О некоторых свойствах автоматов с магазинной памятью

И. Е. Иванов

В работе доказывается свойство сохранения периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью и исследуются оценки на длину периода выходящей последовательности в зависимости от периода входящей и характеристик автомата.

Ключевые слова: автомат с магазинной памятью, детерминированная функция, периодические последовательности.

Введение

Автомат с магазинной памятью является акцептором контекстно-свободных языков [1]. По большей части его исследование находилось в плоскости теории формальных грамматик. В работе [2] была сделана попытка найти различия конечных автоматов и автоматов с магазинной памятью в рамках задачи описания классов вычислимых функций, вычисляемых данными устройствами. Оказывается, что как преобразователи последовательностей детерминированные автоматы с магазинной памятью почти не изучались, в отличие от конечных автоматов [3].

Инициальным детерминированным автоматом с магазиной памятью будем называть «девятку»

$$P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\},$$

где A — входной алфавит, Q — конечное множество состояний, B — выходной алфавит, Γ — алфавит памяти (алфавит ленты магазина), $\varphi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to Q)$ — функция переходов, $\psi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to B$ — функция выхода, $\eta : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to \Gamma^*$ — функция памяти, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\gamma_0 \in \Gamma^*$ — начальная запись в магазине.

Функционирование P можно определить с помощью системы канонических уравнений, которые задают в каждый момент времени t состояние автомата $q(t)$, записанное в магазине слово $\gamma(t)$, и выход автомата $b(t)$ при подаче на вход $a(t)$:

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ \gamma(0) = \gamma_0, \\ z(t) = LS(\gamma(t)), \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)), \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)), \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)), \end{cases}$$

где $LS : \Gamma^* \to \Gamma \cup \{\lambda\}$ возвращает последний символ при подаче непусого слова и $LS(\lambda) = \lambda$, а $S : \Gamma^* \to \Gamma^*$ — стирает последний символ входного слова и $S(\lambda) = \lambda$.

Автомат с магазинной памятью опеделяет детерминированную функцию $f : A^* \to B^*$. Обозначим $\mathcal{M}(A, B)$ множество детерминированных функций, порождаемых автоматами с магазинной памятью. Отметим, что $\mathcal{M}(A, B)$ содержит множество ограниченно-детерминированных функций.

1. Свойство сохранения периодических последовательностей

Лемма 1. *Пусть фиксировано* $\alpha = a(0)a(1)\ldots \in A^\infty$. *Тогда системы уравнений*

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ \gamma(0) = \gamma_0, \\ z(t) = LS(\gamma(t)), \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)), \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)), \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)) \end{cases} \tag{1}$$

и

$$
\begin{cases}
q'(0) = q_0, \\
\gamma'(0) = \gamma_0, \\
z'(t) = LS(\gamma'(t)), \\
q'(t+1) = \varphi(a(t), q'(t), z'(t)), \\
d(t+1) = \max\{\min\limits_{l \geqslant t+1} |\gamma(l)|, 1\} - 1, \\
\gamma'(t+1) = \gamma(t+1)\lfloor_{|\gamma(t+1)|-d(t+1)}, \\
b'(t) = \psi(a(t), q'(t), z'(t))
\end{cases}
\tag{2}
$$

таковы, что

$$\forall t\ q(t) = q'(t),\ z(t) = z'(t),\ b(t) = b'(t).$$

Доказательство. Докажем лемму по индукции. База. При $t = 0$ утвержение, очевидно, выполнено. Шаг индукции. Пусть при $t \leqslant k$ утверждение выполнено. Значит, $q(t) = q'(t)$, $z(t) = z'(t)$. Отсюда следует, что $q(t+1) = q'(t+1)$, $b(t+1) = b'(t+1)$. покажем, что $z(t+1) = z'(t+1)$. Если $\eta(a(t), q(t), z(t)) \neq \lambda$, то это очевидно. Пусть $\eta(a(t), q(t), z(t)) = \lambda$ и $z(t+1) \neq z'(t+1)$. Это означает, что $z'(t+1) = \lambda$ (и подавно $\gamma'(t+1) = \lambda$), так как $\gamma'(t+1)$ по определению является суффиксом $\gamma(t+1)$. То есть $|\gamma(t+1)| = \min\limits_{l \geqslant t+1} |\gamma(l)|$. Следовательно, $|\gamma'(t+1)| = 1$, что противоречит тому, что $z'(t+1) = \lambda$. Значит, $z(t+1) = z'(t+1)$ и лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $f : A^* \to B^*$ и $f \in \mathcal{M}(A, B)$. Тогда f преобразует периодические сверхслова в периодические.*

