Сравнение формализмов знаний

К. И. Костенко

Доказана система соотношений для формализмов знаний, составляющх фрагмент семейства признанных подходов к форматам описания знаний в интеллектуальных системах.

Ключевые слова: формализм представления знаний, семантическая структура, алгебраическая структура, семантическое вложение.

1. Формализмы знаний

Формальные системы, реализующие описание отдельных областей знаний будем называть формализмами знаний (кратко — формализмами). В них моделирются сущности, относящиеся к представлению и обработке знаний. Формализмы составляют развиваемое семейство подходов, основанных на разнообразных схемах задания знаний. Опыт практического применения формализмов поддерживает точку зрения об объективной неизбежности такого разнообразия. Потребность исследования разнородного многообразия предложенных и возможных подходов к представлению знаний делает необходимым создание системы универсальных инвариантов, уточняющих концепцию формализма знаний.

Определение 1. Формализмом знаний называется четвёрка $\Im = (M_\Im, D_{M_\Im}, \circ, \subseteq)$, где $M_\Im$ и $D_{M_\Im}$ — разрешимые множества, для которых $\circ : D_{M_\Im} \times D_{M_\Im} \to D_{M_\Im}$ — вычислимая операция композиции, а $\subseteq$ — разрешимое отношение вложения на $D_{M_\Im}$.

Здесь $M_\Im$ является подмножеством $D_{M_\Im}$ и содержит пустой элемент Λ.

Определение 2. Формализм $\Re$ алгебраически вкладывается в формализм $\Im$ ($\Re \sqsubseteq_A \Im$), если существует такое вычислимое инъективное отображение $\xi : D_{M_\Re} \to D_{M_\Im}$, что

$$\forall C_1, C_2 \in D_{M_\Re}(\xi(C_1 \circ C_2) = \xi(C_1) \circ \xi(C_2)).$$

Определение 3. Формализм $\Re$ семантически вкладывается в формализм $\Im$ ($\Re \sqsubseteq_S \Im$), если существует такое вычислимое инъективное отображение $\xi : D_{M_\Re} \to D_{M_\Im}$, что

$$\forall C_1, C_2 \in D_{M_\Re}(C_1 \subseteq C_2 \to \xi(C_1) \subseteq \xi(C_2)).$$

Определение 4. Формализм $\Re$ вкладывается в формализм $\Im$ ($\Re \sqsubseteq \Im$), если существует такое вычислимое инъективное отображение $\xi : D_{M_\Re} \to D_{M_\Im}$, для которого $\Re \sqsubseteq_A \Im$ и $\Re \sqsubseteq_S \Im$.

Произвольные формализмы $\Im_1$ и $\Im_2$ называются эквивалентными, если $\Im_1 \sqsubseteq \Im_2$ и $\Im_2 \sqsubseteq \Im_1$. Эквивалентность формализмов $\Im_1$ и $\Im_2$ обозначается в виде $\Im_1 \equiv \Im_2$. Если элементами $D_{M_\Im}$ являются множества, а $\circ$ и $\subseteq$ составляют объединение и вложение множеств, то $\Im$ называется теоретико-множественным формализмом. Для таких формализмов понятия алгебраического и семантического вложения равносильны. Примеры формализмов, для которых имеет место только алгебраическое или семантическое вложение, приведены в [1].

2. Специальные формализмы знаний

Определим формализмы для: атомарных продукционных систем (APS), образовательных пространств (LS) [2], баз знаний в дескрипционной логике (ALC) [3], абстрактных пространств знаний (AKS) [4], иерархических семантических сетей (SN) [5]. Сложность развёртывания требуемой системы определений связана с необходимостью уточнения унифицированных инвариантов фрагмента знаний, семантической и алгебраической структуры для внешне разных подходов к представлению знаний. Концепты фрагмента, композиции и вложения в перечисленнных выше и других известных формализмах нередко представлены неявно и допускают разные способы уточнения.

2.1. Атомарные продукционные системы APS

Формализм атомарных продукционных систем является элементом семейства моделей представлений знаний, основанных на правилах. Отдельные продукции формализма APS задаются выражениями вида $\pi = \dfrac{t_1, \ldots, t_k}{t_{k+1}}$, где $t_1, \ldots, t_k$ — посылки, а t_{k+1} — заключение продукции π. Посылками и заключениями продукций являются элементы бесконечного разрешимого множества атомов $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Если $k = 0$, то π называется аксиомой. Такая продукция представляется как $\dfrac{\quad}{t_{k+1}}$.

Интерпретация отдельных продукций связана с истинностью атомов. Заключение продукции, все посылки которой истинные, объявляется истинным. Фрагменты продукций получаются из отдельных продукций удалением элементов из семейств посылок и заключений. В частности, фрагментами продукций являются подмножества множеств посылок. Для продукций π_1 и π_2 имеет место вложение, если множества посылок и заключений π_1 вложены в аналогичные множества в π_2. Композицию элементов $D_{M_{APS}}$ определяет схема:

$$x \circ y = \begin{cases} \dfrac{C}{a}, \text{ если } x = \dfrac{A}{a}, y = \dfrac{B}{a} \text{ и } C = A \cup B \\ \Lambda, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

