О слоистости замкнутых классов булевых функций и функций k-значной логики

Т. С. Членова

В статье уточнена верхняя оценка слоистости произвольных полных систем булевых функций. Также приведен ответ на вопрос, верно ли, что слоистость любой полной системы в классе функций k-значной логики конечна. Введено понятие слоистости замкнутых классов фунций k-значной логики и приведены оценки слоистости всех замкнутых классов булевых функций.

Ключевые слова: булева функция, функция k-значной логики, полная система, сложность, слоистость, замкнутый класс.

В статье [1] введено понятие слоистости полных систем в $\{P_k, k \geqslant 2\}$. Одним из основных результатов этой статьи является оценка сверху слоистости произвольной полной системы в P_2. А именно: слоистость любой полной системы в P_2 не больше 5. Кроме того, доказано, что существуют полные системы в P_2, слоистость которых равна 4. В даннои статье уточнена верхняя оценка слостости произвольных полных систем булевых функций. Также приведен ответ на вопрос, верно ли, что слоистость любой полной системы в классе фунций k-значной логики конечна. Введено понятие слоистости замкнутых классов фунций k-значной логики и приведены оценки слистости всех замкнутых классов булевых функций.

Введем основные определения.

Пусть H — замкнутый класс в $P_k, k \geqslant 2$, $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ — полная система в H. Обозначим $G_i = [\{g_i\}]$ и $\widetilde{G} = \cup_{i=1}^{n} G_i$.

Слоистостью схемы ϕ с одним выходом над системой $\widetilde{G}$ в H назовем число $S_{\widetilde{G}}(\phi)$, равное глубине [2] этой схемы.

Слоистостью функции $f \in H$ над полной системой G в H называется число $S_G(f) = \min_{\phi\in\Phi} S_G(\phi)$, где Φ — множество всех схем над системой $\widetilde{G}$, реализующих функцию f.

Слоистостью полной системы G в H будем называть число $S(G)$, равное максимуму слоистостей всех функций $f \in H$ над G, если множество чисел $\{S_G(f) | f \in H\}$ ограничено. Если же это множество чисел является неограниченным, то будем считать слоистость системы равной бесконечности.

Слоистостью замкнутого класса H назовем число $S(H)$, равное максимуму слоистостей всех конечных полных систем G в H, если множество чисел $\{S(G) | G$ — конечная полная система в $H\}$ ограничено. Если же это множество чисел является неограниченным, то будем считать слоистость класса H равной бесконечности.

Теорема 1. *Пусть G — полная система в P_2. Тогда $S(G) \leqslant 4$.*

В [1] показано, что существуют полные системы в P_2, слоистость которых равна 4. Таким образом, оценку в теореме 1 понизить невозможно.

Для некоторых классов полных систем можно получить более точные оценки слоистости.

Будем использовать следующие обозначения для множеств булевских функций (определения см. в [3], [4]):

Sh — класс всех Шефферовских функций;

A_4 — класс всех монотонных функций;

L_1 — класс всех линейных функций;

D_3 — класс всех самодвойственных функций;

E_0 — множество всех γ-функций;

E_1 — множество всех β-функций;

E_x — множество всех α-функций;

$E_{\overline{x}}$ — множество всех δ-функций;

$P_2^{(1)}$ — класс всех булевских функций, существенно зависящих не более, чем от одной переменной.

Имеем следующий результат:

I. Для полной системы G такой, что $G \cap Sh \neq \varnothing$, выполнено равенство $S(G) = 1$;

II. Для полной системы G, обладающей одним из следующих свойств:

1. $G \cap Sh = \varnothing$, $G \cap E_0 \neq \varnothing$, $G \cap E_1 \neq \varnothing$, $G \setminus (A_4 \cup L_1) \neq \varnothing$;
2. $G \cap Sh = \varnothing$, $G \cap E_0 \neq \varnothing$, $G \cap E_1 = \varnothing$, $(G \cap (E_{\overline{x}} \setminus L_1)) \neq \varnothing$;
3. $G \cap Sh = \varnothing$, $G \cap E_0 = \varnothing$, $G \cap E_1 \neq \varnothing$, $(G \cap (E_{\overline{x}} \setminus L_1)) \neq \varnothing$,

выполнено равенство $S(G) = 2$;

III. Для полной системы G, обладающей одним из следующих свойств:
1. $G \cap E_0 \neq \varnothing$, $G \cap E_1 \neq \varnothing$, $(G \setminus E_4) \setminus P_2^{(1)} \neq \varnothing$;
2. $G \cap E_0 \neq \varnothing$, $G \cap E_1 = \varnothing$, $(G \cap (E_0 \setminus L_1)) \neq \varnothing$;
3. $G \cap E_0 \neq \varnothing$, $G \cap E_1 = \varnothing$, $(G \cap (E_x \setminus L_1)) \neq \varnothing$, $(G \cap (E_0 \setminus (L_1 \cap D_3))) \neq \varnothing$;
4. $G \cap E_1 \neq \varnothing$, $G \cap E_0 = \varnothing$, $(G \cap (E_1 \setminus L_1)) \neq \varnothing$;
5. $G \cap E_1 \neq \varnothing$, $G \cap E_0 = \varnothing$, $(G \cap (E_x \setminus L_1)) \neq \varnothing$, $(G \cap (E_1 \setminus (L_1 \cap D_3))) \neq \varnothing$;
6. $(G \cap (\overline{A_4 \cup L_1 \cup C_2 \cup C_3})) \neq \varnothing$,

выполнена оценка $S(G) \leqslant 3$.

Итак, слоистость любой полной системы булевых функций конечна. Рассмотрим теперь случай $P_k, k \geqslant 3$. Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Для любого $k \geqslant 3$ существует полная в P_k система бесконечной слоистости.*

Далее будем пользоваться нотацией классов Поста, введенной в [4].

Теорема 3. *Для любого замкнутого класса H булевых функций $S(H)$ не более 4.*

Имеют место следующие оценки слоистости классов Поста:
Классы слоистости 1:

$O_i, 1 \leqslant i \leqslant 8$,
$S_i, i \in \{1, 3, 5, 6\}$,
$P_i, i \in \{1, 3, 5, 6\}$,
L_4,
D_2,
$F_i^\infty, i \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$,
$F_i^\mu, i \in \{2, 6\}, \mu > 2$.

Классы слоистости 2:

O_9,
$L_i, i \in \{1, 2, 3, 5\}$,
$D_i, i \in \{1, 3\}$,
$A_i, i \in \{1, 4\}$,
$F_i^{\infty}, i \in \{4, 8\}$,
$F_i^2, i \in \{2, 6\}$,
$F_i^{\mu}, i \in \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}, \mu \geqslant 2$.

Классы слоистости не более 3:
$A_i, i \in \{2, 3\}$,
$C_i, i \in \{2, 3, 4\}$.

Класс слоистости 4:
C_1

Автор выражает благодарность к.ф.-м.н Часовских А. А. и к.ф.-м.н Половникову В. С. за внимание и помощь в работе.

Список литературы

[1] Членова Т. С. О слоистости булевых функций и функций k-значной логики // Интеллектуальные системы. — 2010. Т. 14, вып. 1–4. — С. 619–638.

[2] Касим-Заде О. М. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным базисом // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. — 2007. № 1. — С. 18–21.

[3] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2003.

[4] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.