Доказательство. Пусть $P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ автомат с магазинной памятью, порождающий f. Функционирование P задает система уравнений (1). По лемме 1 можно задавать $q(t), z(t), b(t)$ системой уравнений (2). Определим $d_k = \min\limits_{t \geqslant k} |\gamma(t)|$, причем этот минимум достигается для любого k. Значит, существует возрастающая последовательность целых чисел n_k (в которых и достигается минимум) такая, что $|\gamma'(n_k)| = 1$.

Не ограничивая общности, будем считать, что все $\gamma'(n_k)$ одинаковы (иначе выберем из n_k подпоследовательность с указанным свойством и будем иметь дело с ней). Очевидно,

$$\exists i, j, N:\ \gamma'(n_i) = \gamma'(n_j),\ q(n_i) = q(n_j),\ z(n_i) = z(n_j),\ n_j - n_i = N\tau.$$

Докажем, что $\forall t \geqslant n_i \quad z(t) = z(t + N\tau)$, $q(t) = q(t + N\tau)$, $\gamma'(t) = \gamma'(t + N\tau)$ по индукции. База доказана выше. Шаг индукции. Пусть для некоторого t выполнено $z(t) = z(t+N\tau)$, $q(t) = q(t+N\tau)$, $\gamma'(t) = \gamma'(t + N\tau)$, по условию $a(t) = a(t + N\tau)$. Тогда в силу канонических уравнений $z(t+1) = (z(t+1+N\tau),\ q(t+1) = q(t+1+N\tau),\ \gamma'(t+1) = \gamma'(t + 1 + N\tau)$.

Значит, последовательности $z(t), q(t)$ будут являться периодическими с периодом вида $N\tau$. Тогда будет периодическим и сверхслово $\beta = b(0)b(1)\ldots \in B^\infty$ с аналогичным периодом, что и завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Автономный автомат с магазинной памятью генерирует периодическую последовательность.*

Следствие 2. *Для последовательности $\gamma(t)$ автономного автомата существует 3 альтернативы:*

1. Последовательность $\gamma(t)$ периодическая и пустое слово в ней встречается бесконечное количество раз.

2. Последовательность $\gamma(t)$ периодическая и пустое слово в ней встречается конечное количество раз.

3. Последовательность $\gamma(t)$ не является периодической.

Из доказательства теоремы не следует никаких соотношений на длину периодов входного и выходного сверхслов. Следующую часть исследования посвятим решению этой задачи.

2. Оценки длины периода выхода

Рассмотрим автономный автомат с магазинной памятью $P = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$, удовлетворяющий системе канонических уравнений:

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ \gamma(0) = \gamma_0, \\ z(t) = LS(\gamma(t)), \\ q(t+1) = \varphi(q(t), z(t)), \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(q(t), z(t)), \\ b(t) = \psi(q(t), z(t)). \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max\limits_{(q,z)\in Q\times\Gamma\cup\{\lambda\}} |\eta(q,z)|$ и будем говорить, что $P \in \mathcal{M}(n,m,k)$. Из доказательства теоремы 1 последовательности $z(t), q(t), b(t)$ являются периодическими с наименьшей длиной периода s=S(P). Далее мы будем заниматься поиском функции

$$L(n,m,k) = \max_{P\in\mathcal{M}(n,m,k)} S(P).$$

Для автомата P рассмотрим функции $\omega(q,z) : Q\times\Gamma^* \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ и $\pi(q,z) : Q\times\Gamma^* \to Q$, которые формально определим следующим образом. Пусть автомат находится в состоянии q, а в магазине лежит слово z. Если существует такое минимальное положительное количество тактов τ работы автомата, что магазин становится пустым, а автомат переходит в состояние q', то положим, что $\omega(q,z) = \tau$, а $\pi(q,z) = q'$ иначе $\omega(q,z) = \infty$, а значение $\pi(q,z)$ не определено. Рассмотрим свойства этих функций. Пусть автомат находится в состоянии q, а в магазине лежит слово $z = z_1z_2\ldots z_l$, где $l > 1$. Тогда выполнено

$$\omega(q,z) = \omega(q, z_1z_2\ldots z_l) = 1 + \omega(q,z_l) + \omega(\pi(q,z_l), z_1z_2\ldots z_{l-1})$$

и

$$\pi(q,z) = \pi(q, z_1z_2\ldots z_l) = \pi(\pi(q,z_l), z_1z_2\ldots z_{l-1}),$$

если $\omega(q,z_l)$ и $\omega(\pi(q,z_l), z_1z_2\ldots z_{l-1})$ — конечны.