2.2. Образовательные пространства LS

Формализм образовательных пространств был разработан для исследования процессов адаптивного обучения [2]. Отдельные системы знаний в LS задаются тройками (Q, K, σ), где $Q = \{q_1, q_2, \ldots\}$ — бесконечное разрешимое множество элементарных знаний, K — это семейство возможных состояний пространства знаний, представляемых всеми конечными подмножествами множества Q, а $\sigma : Q \to 2^K$ — вычислимое отображение, которое ставит в соответствие каждому элементу $a \in Q$ конечное подмножество K. Отображение σ представляется парами $(a, \sigma(a))$. Фрагментами Q и K являются конечные подмножества этих множеств. Фрагментами $\sigma(a)$, где $a \in Q$, являются произвольные конечные семейства множеств, каждое из которых является подмножеством некоторого множества из $\sigma(a)$. Композиция в LS реализуется объединением однотипных объектов. Результатом композиции фрагментов знаний разных типов является пустой объект Λ. Композиция $x \circ y$, где $x = (a, \sigma(a))$ и $y = (b, \sigma(b))$ определяется с помощью схемы:

$$x \circ y = \begin{cases} x \cup y, & \text{если } a = b \\ \Lambda, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Здесь $x \cup y$ обозначает объединение семейств множеств x и y. Вложения элементов $D_{M_{LS}}$ определяются вложениями множеств, составляющих K, и вложениями конечных семейств таких множеств (каждое множество первого семейства является подмножеством некоторого множества второго семейства).

2.3. Базы знаний в дескрипционной логике ALC

Язык ALC составляют конструкты класса (множества неделимых объектов или атомов) и бинарного отношения на множестве атомов (роли). Бесконечное множество $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ — атомов ALC является разрешимым. Классы в ALC образуют семейство всех конечных подмножеств множества E. Отношения в ALC составляют семейство всех конечных отношений на E. Также используются сравнения классов и ролей (вложение, эквивалентность и дизъюнктность), операции над классами (объединение, пересечение и дополнение). Специальные операции связаны с проекциями ролей, основанных на конструктах кванторов всеобщности и существования [3]. На множестве классов можно определить однозначную вычислимую нумерацию ηC, для которой вычислим функционал $fC : N \to N$, задаваемый как: $\forall i \in N(fC(i) =\mid \eta C(i) \mid)$. Для отношений в ALC существует аналогичная нумерация ηR и вычислимый функционал $fR : N \to N$, где $\forall i \in N(fR(i) =\mid \eta R(i) \mid)$. Дополнительный вид знаний в ALC составляют формулы. Простейшими формулами являются выражения, составленные именами классов и отношений. Множества таких имён $NC = \{c_1, \ldots, c_i, \ldots\}$ и $NR = \{r_1, \ldots, r_i, \ldots\}$ — бесконечные и разрешимые. Остальные формулы имеют вид $(C_1 \cup C_2)$, $(C_1 \cap C_2)$, $(C_1 \backslash C_2)$, $\exists R.C$ и $\forall R.C$. Здесь C_1 и C_2 — имена классов, формулы определений классов или пустой объект Λ, а R отношение (роль) или Λ. Принадлежность элементов классам задают аналогичные формулы aC и $(a,\, b)R$, где $a,\, b \in E$, $C \in NC$, $R \in NR$ или Λ.

Формулы, определяющие отношения между классами, имеют вид $C_1 \subset C_2$, $C_1 \subseteq C_2$ или $C_1 \equiv C_2$. Фрагментами классов и ролей в ALC являются их подмножества. Фрагментами формул являются подформулы, а также дополнения подформул до записей формул, задающих определения классов, одного из видов $(x)y$, где x — это формула, а y — символ теоретико-множественной операции или сравнения, а также $\exists R.$ или $\forall R.$, где R — некоторая роль. Вложения классов и отношений для ALC имеют место, если выполняется вложение соответствующих множеств. Формула U_1 вложена в формулу U_2, если $U_1 = U_2$ или $U_2 = V_1 \bullet V_2$ и U_1 вложена в V_1 или в V_2, или $U_1 = W_1 \bullet W_2$, $U_2 = V_1 \bullet V_2$, и $\bullet = \circ$, а W_1 вложена в V_1 и W_2 вложена в V_2.

Определим композицию в ALC :

$$x \circ y = \begin{cases} x \cup y, \text{ если } x \text{ и } y \text{ это классы} \\ x \cup y, \text{ если } x \text{ и } y \text{ это роли} \\ xy, \text{если } x \text{ — формула определения класса,} \\ \hfill \text{а } y \in \{\cup, \cap, \setminus, \equiv, \subset, \subseteq\} \\ xy, \text{если } y \text{ — формула определения класса,} \\ \hfill \text{а } x \in \{\exists R., \forall R.\} \text{ , где } R \text{ — имя роли} \\ xy, \text{ если } xy, y \text{ — формулы, а } x \text{ — дополнение } y \text{ до } xy \\ c(x,y), \text{ если } x, y, c(x,y) \text{ — формулы} \\ \Lambda, \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Здесь предпоследнее соотношение определяет композицию формул x и y, где значение $c(x, y)$ существует, если разметки одновременно внутренних вершин в структурных представлениях x и y равны и всякая висячая вершина одного структурного представления, которая является внутренней в другой структуре, размечена значениям Λ. Если приведённое условие выполнено, то значение $c(x, y)$ конструируется с помощью правил:

1) разметка всякой внутренней вершины $c(x, y)$ совпадает с разметкой аналогичной внутренней вершины x или y;
2) висячая вершина структуры $c(x, y)$, которая висячая в x и y, размечена значением, отличным от Λ, этой же вершины в x или y, или равна Λ, если разметки данной вершины в x и y равны Λ;

3) вершины структуры $c(x, y)$, входящие лишь в одну из структур x или y размечены так же как и в такой структуре.

