \in \mathfrak{L}_p(A)$, $K(A') = (a, b, c)$. Так как $A \in \mathfrak{M}^{oo}$, то $k_p \leqslant 9$, откуда $k'_p = k_p + a \leqslant 9 + 11 = 20$. Рассмотрим все почти троичные преобразования этих k'_p элементов. Обозначим количества g_p^1, g_p^2, g_p^3 в преобразовании как v_1, v_2, v_3 соответственно. Тогда имеем $v_1 \leqslant 1$, $v_2 \leqslant 4$, $v_3 \leqslant k'_p/3 \leqslant 20/3$, то есть $v_3 \leqslant 6$. По формулам пересчета для полученного после преобразования мультимножества $A'' \in \mathfrak{L}_{p-1}(A)$, $K(A'') = (a_1, b_1, c_1)$, получим $a_1 = b + v_1 \leqslant 10 + 1 = 11$, $b_1 = c + v_2 \leqslant 6 + 4 = 10$, $c_1 = v_3 \leqslant 6$. Следовательно, для любого $A'' \in \mathfrak{L}_{p-1}(A)$, $K(A'') = (a_1, b_1, c_1)$ получим $a_1 \leqslant 11$, $b_1 \leqslant 10$, $c_1 \leqslant 6$.

Утверждение 16. *Пусть* $A = (k_0, k_1, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}^{oo}$, $M(A) = m$, *тогда задача о реализуемости* A *решается за* $O(m)$ *действий.*

Доказательство. Будем использовать следующий алгоритм. Построим $\mathfrak{L}_m(A), \mathfrak{L}_{m-1}(A), \ldots, \mathfrak{L}_0(A)$ и проверим, существует ли тройка $(a, 0, 0) \in \mathfrak{L}_0(A)$ такая, что $a + k_0 = 1$, ответ на этот вопрос и будет ответом на задачу о реализуемости A.

Построение $\mathfrak{L}_m(A)$ требует $O(1)$ действий.

Для любого $p = m, m - 1, \ldots, 1$ построение $\mathfrak{L}_{p-1}(A)$ из $\mathfrak{L}_p(A)$, требует $O(1)$ действий, так как по утверждению 15 имеем $|\mathfrak{L}_p(A)| \leqslant$

$924 = O(1)$, и на построение $\mathfrak{L}_{p-1}(A)$ согласно утверждению 14 будет затрачено $O(|\mathfrak{L}_p(A)|) = O(1)$ действий.

Тогда на построение всех множеств $\mathfrak{L}_p(A), p = m, m-1, \dots, 0$ будет потрачено $O(m)$ действий.

Финальная проверка существования тройки требует просмотр всех элементов $\mathfrak{L}_0(A)$, то есть $O(1)$ действий.

Таким образом, общее время работы алгоритма есть $O(m)$.

Доказательство теоремы 2. Будем использовать следующий алгоритм.

Шаг 1. Согласно утверждению 9, сведем задачу о реализуемости A к задаче о реализуемости $A' \in \mathfrak{M}^{so}$ за $O(n)$ действий. Для удобства положим $A = A'$.

Шаг 2. Если $A \notin \mathfrak{M}^{oo}$, применим к A алгоритм спуска по 3. Согласно утверждению 13, на этом шаге за время $O(n)$ получим, что либо A не реализуемо, либо получим мультимножество $A' \in \mathfrak{M}^{oo}$. Задача о реализуемости A сведена к задаче о реализуемости A'. Для удобства положим теперь $A = A'$.

Шаг 3. Применяя результаты утверждения 16, используя множества $\mathfrak{L}_p(A)$, решим задачу о реализуемости A за $O(M(A))$. При этом вследствие выполнения шага 1 верно соотношение $M(A) \leqslant 2(n-1) = O(n)$. Таким образом, время выполнения данного шага также есть $O(n)$.

Таким образом, суммарное время работы алгоритма есть $O(n)$, и теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] Sherwani N. A. Algorithms for VLSI Physical Design Automation. — Kluwer Academic Publishers, 2002.

[2] Гасанов Э. Э., Проворова А. Л. О синтезе синхронизирующих деревьев // Материалы IX Международной конференции «Интеллектуальные системы и компьютерные науки» (23–27 октября 2006 г.) Т. 1, часть 1. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2006. — С. 89–92.

[3] Гасанов Э. Э., Дин А. А. Построение синхронизирующих деревьев // Интеллектуальные системы. — 2013. Т. 17, вып. 1–4. — С. 293–297.

[4] Pavisic I., Lu A., Zolotykh A. A., Gasanov E. E. Method in integrating clock tree synthesis and timing optimization for an integrated circuit design. US Patent: 6,550,044. — April 15, 2003.

[5] Lu A., Pavisic I., Zolotykh A. A., Gasanov E. E. Changing clock delays in an integrated circuit for skew optimization. US Patent: 6,550,045. — April 15, 2003.