Далее, не ограничивая общности, будем считать, что автомат генерирует периодическую последовательность без предпериода и магазин является пустым в начале.

Лемма 2. *Пусть P — автономный автомат с магазинной памятью и последовательность $\gamma(t)$ — периодическая и содержит пустое слово бесконечное количество раз. Тогда*

$$L(n,m,k) \leqslant \sum_{i=0}^{nm} k^i.$$

Доказательство. Очевидно, что для всех достижимых пар из $Q\times\Gamma$ определены функции ω и π. Причем для каждого правила записи в магазин $\eta(q,z) = \gamma(1)\ldots\gamma(l)$ можно записать, что

$$\omega(q,z) = 1 + \omega(\varphi(q,z),\gamma(l)) + \omega(q_l,\gamma(l)),\gamma(l-1)) + \ldots + \omega(q_1,\gamma(1)),$$

где $q_l = \varphi(q, z)$, и $q_i = \pi(q_{i+1}, \gamma(i+1))$.

Таким образом, можно составить систему линейных уравнений на значения $w(q, z)$. Пусть вектор $\vec{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_{nm})$ — решение этой системы, причем упорядоченное по возрастанию. Очевидно, что $\omega_1 = 1$, $\omega_i \leqslant 1 + k\omega_{i-1}$ при $i > 1$. Из этих соотношений, следует, что

$$\omega_i \leqslant \sum_{j=0}^{i-1} k^j.$$

Значит, длина периода $\tau = \omega(q, \lambda) \leqslant 1 + k\omega_1 \leqslant \sum\limits_{i=0}^{nm} k^i$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть P — автономный автомат с магазинной памятью и последовательность $\gamma(t)$ — периодическая и содержит пустое слово конечное количество раз. Тогда*

$$L(n, m, k) \leqslant \sum_{i=0}^{nm} k^i.$$

Доказательство. Пусть τ — период последовательности γ. Рассмотрим $l = \min\limits_{1<t<\tau} |\gamma(t)|$. Обозначим $\gamma' = \gamma(t_0)$ и $q' = q(t_0)$, где t_0 таково, что $|\gamma(t_0)| = l$. Не ограничивая общности рассуждения, можно считать, что $\gamma_0 = \gamma'$ и $q_0 = q'$. Рассмотрим автомат P', который получится из автомата P заменой начального слова в магазине на $LS(\gamma')$. Очевидно, что P и P' геренируют одни и те же периодические последовательности. Теперь изменим поведение автомата P' следующим образом. Тот такт работы, когда у автомата P' в магазине находится однобуквенное слово $LS(\gamma')$, а сам автомат находится в состоянии q', разобьем на два такта: в первый такт мы стираем $LS(\gamma')$ и остаемся в том же состоянии q', а во втором такте пишем в магазин нужное слово и переходим в следующее состояние. Таким образом, полученный автомат удовлетворяет условию предыдущей леммы, а длина периода последовательности, которую он генерирует на 1 больше, чем у изначально данного автомата P. Таким образом,

$$\tau < \sum_{i=0}^{nm} k^i,$$

что и завершает доказательство.

Лемма 4. *Пусть P — автономный автомат с магазинной памятью и последовательность $\gamma(t)$ — непериодическая. Тогда*

$$L(n,m,k) \leqslant \sum_{i=0}^{nm} k^i.$$

Доказательство. Пусть τ — период выходящей последовательности автомата P. Рассмотрим $l = \min\limits_{1<t<\tau} |\gamma(t)|$. Обозначим $\gamma' = \gamma(t_0)$ и $q' = q(t_0)$, где t_0 таково, что $|\gamma(t_0)| = l$. Не ограничивая общности рассуждения, можно считать, что $\gamma_0 = \gamma'$ и $q_0 = q'$. Рассмотрим автомат P', который получится из автомата P заменой начального слова в магазине на $LS(\gamma')$. Очевидно, что P и P' геренируют одни и те же периодические последовательности. Теперь изменим поведение автомата P' следующим образом. Добавим состояние q''. Автомат P' из состояния q' переходит в q'', в котором опустошается магазин. При пустом магазине в состоянии q'' P' ведет себя так же, как автомат P, когда находится в состоянии q' и видит символ $LS(\gamma')$ магазина. Полученный автомат удовлетворяет условию леммы 2. Учитывая, что $\omega(q'', z) = 1$, видим, что добавленное состояние не увеличивает оценку, что и завершает доказательство.