2.4. Абстрактные пространства знаний AKS

Основу абстрактных пространств знаний составляют бесконечные разрешимые множества конфигураций. Структурное представление всякой конфигурации имеет вид нагруженного бинарного дерева, листьям которого соответствуют неделимые (элементарные) конфигурации, а внутренние вершины размечены отношениями между конфигурациями представляемыми левым и правым поддеревьями таких вершин. Множество отношений R_{AKS} — разрешимое. Структурные представления элементарных конфигураций являются одновершинными. Множество элементарных конфигураций M_0 бесконечное и разрешимое. Каждая пара конфигураций принадлежит бесконечному множеству разрешимых отношений. Вложения конфигураций связаны с существованием o-трассирований вершин их полных структурных представлений, для которых разметки вершин оказываются сравнимыми [4]. Разрешимое множество $D_{M_{AKS}}$ составляют конфигурации, разрешимые отношения между конфигурациями и разрешимые подмножества таких отношений. Остальные элементы $D_{M_{AKS}}$ составляют пары (x, r), где $x \in M_{AKS}$, а $r \in R_{AKS}$. В частности, фрагмент неэлементарной конфигурации z составляет корневая вершина структуры z, связанная с поддеревом для левого потомка этой вершины. Обозначим неэлементарную конфигурацию как (x, r, y), где r отношение, приписанное корню, а x и y — конфигурации, представляемые левым и правым поддеревьями корневой вершины. Полные структурные представления конфигураций аналогичны структурам формата RDF. Определим операцию композиции на $D_{M_{AKS}}$:

$$x \circ y = \begin{cases} x \cup y, \text{ если } x \text{ и } y \text{ это фрагменты отношений из } R_{AKS} \\ (x, y), \text{ если } x \in M_{AKS},\ y \in R_{AKS} \\ (p, q, y), \text{если } x = (p, q),\ p, y \in M_{AKS},\ q \in R_{AKS},\ (p, y) \in q \\ c(x, y), \text{если } x, y, c(x, y) \in M_{AKS} \\ \Lambda, \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Здесь $c(x, y)$ результат операции наложения конфигураций x и y, определяемой по структурным представлениям этих конфигураций, аналогично определению $c(x, y)$ для формул в ALC, если он представляет конфигурацию. Расширение отношения вложения конфигураций на множество фрагментов конфигураций связано с подходящим расширением понятия o-трассирований конфигураций [4].

2.5. Иерархические семантические сети

Иерархическая семантическая сеть представляется конечным ориентированным графом, вершинами которого являются элементы бесконечных разрешимых множеств элементарных и неэлементарных вершин, составляющие множество $V_{SN} = \{v_1, v_2, \ldots\}$. Неэлементарными вершинами представляются иерархические семантические сети. Рёбра сети размечены отношениями на V_{SN}, выполняющимися между парами соединяемых ими вершин. При этом семейство всех применяемых отношений R_{SN} — разрешимое. На множестве элементарных вершин V^0_{SN} дополнительно определено вычислимое отношение порядка $\rho^1 \subseteq V^0_{SN} \times V^0_{SN}$. Этим отношением реализуется сравнение содержания пар элементарных знаний. Сопоставление неэлементарным вершинам представляющих их семантических сетей фиксированное и вычислимое. Каждую пару вершин любой сети соединяет не более одного ребра.

Всякая семантическая сеть представляется парой $\Sigma = (V, U)$, где V — конечное множество вершин, а U — конечное множество рёбер, нагруженных значениями семантических отношений, выполняющихся между соединяемыми ими вершинами. Обозначим формализм иерархических семантических сетей и множество всех сетей в этом формализме как SN. Для представления отдельных рёбер семантических сетей применяются выражения вида (a, b, r), где a и b — вершины сети, а r — отношение между ними. Символом подчёркивания _ обозначается пустая вершина.

В семантических сетях, составляющих формализм SN, одинаковые вершины обозначают равные объекты. В частности, неэлементарные вершины сетей в классе SN задают фиксированные семантические сети. Всякая неэлементарная вершина не является вершиной подсетей сети, представляющей эту вершину.

Уточнение понятия вложения семантических сетей связано с понятием вложения графов [6]. Оно состоит в возможности установления соответствий, для которых пути одной сети сопоставляются путям другой сети. При этом последовательности вершин и разметок рёбер сопоставляемых путей оказываются сравнимыми в специальном отношении. Обозначим как $W(\Sigma)$ — множество путей в $\Sigma \in SN$. Если $w \in W(\Sigma)$, то $S(w)$ — это последовательность чередующихся разметок вершин и рёбер в w. На множестве конечных последовательностей чередующихся элементов V_{SN} и R_{SN} определено разрешимое отношение ρ^2. В частности, если w_1, w_2 — такие последовательности и w_1 является под последовательностью w_2, то $w_1 \, \rho^2 \, w_2$.

Определение 5. Семантическая сеть $\Sigma_1 = (V_1, U_1)$ вложена в сеть $\Sigma_2 = (V_2, U_2)$, если существует такое отображение $\psi : V_1 \to V_1$, что:

1) $\forall v \in V_1 (v \, \rho^1 \, \psi(v))$;
2) $\forall \, w_1 \in W(\Sigma_1) \, \exists \, w_2 \in W(\Sigma_2) \, (w_1 = v^1, \dots, v^k \to w_2 = \psi(v^1), \dots, \psi(v^k)) \, \& \, S(w_1) \, \rho^2 \, S(w_2))$.

Вложение имеет место, если существует отображение множества вершин вложенного графа во множество вершин другого графа, для которого всякий путь в первой графе представляется некоторым путём в составе другого графа. При этом образы вершин первого пути составляют подпоследовательность последовательности вершин, составляющих второй путь.

Множество $D_{M_{SN}}$ составляют семантические отношения и сети, фрагменты рёбер и семантических сетей. Фрагменты семантических сетей получаются добавлением к сетям фрагмента ребра, соединяющего одну из вершин сетей с пустой (неопределённой) вершиной с помощью некоторого отношения. Добавляемый фрагмент ребра имеет один из двух форматов: $(a, \_, r)$ или $(\_, a, r)$. Если $\Sigma_1 = (V_1, U_1)$ и $\Sigma_2 = (V_2, U_2)$ — семантические сети, то объединение $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ этих сетей составляет сеть $\Sigma = (V, U)$, в которой $V = V_1 \cup V_2$, а U составляют совпадающие рёбра, входящие в обе сети, а также рёбра, соединяющие пару вершин только одной из рассматриваемых сетей. Фрагменты сетей Σ_1 и Σ_2 образуют покрытие сети Σ, если они содержат ровно по одному фрагменту рёбер вида $(a, \_, r) \in \Sigma_1$ и $(\_, b, r) \in \Sigma_2$, для которых $(a, b) \in r$ и $(a, b) \in \Sigma$, а объединение Σ_1 и Σ_2 с добавленным ребром (a, b, r) совпадает с Σ.

Определим композицию фрагментов семантических сетей:

$$x \circ y = \begin{cases} z, \text{ если } z \text{ получается из сети } x \text{ добавлением ребра} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y = (\_, r, a) \text{ или } y = (a, r, \_) \\ z, \text{ если } x = (a,\, r),\, y = b,\, (a,\, b) \in r,\, z = \{\{a,\, b\}, \{(a,\, b,\, r)\}\} \\ z, \text{ если x и } y \text{ — фрагменты сетей, образующие} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{покрытие сети } z \\ c(x,y), \text{если } x \text{ и } y \text{ — семантические сети} \\ \Lambda, \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Здесь $c(x, y)$ — результат операции наложения сетей x и y, определяемой по структурным представлениям этих сетей, аналогично определению для формул в ALC. В данной работе эта операция рассматривается только для таких сетей, в которых каждая сеть и сети, представляющие вершины подсетей в них, составлены одной вершиной или парой вершин, соединённых ребром.

Уточнения операции композиции на множествах фрагментов знаний в рассмотренных формализмах обеспечивают возможность конструирования таких множеств из элементарных объектов. Они отражают сохранение и усложнение структурной сложности фрагментов, достаточное для обоснования точных сравнений формализмов и не претендуют на полноту. Приведённые уточнения отношений сравнения соответствуют содержательно понятным представлениям для соответствующих подходов к представлению знаний.

3. Сравнения формализмов *APS*, *LS*, *ALC*, *AKS* и *SN*

Некоторые свойства рассмотренных выше формализмов знаний могут быть параметрическими. Разные уточнения значений таких свойств порождают варианты формализма, для которых возможны определённые различия отличия их свойств. Доказываемые ниже вложения вида $\Im_1 \sqsubseteq \Im_2$ утверждают несущественность отличий из-за разных уточнений параметров формализмов. Это означает, что для каждого варианта формализма $\Im_1$ найдётся вариант $\Im_2$, для которого выполняется соответствующее вложение. Аналогично, доказываемое отсутствие вложения $\Im_1 \sqsubseteq \Im_2$ означает, что найдётся вариант $\Im_1$, который не вкладывается ни в один вариант $\Im_2$.

Теорема 1. *Для формализмов APS, LS, ALC, AKS и SN справедливы только следующие вложения:*

$$APS \sqsubseteq LS \sqsubseteq ALC \sqsubseteq AKS \sqsubseteq SN.$$

Доказательство.

I. Определим отображение ξ_1, для которого выполнено условие вложения $APS \sqsubseteq LS$. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ — множество атомов в APS. Зададим отображение ξ_1 множества A во множество $Q = \{q_1, q_2, \ldots\}$ с помощью соотношения $\forall a_i \in A(\xi_1(a_i) = a_i)$.

Распространим ξ_1 на множество продукций с помощью правила: если $\pi = \dfrac{t_1, \ldots, t_k}{t_{k+1}}$ — некоторая продукция, то ей соответствует множество $\{\xi_1(t_1), \ldots, \xi_1(t_k)\}$, включаемое в $\sigma(\xi_1(t_{k+1}))$. Каждое конечное семейство атомарных продукций представляется семейством подмножеств множества Q. Покажем, что для отображения ξ_1 выполняются условия вложения $APS \sqsubseteq_A LS$. Пусть x — продукция в APS и $x = y \circ z$. Тогда $\xi_1(y \circ z) = \xi_1(y) \circ \xi_1(z)$. Кроме того, для произвольных фрагментов x и y справедливо соотношение $x \subseteq y \rightarrow \xi_1(x) \subseteq \xi_1(y)$. Поэтому $APS \sqsubseteq LS$.

Покажем, что вложение $LS \sqsubseteq APS$ не имеет места. Предположим противное. Тогда существует инъективное отображение $\tilde{\xi_1} : D_{M_{LS}} \rightarrow D_{M_{APS}}$, для которого выполняются условия вложений $LS \sqsubseteq_A APS$ и $LS \sqsubseteq_S APS$.