Таким образом доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть $P = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ — автономный автомат с магазинной памятью. Тогда длина периода периодической последовательность, которую P генерирует не больше, чем $\sum\limits_{i=0}^{nm} k^i$, где $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max\limits_{(q,z)\in Q\times\Gamma\cup\{\lambda\}} |\eta(q,z)|$.*

3. Примеры

Пример 1. Рассмотрим автомат $P_1 = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$, где $Q = \{q\}$, $B = E_2$, $\Gamma = \{1, 2, \ldots, m\}$, $q_0 = q$, $\gamma_0 = \lambda$. Функция переходов тривиальна. Функция выхода выдает 1, если магазин пуст; в остальных случаях — 0. Функция памяти определим следующим образом:

$$\eta(q,\gamma) = \begin{cases} 1^k, \text{ если } \gamma = \lambda, \\ (i+1)^k, \text{ если } \gamma = i < m, \\ \lambda, \text{ если } \gamma = m. \end{cases}$$

где натуральное число $k > 1$. Для данного автомата выпишем систему:

$$\begin{cases} \omega(q,\lambda) = 1 + k\omega(q,1), \\ \omega(q,1) = 1 + k\omega(q,2), \\ \dots \\ \omega(q,i) = 1 + k\omega(q,i+1), \\ \dots \\ \omega(q,m-1) = 1 + k\omega(q,m), \\ \omega(q,m) = 1. \end{cases}$$

Длиной периода в данном автомате можно считать количество тактов работы автомата между пустыми состояниями магазина, то есть $\omega(q,\lambda)$. Из системы видно, что

$$\omega(q,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} k^i.$$

Этот пример показывает достижимость оценки сверху из теоремы для случая $|Q| = 1$.

Пример 2. Рассмотрим автомат $P_2 = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$, где $Q = \{q1, \dots, q_n\}$, $B = E_2$, $\Gamma = \{1\}$, $q_0 = q_1$, $\gamma_0 = \lambda$,

$$\varphi(q,\gamma) = \begin{cases} q_{i+1}, \text{ если } q = q_i, i < n, \gamma = \lambda \\ q_{n-1}, \text{ если } q = q_n, \gamma = \lambda \\ q_{i-1}, \text{ если } q = q_i, i > 1, \gamma = 1 \\ q_1, \text{ если } q = q_1, \gamma = 1 \end{cases},$$

$$\eta(q,\gamma) = \begin{cases} \lambda, \text{ если } q = q_i, i < n, \gamma = \lambda \\ 1^k, \text{ если } q = q_n, \gamma = \lambda \\ 1^k, \text{ если } q = q_i, i > 1, \gamma = 1 \\ \lambda, \text{ если } q = q_1, \gamma = 1 \end{cases}.$$

Функция выхода выдает 1, если магазин пуст; в остальных случаях — 0. Для данного автомата выпишем систему:

$$\begin{cases}\omega(q_n,\lambda)=1+\omega(q_n,1)+(k-1)\omega(q_1,1),\\ \omega(q_n,1)=1+\omega(q_{n-1},1)+(k-1)\omega(q_1,1),\\ \dots\\ \omega(q_i,1)=1+\omega(q_{i-1},1)+(k-1)\omega(q_1,1),\\ \dots\\ \omega(q_2,1)=1+\omega(q_1,1)+(k-1)\omega(q_1,1),\\ \omega(q_1,1)=1.\end{cases}$$

Несложно видеть, что следствием системы является:

$$\begin{cases}\omega(q_n,\lambda)=n+(n(k-1)+1)\omega(q_1,1),\\ \omega(q_1,1)=1.\end{cases}$$

Длиной периода в данном автомате можно считать $\sum\limits_{q\in Q}\omega(q,\lambda)=n-1+\omega(q_n,\lambda)=n-1+(n+(n(k-1)+1))=nk+n$.

Список литературы

[1] Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. — Том 1. М.: Мир, 1978.

[2] Иванов И. Е. Некоторые классы функций, вычислимые автоматами // Интеллектуальные системы — 2011. Т. 15, вып. 1–4. — С. 361–378.

[3] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.