Рассмотрим $\tilde{\xi_1}$ на множестве объектов, представляющих фрагменты отображения σ. Пусть $(q, \sigma(q))$ — произвольный такой объект. В APS множества атомов рассматриваются как продукции с пустым множеством заключений. Поэтому значением $\tilde{\xi_1}((q, \sigma(q)))$ является фрагмент некоторой продукции. Фрагменты (q, x) соответствуют продукциям, имеющим то же заключение, что и $\tilde{\xi_1}((q, \sigma(q)))$, поскольку в противном случае для $\tilde{\xi_1}$ не выполняется условие алгебраического вложения LS в APS. Из $(q, x) \subseteq (q, y)$ следует, что $\tilde{\xi_1}((q, x)) \subseteq \tilde{\xi_1}((q, y))$. Рассмотрим фрагмент $(q, \{S_1, S_2\}) \in D_{M_{LS}}$, где $S_1 \subset S_1$. Составим последовательность вложенных множеств атомов $S^1 \subset S^2 \subset \ldots \subset S^k$, в которой $S^1 = S_1$, $S^k = S_2$. Справедливы вложения:

$$\tilde{\xi_1}((q,\{S^1,S_2\})) \subset \tilde{\xi_1}((q,\{S^2,S_2\})) \subset \ldots$$
$$\ldots \subset \tilde{\xi_1}((q,\{S^{k-1},S_2\})) \subset \tilde{\xi_1}((q,\{S_2\})).$$

Поскольку $\{S_2\} \subseteq \{S^1, S_2\}$, то $\tilde{\xi_1}((q,\{S_2\})) \subseteq \tilde{\xi_1}((q,\{S^1,S_2\}))$. Последнее утверждение приводит к противоречию с требованием инъективности $\tilde{\xi_1}$. Поэтому вложение $LS \sqsubseteq APS$ является неверным.

II. Покажем, что $LS \sqsubseteq ALC$. Определим отображение ξ_2, для которого выполняются условия вложения LS в ALC. Зададим ξ_2 на множестве Q как $\forall q_i \in Q(\xi_2(q_i) = e_i)$.

Если B — конечное подмножество множества Q (класс в ALC), то определим $\xi_2(B) = \{y | \exists x \in B\,(\xi_2(x) = y)\}$. Элементы графика отображения σ будем представлять формулами в ALC. Пусть ν — однозначная вычислимая нумерация множества всех конечных подмножеств множества Q для которой выполняется условие $\nu i \subset \nu j \leftrightarrow i < j$. Она определяет однозначную вычислимую нумерацию всех конечных классов в ALC, составленных ξ_2 образами элементов конечных подмножеств Q. Пусть $\sigma(q_i) = \{Q_{i,1}, \ldots, Q_{i,h(i)}\}$, где $\{Q_{i,1}, \ldots, Q_{i,h(i)}\}$ — разные конечные подмножества множества Q, ν-номера которых составляют упорядоченное по возрастанию множество $\{j_1, \ldots, j_{h(i)}\}$. Представим фрагмент $(q_i, \sigma(q_i))$ с помощью формулы $\xi_2((q_i, \sigma(q_i)))$, изображённой на рисунке 1.

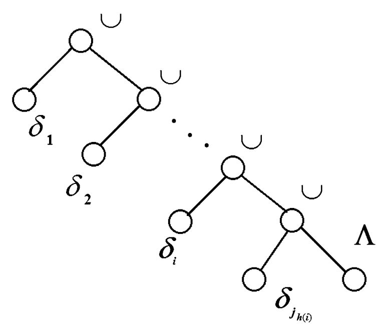

Рис. 1. Формула $\xi_2((q_i, \sigma(q_i)))$.

Здесь $\delta_i = \Lambda$, если $i \notin \{j_1, \ldots, j_{h(i)}\}$, и $\delta_i = \nu j_{h_i}$ в противном случае. Отображение ξ_2 — инъективно, поскольку разные фрагменты Q отображаются в разные классы, а разные элементы $(q_i, \sigma(q_i))$ в разные формулы ALC. Покажем, что для ξ_2 выполняется условие вложения $LS \sqsubseteq ALC$. Пусть в LS фрагмент x представляется как композиция $y \circ z$. Если x отличен от Λ, то y и z являются однотипными. Это либо конечные подмножества множества Q, либо элементы графика отображения σ вида $(q, \sigma(q))$. Поэтому значение $\xi_2(x)$ всегда составляется как объединение $\xi_2(y)$ и $\xi_2(z)$. Если для множеств состояний x и y выполняется вложение $x \subseteq y$, то $\xi_2(x) \subseteq \xi_2(y)$. Это так, поскольку вложенным фрагментам знаний в LS отображение ξ_2 сопоставляет вложенные семейства атомов. Во втором случае x и y это элементы графика σ. Тогда $y \circ z$ — это пустая формула, если $x = (q_i, \alpha)$, а $y = (q_j, \beta)$ и $i \neq j$, или формула соответствующая объединению семейств множеств α и β. Если для $x, y \in D_{M_{LS}}$ выполняется $x \subseteq y$, то $\xi_2(x) \subseteq \xi_2(y)$. Поэтому $LS \sqsubseteq ALC$.

Предположим, что справедливо обратное вложение $ALC \sqsubseteq LS$. Пусть $\tilde{\xi_2} : D_{M_{ALC}} \to D_{M_{LS}}$ — вычислимое инъективное отображение, для которого выполняются условия вложения ALC в LS. Рассмотрим последовательность вложенных формул:

$$\exists R.C,\ \exists R.(C \cup \exists R.C), \ldots, \exists R.(C \cup (C \cup \ldots (C \cup \exists R.C) \ldots), \ldots.$$

Здесь R и C являются фиксированными отношением и классом. Обозначим приведённые формулы как Φ_i, $i = 1, 2, \ldots$. Представим их диаграммами, изображенными на рисунке 2.

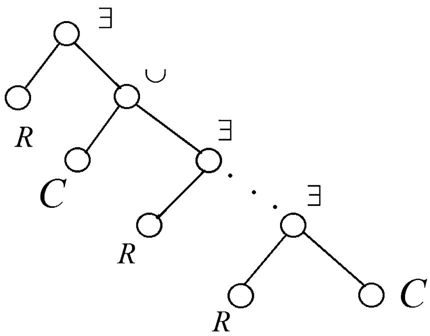

Рис. 2. Диаграмма формулы Φ_i.

Рассматриваемые формулы составляются из вложенных в них подформул. Значениями $\tilde{\xi_2}(\Phi_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, не могут быть подмножества множества Q. Это следует из того, что $\Phi_{i+1} = \Xi \circ \Phi_i$, где Ξ совпадает с одним из фрагментов Ξ_1 или Ξ_2, представленных на рисунке 3.

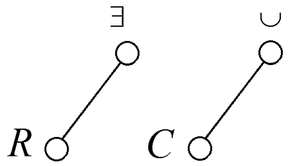

Рис. 3. Фрагменты формул Ξ_1 и Ξ_2.

Поскольку $\tilde{\xi}_2(\Phi_{i+1}) = \tilde{\xi}_2(\Xi) \circ \tilde{\xi}_2(\Phi_i)$, а композиция подмножеств множества Q в ALC реализуется их объединением, то в последовательности $\tilde{\xi}_2(\Phi_i), i = 1,\ 2, \ldots$, встречаются одинаковые элементы. Это противоречит инъективности $\tilde{\xi}_2$.

Следовательно, $\tilde{\xi}_2$ сопоставляет рассматриваемым формулам фрагменты элементов графика σ. Истинное для формул и их фрагментов равенство $\tilde{\xi}_2(\Phi_{i+1}) = \tilde{\xi}_2(\Xi) \circ \tilde{\xi}_2(\Phi_i)$ означает, что при переходе от $\tilde{\xi}_2(\Phi_i)$ к $\tilde{\xi}_2(\Phi_{i+1})$ выполняется объединение семейств множеств, сопоставляемых Ξ и Φ_i. Каждая Φ_{i+1} получается из Φ_i добавлением одного из фрагментов: Ξ_1 или Ξ_2. Такое добавление через несколько шагов не приводит к расширению семейства подмножеств Q. Поэтому отображение $\tilde{\xi}_2$ не инъективное, что неверно. То есть, неверно, что $ALC \sqsubseteq_S LS$ и неверно, что $ALC \sqsubseteq LS$.

III. Определим отображение ξ_3, для которого $ALC \sqsubseteq AKS$. Фрагментами знаний в ALC являются конечные множества атомов (классы) и конечные бинарные отношения (роли), а также формулы и их фрагменты. Пусть $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ — множество атомов в ALC, а $M_0 = \{z_i |\, i = 0, 1, \ldots\}$ множество всех элементарных конфигураций в AKS, отличных от пустой конфигурации Λ. Зададим ξ_3 на E соотношением $\forall e_i \in E\, (\xi_3(e_i) = z_{3i})$.

Пусть C — конечный класс в ALC. Тогда $\xi_3(C)$ — это специальное отношение на множестве конфигураций, определяемое соотношением $\xi_3(C) = \{(\xi_3(a), \xi_3(z_0)) |\, a \in C\}$. Отображение $\xi_3(C)$ инъективно на множестве классов и сохраняет вложения классов при переходе от классов к отношениям, представляющим классы. Кроме того, $\xi_3(C_1 \cup$

$C_2) = \xi_3(C_1) \cup \xi_3(C_2))$. Поэтому для отображения $\xi_3(C)$ на множестве классов в ALC выполнено условие вложения $ALC \sqsubseteq AKS$.

Определим отображение $\xi_3(C)$ для множества ролей (отношений) в ALC. Если ρ — это некоторая роль, то $\xi_3(\rho) = \{(z_i, z_j) | (e_i, e_j) \in \rho\}$ является отношением на множестве элементарных конфигураций. Поэтому отображение ξ_3 инъективно на множестве ролей в ALC. Для этого фрагмента отображения ξ_3 также выполнены условия семантического и алгебраического вложения ALC в AKS. На множествах символов, обозначающих классы и роли, отображение ξ_3 задаётся соотношениями: $\forall c_i \in NC(\xi_3(c_i) = z_{3i+1})$ и $\forall r_i \in NR(\xi_3(r_i) = z_{3i+2})$.

Уточним ξ_3 на множестве фрагментов формул в ALC. Каждой формуле ставится в соответствие конфигурация. Правила составления таких конфигураций связаны со структурой формул. Определим семейство разрешимых отношений между конфигурациями $\rho_\cup$, $\rho_\cap$, $\rho_\setminus$, $\rho_\exists$, $\rho_\forall$, $\rho_\subseteq$, $\rho_\equiv$ и $\rho_\subset$. Будем использовать эти отношения для составления конфигураций, представляющих формулы $(C_1 \cup C_2)$, $(C_1 \cap C_2)$, $(C_1 \backslash C_2)$, $\exists R.C$ и $\forall R.C$, $C_1 \subseteq C_2$, $C_1 \equiv C_2$, $C_1 \subset C_2$. Здесь C, C_1, C_2 — формулы, представляющие классы, а R — имя роли в ALC. Структуры указанных конфигураций приведены на рисунке 4. Корни структур размечены рассматриваемыми отношениями. Потомки корневой вершины, определяют конфигурации, представляющие формулы, к которым применяются соответствующие операции или сравнения.

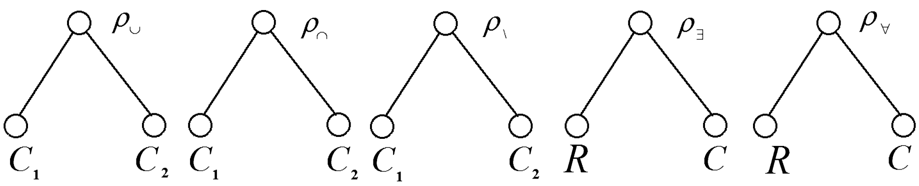

Рис. 4. Структура конфигураций для формул в ALC.

Отношения $\rho_\cup$, $\rho_\cap$ и $\rho_\setminus$ выполняются для пар конфигураций, представляющих формулы определения классов. Аналогично, отношения $\rho_\exists$ и $\rho_\forall$ выполняются для пар конфигураций, первая из которых соответствует формуле определения роли, а вторая — формуле определения класса. Для того чтобы сделать отношения между конфигурациями $\rho_\cup$, $\rho_\cap$, $\rho_\setminus$, $\rho_\exists$ и $\rho_\forall$ несовпадающими, достаточно по-разному определить их на множествах пар ролей в ALC с сохранением разрешимости самих отношений. Структура конфигураций для сравнений классов в отношениях $\subseteq$, $\equiv$ и $\subset$, а также формул aC и $(a,\, b)R$ определяется аналогично с помощью отношений $\rho_{\subseteq}$, $\rho_{\equiv}$ и $\rho_{\subset}$, а также ρ_C и ρ_R. Из определения композиции в ALC и AKS следуют утверждения:

1) если $x = y \circ z$, где z — формула, а y дополнение z до x, то $\xi_3(x) = \xi_3(y) \circ \xi_3(z)$;
2) если $x = y \circ z$, где y и z — формулы, то $\xi_3(x) = \xi_3(y) \circ \xi_3(z)$.
3) если x и y — фрагменты формул, для которых $x \subseteq y$, то $\xi_3(x)$ и $\xi_3(y)$ являются фрагментами конфигураций, для которых $\xi_3(x) \subseteq_o \xi_3(y)$. Поэтому $ALC \sqsubseteq AKS$.

Покажем, что соотношение $AKS \sqsubseteq ALC$ является неверным. Предположим противное. Тогда существует инъективное отображение $\tilde{\xi_3} : D_{M_{AKS}} \to D_{M_{ALC}}$, для которого $AKS \sqsubseteq_A ALC$ и $AKS \sqsubseteq_S ALC$. В AKS допускается существование бесконечной вычислимой последовательности вложенных отношений между конфигурациями $r^i \in R_{AKS}$, $i = 1, 2, \ldots$, для которой $\exists (z_1, z_2) \in M_{AKS} \times M_{AKS} \forall i \in N((z_1, z_2) \in r^i)$. Рассмотрим бесконечное разрешимое множество конфигураций:

$$\{z^i |\, i = 1, 2, 3, \ldots \,\&\, \forall i\, ([z^i]_\lambda = r^i \,\&\, \varepsilon(z^i) = (z_1,\, z_2))\}.$$

Здесь $[z^i]_\lambda$ — отношениее, соответствующее корневой вершине структурного представления z^i, а $\varepsilon(z^i)$ — пара конфигураций, на которые распадается z^i, так что выполняется отношение $[z^i]_\lambda$. Для этих конфигураций спроаведливо утверждение $\forall j > 1 (z^j \subseteq_o z^1)$ [4]. То есть, множество конфигураций в AKS, o-вложенных в конфигурацию z^1, — бесконечное. Поэтому найдётся бесконечное множество разных элементов $D_{M_{ALC}}$, вложенных в $\tilde{\xi_3}(z^1)$. Значением $\tilde{\xi_3}(z^1)$ является элемент $D_{M_{ALC}}$. Он не может содержать бесконечное множество разных собственных частей. То есть, предположение, что $AKS \sqsubseteq ALC$ — не верное.

IV. Покажем, что $AKS \sqsubseteq SN$. Определим необходимое для этого инъективное отображение $\xi_4 : D_{M_{AKS}} \to D_{M_{SN}}$. Пусть $M_0 = \{z_1^o, \ldots, z_i^o, \ldots\}$ и $M_1 = \{z_1^1, \ldots, z_i^1, \ldots\}$ — множества элементарных и неэлементарных конфигураций в AKS, а $V = \{v_1, \ldots, v_i, \ldots\}$ — разрешимое множество элементарных вершин семантических сетей из SN. Здесь z_1^o и v_1 представляют пустые фрагменты знаний в соответствующих формализмах. Определим отображение ξ_4:

1) $\forall i(\xi_4(z_i^o) = v_i)$;
2) $\forall i(\varepsilon(z_i^1) = (z^1, z^2) \to$
$\to (\xi_4(z_i^1) = (\{\xi_4(z^1), \xi_4(z^2)\}, \{(\xi_4(z^1), \xi_4(z^2), \psi(z_i^1))\}))$;
3) фрагментам конфигураций вида (x, y), где x — конфигурация, а y — отношение между конфигурациями, соответствует фрагмент семантической сети, составленный из сети $\xi_4(x)$, дополненной фрагментом ребра $(\xi_4(x), \_, \xi_4(y))$;
4) $\forall r \in R(\xi_4(r) = \{(\xi_4(z^1), \xi_4(z^2)) | (\xi_4(z^1), \xi_4(z^2)) \in r\})$.

Если x и y — отношения, то $\xi_4(x)$ и $\xi_4(y)$ — также отношения и $\xi_4(x \circ y) = \xi_4(x) \circ \xi_4(y)$. Пусть x и y фрагмент конфигурации и конфигурация. Тогда $\xi_4(x)$ и $\xi_4(y)$ — это фрагмент сети и сеть. Если $x \circ y$ является конфигурацией, то для соответствующих фрагментов сетей $\xi_4(x \circ y) = \xi_4(x) \circ \xi_4(y)$. Иначе, $x \circ y = \Lambda$ и $\xi_4(x) \circ \xi_4(y) = \Lambda$. Рассмотрим случай, когда x и y — это конфигурации. Если для x и y значение $c(x, y)$ определено, то определено значение $c(\xi_4(x), \xi_4(y)) = \xi_4(x) \circ \xi_4(y)$. При этом $\xi_4(x \circ y)) = \xi_4(x) \circ \xi_4(y)$. Если же $x \circ y = \Lambda$, то $\xi_4(x)$ и $\xi_4(y)$ — семантические сети, для которых $\xi_4(x) \circ \xi_4(y) = \Lambda$. Поэтому является истинным утверждение $\forall x, y \in D_{M_{AKS}}(z = x \circ y \to \xi_4(z) = \xi_4(x) \circ \xi_4(y))$.

Если $x \subseteq_o y$ где $x, y \in D_{M_{AKS}}$, то $\xi_4(x) \subseteq \xi_4(y)$. Поэтому $AKS \sqsubseteq ALC$.

Покажем, что соотношение $ALC \sqsubseteq AKS$ — не имеет места. Предположим противное. Пусть $\tilde{\xi_4}$ — отображение, для которого выполняется условие вложения $ALC \sqsubseteq AKS$. Рассмотрим сети $\Sigma_i, i \in N$, изображенные на рисунке 5.

Для этих сетей справедливы утверждения:

1) каждой сети Σ_i, $i \in N$ отображение $\tilde{\xi_4}$ сопоставляет конфигурацию;
2) если $i > 1$, то $\tilde{\xi_4}(\Sigma_i) \in M_1$;
3) каждая сеть Σ_i, $i > 1$ составляется из Σ_1 добавлением новых вершин и рёбер, соединяющих такие вершины с b.

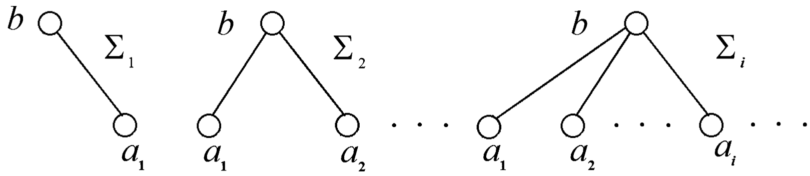

Рис. 5. Семантические сети Σ_i, $i \in N$.

Возможно составление заданных сетей с помощью разных последовательностей применения операции композиции, добавляющих в уже построенную часть сети новые рёбра. Тогда для $i > 3$ должно существовать несколько разных значений $\tilde{\xi_4}(\Sigma_i)$. Следовательно, предположение о существовании инъективного отображения $\tilde{\xi_4}$, для которого выполняется условие вложения $SN \sqsubseteq AKS$, не верное. Теорема доказана.

4. Заключение

Рассмотренные выше формализмы составляют последовательность, упорядоченную по возрастанию структурной и семантической сложности реализуемых в них форматов представления знаний. Так LS использует конструкцию группирования множеств в системы, которая отсутствует в APS. Формализм ALC включает формулы, структуры которых не сохраняются в LS. Формализм AKS допускает неограниченность множеств семантических отношений, связывающих пары знаний, что не имеет места в ALC. Наконец, в SN нет ограничений на количество связей отдельных вершин с другими вершинами сетей. При этом доказанная в работе система соотношений не сохраняется, если ограничиться лишь одним из видов вложений. То есть, оба предложенных вида вложений являются существенными.

Список литературы

[1] Костенко К. И. Вложения формализмов семантических сетей // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2013. № 2. — С. 58–66.

[2] Stefanutti L., Albert D., Hockemeyer C. Derivation of Knowledge Structures for Distributed Learning Objects // Ritrovato P., Allison C., Cerri S. A., Dimitrakos T., Gaeta M., Salerno S. (eds.). Towards the Learning Grid: Advances in Human Learning Services. — 2005. Vol. 127. — P. 105–112.

[3] Schmidt-Schaus M., Smolka G. Attributive concept descriptions with complements // Artificial Intelligence. — 1991. Vol. 48. — P. 1–26.

[4] Костенко К. И. Трассирования конфигураций абстрактного пространства знаний // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2007. № 2. — С. 10–15.

[5] Кузнецов И. П. Семантические представления. — М.: Наука, 1986.

[6] Gupta A., Nashimura N. Finding largest subtrees and smallest supertrees // Algorithmica. — 1998. N 21. — P. 183–210.